İÇ ÇARPIM ve GEOMETRİK UYGULAMALARI

Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

İç Çarpım Fonksiyonu

Tanım

$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı olsun.

$$f \ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, "f" işlemine bir **iç çarpımdır** veya iç **çarpım fonksiyonudur** denir.

İ1. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ için, $f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right) \geq 0$ (Pozitif Tanımlılık)

İ2. $f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ (Kendisiyle Çarpımının Sıfıra Eşitliği Durumu)

İ3. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ için, $f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right)$ (Simetri Özelliği)

İ4. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \in \mathbb{V}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$f\left(\left(\overrightarrow{\mathbf{u}} + \lambda \overrightarrow{\mathbf{v}}\right), \overrightarrow{\mathbf{w}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right) + \lambda f\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right)$$
$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \left(\lambda \overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{w}}\right)\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) + f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right)$$

eşitlikleri sağlanır. (Bilineerlik veya İki-lineerlik)

Örnek

$\mathbb{R}^2$ **de,** $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2)$, $\overrightarrow{y}=(y_1,y_2)$ **vektörleri için,**

$$f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)=2x_1\,y_1+3x_2\,y_2$$

şeklinde tanımlanan çarpımın bir iç çarpım olduğunu gösteriniz. Bu iç çarpıma göre, $\overrightarrow{x}=(1,3)$ **ve** $\overrightarrow{y}=(2,-1)$ **için,** $f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)$ **çarpımını bulunuz.**

Çözüm

İ1. *Her* $\overrightarrow{\mathbf{u}}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ *için,*

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{u}}\right)=2u_1^2+3u_2^2\geq 0$$

olduğundan pozitif tanımlıdır.

İ2.

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{u}}\right)=2u_1^2+3u_2^2=0\Leftrightarrow u_1=u_2=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathbf{u}}=(0,0)=\vec{\mathbf{0}}$$

olduğundan, **İ2** *sağlanır.*

Çözüm

İ3. *Her* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ *için,*

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 = 2v_1u_1 + 3v_2u_2 = f\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right)$$

olduğundan, simetri özelliği de sağlanır.

İ4. *Her* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (w_1, w_2), \in \mathbb{R}^2$ *ve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *için,*

$$\begin{aligned} f\left(\left(\overrightarrow{\mathbf{u}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{v}}\right), \overrightarrow{\mathbf{w}}\right) &= f\left((u_1, u_2) + \lambda(v_1, v_2), (w_1, w_2)\right) \\ &= f\left((u_1 + \lambda v_1, u_2 + \lambda v_2), (w_1, w_2)\right) \\ &= 2(u_1 + \lambda v_1)w_1 + 3(u_2 + \lambda v_2)w_2 \\ &= (2u_1w_1 + 3u_2w_2) + \lambda(2v_1w_1 + 3v_2w_2) \\ &= f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right) + \lambda f\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. $f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \left(\lambda\overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{w}}\right)\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) + f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right)$ *olduğunu da benzer şekilde görülebilir. O halde, bu fonksiyon bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma göre,*

$$f\left((1,3), (2,-1)\right) = 2(1 \cdot 2) + 3(3 \cdot (-1)) = -5$$

elde edilir.

İç Çarpımdan Elde Edilen Norm

Tanım

$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı olsun. $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{V}$ uzayı üzerinde bir iç çarpım olmak üzere,

$$\|.\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R},\ \overrightarrow{\mathbf{u}} \to \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = \sqrt{f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right)}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, $\mathbb{V}$ üzerindeki f iç çarpımına karşılık gelen (uzunluk) norm fonksiyonu denir.

Örnek

$\mathbb{R}^2$ de, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ vektörleri için, $\mathbf{f}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = 2\mathbf{x}_1\,\mathbf{y}_1 + 3\mathbf{x}_2\,\mathbf{y}_2$ şeklinde tanımlanan iç çarpıma karşılık gelen norm yardımıyla, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (3, 5)$ vektörünün normunu bulunuz.

Çözüm

$\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = \sqrt{f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right)}$ *olduğunu kullanırsak,* $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = \sqrt{2(3 \cdot 3) + 3(5 \cdot 5)} = \sqrt{93}$ *bulunur.*

Örnek

$\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3})$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \mathbf{y_3})$ vektörleri için,

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{f}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \mathbf{x_1}\,\mathbf{y_1} + \mathbf{x_3}\,\mathbf{y_3}$$

şeklinde tanımlanan çarpımın bir iç çarpım olmadığını gösteriniz.

Çözüm

İ1 özelliğinin sağlandığı hemen görülebilir. Fakat, İ2 özelliği sağlanmaz. Yani, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ için,

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = u_1^2 + u_3^2 = 0$$

olduğunda, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ olmayabilir. Çünkü, bu eşitlik u_2 değerinin 0 olmasını garanti etmez. Örneğin, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (0, 1, 0)$ vektörü için, $f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = 0$ olmasına rağmen $\overrightarrow{\mathbf{u}} \neq 0$'dır. O halde, iç çarpım değildir.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ de, $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere,

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f\left(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}\right) = x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3$$

şeklinde tanımlanan çarpımın bir iç çarpım olmadığını gösteriniz.

Çözüm

İ1 özelliği, yani pozitif tanımlılık sağlanmaz. Örneğin, $\overrightarrow{u} = (1, 2, 1)$ vektörü için,

$$f\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) = 1 - 4 + 1 = -2 < 0\prime$$

dır. O halde, iç çarpım değildir.

Problem

$\mathbb{R}^2$ *de* $\overrightarrow{\mathbf{x}}=(x_1,x_2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}=(y_1,y_2)$ *vektörleri için*

$$f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)=x_1y_1-x_2y_1+x_2y_2$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun, $\mathbb{R}^2$ *üzerinde bir iç çarpım olmadığını gösteriniz.*

Problem

$\mathbb{R}^2$ *de* $\overrightarrow{\mathbf{x}}=(x_1,x_2,x_3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}=(y_1,y_2,y_3)$ *vektörleri için*

$$f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)=x_1y_1+x_2y_3+x_3y_2$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun, $\mathbb{R}^2$ *üzerinde bir iç çarpım olmadığını gösteriniz.*

Problem

$\mathbb{R}^2$ *de* $\overrightarrow{\mathbf{x}}=(x_1,x_2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}=(y_1,y_2)$ *vektörleri için,*

$$f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+3x_2y_2$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun, $\mathbb{R}^2$ *üzerinde bir iç çarpım olduğunu gösteriniz.*

Öklid İç Çarpımı

Örnek

$\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$ **olmak üzere**

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{g}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \mathbf{x}_1\,\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2\,\mathbf{y}_2 + \mathbf{x}_3\,\mathbf{y}_3$$

şeklinde tanımlanan çarpımın bir iç çarpım olduğunu gösteriniz.

Tanım

$\mathbb{R}^n$ uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vektörleri için

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon, bir iç çarpımdır ve bu iç çarpıma özel olarak **Öklid İç Çarpımı** denir. Öklid iç çarpımını genel olarak $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ şeklinde gösteririz.

Örnek

$\mathbb{R}^4$ uzayında verilen $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 3, 4)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 1, -3, 1)$ vektörleri için $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle$ iç çarpımını hesaplayınız.

Çözüm

$$\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 = -1$$

bulunur.

Problem

$\mathbb{R}^5$ uzayında verilen $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (0, 1, 2, 3, 4)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 1, -3, 1, 5)$ vektörleri için $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle$ iç çarpımını hesaplayınız.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayında verilen $\overrightarrow{x} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{y} = (0,1,2)$, $\overrightarrow{z} = (2,4,-3)$ vektörleri için aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = ?$ **b)** $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle = ?$ **c)** $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} \rangle = ?$ **d)** $\langle \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} \rangle = ?$

e) $\langle \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z} \rangle = ?$

Çözüm

a) $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8.$

b) $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) = 1.$

c) $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle + \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle = 8 + 1 = 9$ *veya,* $\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} = (2,5,-1)$ *olduğu bulunarak,* $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) = 9$ *olduğu görülebilir.*

d) $\langle \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} \rangle = \langle (1,3,5), (2,5,-1) \rangle = 12.$

e) $\langle \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z} \rangle = \langle (3,6,0), (3,6,0) \rangle = 45.$

Problem

$\mathbb{R}^4$ *uzayında verilen* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,3,4)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,3,1,2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,0,2,-1)$ *vektörleri için aşağıdakileri hesaplayınız.*

a) $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = ?$ **b)** $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = ?$ **c)** $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = ?$ **d)** $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} + 3\overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = ?$

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{0}}$, $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \mathbf{1}$ **ise** $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle$ **değerini hesaplayınız.**

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \vec{0}$ *eşitliğini sırasıyla* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ *vektörleriyle çarpalım. Buna göre,*

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = -1 \\
\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = -1 \\
\langle \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = -1
\end{aligned}$$

eşitliklerinden, üçüncüsü -1 *ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,* $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = \dfrac{-1}{2}$ *elde edilir.*

Norm ve İç Çarpım Arasındaki İlişki

Daha önce $\mathbb{R}^n$ uzayında bir $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ vektörünün uzunluğunu

$$\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

ile ifade etmiştik. Diğer taraftan, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün kendisiyle iç çarpımı da,

$$\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$$

olduğundan,

$$\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle}$$

sonucu elde edilir.

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = 2\,\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ **ise** $\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|$ **değerini,** $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ **vektörlerinin normuna ve iç çarpımına bağlı olarak yazınız.**

Çözüm

İç çarpımın özellikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| &= \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle} = \sqrt{\left\langle 2\,\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}, 2\,\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle} \\ &= \sqrt{4\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle + 2\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle + 2\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle}\end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| = \sqrt{4\left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|^2 + 4\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle + \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|^2}$$

bulunur.

Örnek

$\|\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}\|=5$, $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|=1$ **ve** $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}-\overrightarrow{\mathbf{y}}\|=3$ **olduğuna göre,** $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ **vektörünün uzunluğunu bulunuz.**

Çözüm

$\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\|^2=\langle\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{u}}\rangle$ *bağıntısını ve iç çarpımın özelliklerini kullanacağız.*

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 &= \langle\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}\rangle=\langle\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle+\langle\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\rangle+\langle\overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle+\langle\overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\rangle\\
&= \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+2\langle\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\rangle+\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2\\
25 &= 1+2\langle\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\rangle+\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2\\
\|\overrightarrow{\mathbf{x}}-\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 &= \langle\overrightarrow{\mathbf{x}}-\overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{x}}-\overrightarrow{\mathbf{y}}\rangle=\langle\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle-\langle\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\rangle-\langle\overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle+\langle\overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\rangle\\
&= \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2-2\langle\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\rangle+\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2\\
9 &= 1-2\langle\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\rangle+\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2
\end{aligned}$$

olduğundan, $(*)$ *ve* $(**)$ *eşitliklerinden,* $\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|=4$ *elde edilir. Yani,* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörünün uzunluğu 4 br'dir.*

Problem

$\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| = 6$, $\left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| = 2$ *ve* $\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| = 4$ *olduğuna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *vektörünün uzunluğunu bulunuz.*

Problem

$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = \dfrac{\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2 - \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2}{4}$ *olduğunu kanıtlayınız.*

Problem

Dik koordinat sisteminde verilen $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}$ *vektörleri için,* $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle = 6$ *ve* $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\| + \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\| = 12$ *ise* $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|$ *kaçtır? (ÖABT - 2015)*

Problem

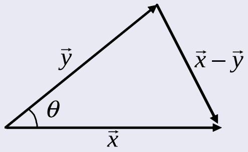
$\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| = \sqrt{3}$, $\left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| = \sqrt{2}$ *ve* $\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| = \sqrt{7}$ *ise* $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = ?$ *(ÖABT - 2014)*

Teorem

$\vec{\mathbf{x}}$ ve $\vec{\mathbf{y}}$, $\mathbb{R}^n$ uzayında iki vektör olsun. $\vec{\mathbf{x}}$ ve $\vec{\mathbf{y}}$ arasındaki açı θ ise, $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle}{\| \vec{\mathbf{x}} \| \, \| \vec{\mathbf{y}} \|}$ *eşitliği sağlanır.*

Kanıt.

$\mathbb{R}^n$ uzayında, aralarındaki açı θ olan $\vec{\mathbf{x}}$ ve $\vec{\mathbf{y}}$ vektörlerini alalım. $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$ ve $\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}$ vektörleri şekildeki gibi bir üçgen oluştururlar ve bu üçgenin kenarları $\| \vec{\mathbf{x}} \|$, $\| \vec{\mathbf{y}} \|$ ve $\| \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}} \|$ uzunluğuna sahiptir. Şimdi, Kosinüs teoremini uygulayacağız.



$$\| \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}} \|^2 = \| \vec{\mathbf{x}} \|^2 + \| \vec{\mathbf{y}} \|^2 - 2 \| \vec{\mathbf{x}} \| \, \| \vec{\mathbf{y}} \| \cos\theta$$

eşitliğinde, sol taraftaki $\| \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}} \|^2$ normu,

$$\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}} \rangle = \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle - \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle - \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle + \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle = \| \vec{\mathbf{x}} \|^2 - 2 \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle + \| \vec{\mathbf{y}} \|^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa, $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle = \| \vec{\mathbf{x}} \| \, \| \vec{\mathbf{y}} \| \cos\theta$ elde edilir. □

Örnek

Sıfırdan farklı iki vektörün dik olmasıyla, iç çarpımları arasında nasıl bir bağıntı vardır?

Çözüm

Aralarındaki açı 90° *olan* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörlerini alalım.* $\cos 90^\circ = 0$ *olduğundan,*

$$\cos\theta = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|} = 0$$

eşitliğinden, $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = 0$ *elde edilir. Diğer yandan, sıfırdan farklı iki vektörün iç çarpımı 0 ise, bu iki vektör birbirine dik olacaktır.*

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1,2,3,4,5})$ **vektörüyle** $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{2,-3,5,1,k})$ **vektörü birbirine dik ise k nedir?**

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{x}} \perp \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *ise* $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = 0$ *olmalıdır. Buna göre,*

$$\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot k = 5k + 15 = 0$$

eşitliğinden, $k = -3$ *bulunur.*

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1,3,0,2})$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{1,0,2,3})$ **vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.**

Çözüm

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle}{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \, \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|} = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{\sqrt{1+9+4}\sqrt{1+4+9}} = \frac{1}{2}$$ *olduğundan,* $\theta = 60^\circ$ *elde edilir.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 3, 2, 1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3, 1, 2, 1, 2)$ *vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, -3, 2, -1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3, k, 2, 1, 2)$ *vektörleri birbirine dik ise* $k = ?$

Problem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,3)$ *vektörüne dik olan 5 vektör yazınız.*

Problem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,k,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3,-1,m)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (n,2,2)$ *vektörleri ikişer olarak birbirlerine dik olduklarına göre,* m, n *ve* k *değerlerini bulunuz.*

Problem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,k,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,-1,m)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (n,2,1)$ *vektörleri ikişer olarak birbirlerine dik olduklarına göre,* m, n *ve* k *değerlerini bulunuz.* $\det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right) = ?$ *Bu vektörler doğrultusundaki birim vektörlerin oluşturduğu matrisin bir ortogonal matris olacağını gösteriniz.*

Not Ortogonal bir matriste, tüm satır ve tüm sütun vektörleri birbirine diktir. Tüm satır ve sütun vektörlerinin uzunluğu 1'dir.

Örnek

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \mathbf{c} \\ -1 & \mathbf{b} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \mathbf{a} & -1 \end{bmatrix}$$ **matrisi bir ortogonal matris ise,**

$\mathbf{a} = ?$, $\mathbf{b} = ?$, $\mathbf{c} = ?$

Çözüm

$\langle S_1, S_2 \rangle = 0$ *eşitliğinden,* $c = 1$,
$\langle S_1, S_3 \rangle = 0$ *eşitliğinden,* $b = 1$ *ve son olarak,*
$\langle S_1, S_4 \rangle = 0$ *eşitliğinden,* $a = -1$ *elde edilir.*
Bu a, b, c *değerleri için* $AA^T = I$ *olduğunu görebilirsiniz.*

Problem

$A = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & a \\ -4 & b & 4 \\ 8 & -4 & c \end{bmatrix}$ *matrisi ortogonal olduğuna göre,* a, b, c *değerlerini bulunuz.*

Problem

$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ a & b & c \end{bmatrix}$ *matrisi ortogonal olduğuna göre,* a, b, c *değerlerini bulunuz.*

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,3)$ vektörüyle aynı düzlemde bulunan birbirine dik iki vektör bulunuz.

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *vektörünün bulunduğu düzlemde bulunan birbirine dik iki vektör* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ *olsun. Buna göre,* $\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = 0$ *olmalı ve* $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ *aynı düzlemde olmalıdır. Aynı düzlemde olan üç vektör lineer bağımlı olacağından, bu üç vektörün determinantı 0 olmalıdır.* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörünü rastgele bir vektör alabiliriz.* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,1,1)$ *olsun.* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (a,b,c)$ *diyelim. Buna göre,*

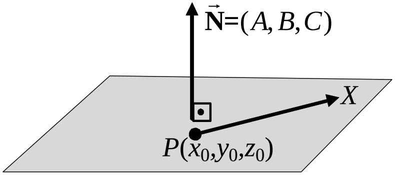
* 1) $\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = 0$ *ise* $a+b+c=0 \quad (*)$ *olmalıdır.*

** 2) $\det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right) = 0$ *ise* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2b - a - c = 0 \quad (**)$ *olmalıdır.*

Buna göre, $(*)$ *ve* $(**)$ *eşitliklerinden,* $b = 0$ *ve* $a = -c$ *bulunur. O halde,* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,0,-1)$ *alınabilir.*

Öklid İç Çarpımını Kullanarak Düzlem Denkleminin İfade Edilmesi

Bunun için düzleme **dik olan bir vektörü** kullanacağız. Düzleme dik olan bir vektör, düzlem üzerindeki tüm vektörlere diktir. Buna göre, düzlemin P gibi bir noktasını ve düzlemin dik olduğu $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ gibi bir vektörü biliyorsak düzlem denklemini kolayca bulabiliriz. $X\left(x, y, z\right)$ düzlemin değişken noktasını göstermek üzere, $\overrightarrow{PX}$ vektörü daima, $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ vektörüne diktir. O halde,



$$< \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{\mathbf{N}} >= 0$$

eşitliği sağlanmalıdır. $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{N}} = \left(A, B, C\right)$ olmak üzere,

$$\left\langle \left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right), \left(A, B, C\right)\right\rangle = 0$$

eşitliğinden,

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0$$

elde edilir.

Örnek

$\overrightarrow{x} = (1,2,3)$ ve $\overrightarrow{y} = (2,k,3)$ vektörlerinin içinde bulunduğu düzlem, $\overrightarrow{N} = (2,3,m)$ vektörüne dik ise, k ve m değerlerini bulunuz.

Çözüm

$\overrightarrow{N}$ *vektörü düzleme dik ise, düzlemde bulunan tüm vektörlere dik olacaktır. Buna göre,*

$$\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{N} \right\rangle = 0 \Rightarrow 2 + 6 + 3m = 0 \Rightarrow m = \frac{-8}{3},$$
$$\left\langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{N} \right\rangle = 0 \Rightarrow 4 + 3k + 3\left(\frac{-8}{3}\right) = 0 \Rightarrow k = \frac{4}{3}$$

elde edilir.

Teorem

$\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\mathbb{R}^n$ *uzayında iki vektör olsun.* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *arasındaki açı* θ *olmak üzere,* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *ile oluşturulan paralelkenarın alanı*

$$Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2}$$

eşitliği ile bulunur.

Kanıt.

Aralarındaki açı θ olan, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını

$$Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| \sin\theta$$

ile bulabiliriz. $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ yazalım. $\cos\theta = \dfrac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|}$ olduğunu da kullanırsak,

$$\text{Alan}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| \sqrt{1 - \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2}} = \sqrt{\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2 - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2}$$

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,2,3)$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,3,1,1)$ **vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.**

Çözüm

$Alan(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \sqrt{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle - \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle^2}$ *eşitliğinden,*

$$Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \sqrt{15 \cdot 15 - 10^2} = 5\sqrt{5}$$

elde edilir.

Örnek

Köşeleri A $(1,1,1,0,1)$, B $(1,2,3,4,3)$ ve C $(1,2,1,1,1)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm

Önce noktadan vektöre geçelim. $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,1,2,4,2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,1,0,1,0)$ *denilirse, üçgenin alanı :*

$$Alan\,(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle - \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle^2} = \frac{1}{2}\sqrt{25 \cdot 2 - 5^2} = \frac{5}{2}$$

bulunur.

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (0,1,0,2,2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,0,0,2,1)$ *vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.*

Problem

Köşelerinin koordinatları $A(1{,}1{,}1{,}0{,}1)$, $B(1{,}2{,}3{,}4{,}3)$ *ve* $C(1{,}2{,}1{,}1{,}1)$ *olan üçgenin alanını bulunuz.*

Problem

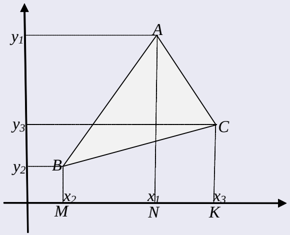
$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,1)$ *vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.*

Teorem

Düzlemde köşelerinin koordinatları $A\left(x_1, y_1\right)$, $B\left(x_2, y_2\right)$ *ve* $C\left(x_3, y_3\right)$ *olan üçgenin alanı*

$$Alan\left(ABC\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

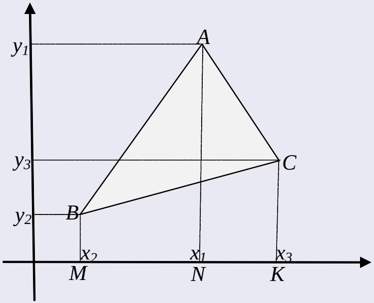
değerinin mutlak değeridir.



Kanıt.

Yamukların alanlarını kullanarak,

$$A(ABC) = A(BMNA) + A(ANKC) - A(BMKC)$$



eşitliğinden sonuca ulaşabiliriz.

$$A(BMNA) = (x_1 - x_2)\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$A(ANKC) = (x_3 - x_1)\left(\frac{y_1 + y_3}{2}\right)$$

$$A(BMKC) = (x_3 - x_2)\left(\frac{y_3 + y_2}{2}\right)$$

olduğu kullanılırsa,

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

elde edilir. □

Örnek

Köşelerinin koordinatları A $(1,1)$, B $(2,3)$ ve C $(3,6)$ olan üçgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm

1. Yol (İç çarpımı kullanarak)

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{AB}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{AC}$ *alabiliriz. Buna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,5)$ *olduğundan,*

$$Alan\,(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle - \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5 \cdot 29 - 12^2} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

2. Yol

$$Alan\,(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

Problem

Köşelerinin koordinatları $A(1,2)$, $B(2,3)$ *ve* $C(3,1)$ *olan üçgenin alanını bulunuz.*

Problem

Köşelerinin koordinatları $A(0,1)$, $B(6,3)$, $C(7,6)$ *ve* $D(1,4)$ *olan paralelkenarın alanını hesaplayınız.*

Teorem

$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ *vektörleri için,* $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \, \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| \geq |\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle|$ *eşitsizliği sağlanır.*

Kanıt.

$\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \, \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| \cos\theta$ ve $|\cos\theta| \leq 1$ olduğundan, $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \, \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| \geq |\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle|$ elde edilir. $\square$

Not : Teorem 4.10'un kanıtında, Öklid iç çarpımı söz konusu olduğu için, $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \, \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| \cos\theta$ eşitliğinden dolayı, Schwarz eşitsizliğinin doğruluğu hemen görülebilmektedir. Fakat, Öklid iç çarpımı dışındaki, herhangi bir iç çarpım için de, bu eşitsizlik daima doğrudur. Herhangi bir iç çarpım için bu eşitsizliğin doğruluğunun kanıtını Problem 4.15'te bulabilirsiniz.

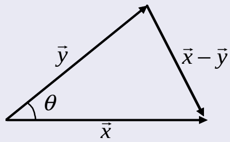
Teorem

Bir üçgende, herhangi bir kenar, diğer iki kenarın toplamından küçük, farkından büyüktür.

Kanıt.

Yandaki şekile göre,

$$\left|\|\vec{\mathbf{x}}\| - \|\vec{\mathbf{y}}\|\right| < \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\| < \|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|$$



olduğunu göstereceğiz. i) $\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\| < \|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|^2 &= \langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}} \rangle = \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle - \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle - \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle + \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle \\
&= \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 - 2\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 \\
&\leq \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + 2\left|\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle\right| + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 \quad \text{(Schwarz Eşitsizliğinden)} \\
&\leq \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{x}}\|\,\|\vec{\mathbf{y}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 \\
&= (\|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|)^2
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden, $\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\| < \|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|$ olduğu görülür. $\square$

Kanıt.

ii) Şimdi de,

$$\left|\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| - \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|\right| < \|\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}\|$$

olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 &= \langle \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle - \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle - \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle \\
&= \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 \\
&\geq \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 - 2|\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle| + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 \\
&\geq \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 - 2\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|\,\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 = (\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| - \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|)^2
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden istenen elde edilir. □

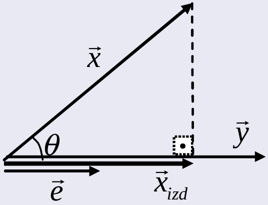
Teorem

$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ sıfırdan farklı vektörleri verilsin. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü $\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} = \dfrac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle}{\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle} \overrightarrow{\mathbf{y}}$ ile bulunur.

Kanıt.

$\vec{\mathbf{e}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ doğrultusundaki birim vektör olsun. Buna göre,

$$\vec{\mathbf{e}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{y}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd}}{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd}\|}$$



olur. Buradan $\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd}\|}{\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|} \overrightarrow{\mathbf{y}}$ elde edilir.

$$\|\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd}\| = \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \cos\theta = \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \frac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle}{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|} = \frac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle}{\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|}$$

olduğu kullanılırsa, $\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} = \dfrac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle}{\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2} \overrightarrow{\mathbf{y}} = \dfrac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle}{\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle} \overrightarrow{\mathbf{y}}$ bulunur. $\square$

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4})$ **vektörünün** $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ **vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.**

Çözüm

Formül uygulanarak

$$\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} = \frac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle}{\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle} \overrightarrow{\mathbf{y}} = \frac{12}{15} \overrightarrow{\mathbf{y}} = \frac{4}{5}(2, 3, 1, 1)$$

elde edilir. Siz, formül uygulamak yerine, kanıtta kullandığımız yöntemle bulmaya çalışınız.

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (0, 1, 1, 0, 1)$ *vektörünün* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1, 1, 1, 1, 1)$ *vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.*

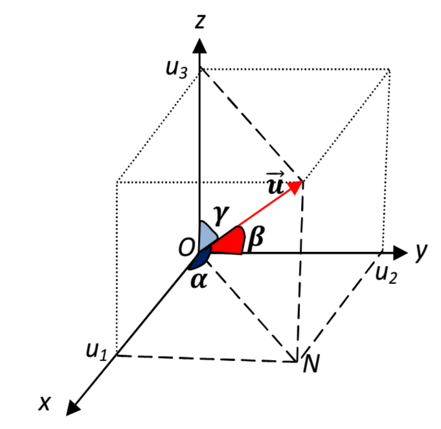
Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (2, 1, 1)$ *vektörünün* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1, 1, 3)$ *vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.*

Doğrultman Kosinüsleri

Tanım

$\mathbb{R}^n$ uzayında herhangi bir vektörün doğrultusu, koordinat eksenlerinin pozitif yönde yağtığı açıların kosinüsleri verilerek belirlenebilir. Bir $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün koordinat eksenleriyle yaptıkları açılara doğrultu açıları, bu açıların kosinüslerine de **doğrultman kosinüsleri** denir.



Örneğin, $\mathbb{R}^3$ uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ koordinat eksenleriyle pozitif yönde yaptığı açılar sırasıyla α, β, γ olsun. $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün doğrultman kosinüslerini aşağıdaki gibi belirleyebiliriz. x, y ve z koordinatlarının doğrultu vektörlerini sırasıyla $\vec{\mathbf{e}}_1 = (1,0,0)$, $\vec{\mathbf{e}}_2 = (0,1,0)$ ve $\vec{\mathbf{e}}_3 = (0,0,1)$ ile veririz. Buna göre,

$$< \overrightarrow{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{e}}_1 >= \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| \|\vec{\mathbf{e}}_1\| \cos\alpha \Rightarrow u_1 = \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{u_1}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|}$$
$$< \overrightarrow{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{e}}_2 >= \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| \|\vec{\mathbf{e}}_2\| \cos\beta \Rightarrow u_2 = \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{u_2}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|}$$
$$< \overrightarrow{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{e}}_3 >= \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| \|\vec{\mathbf{e}}_2\| \cos\gamma \Rightarrow u_3 = \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{u_3}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|}$$

elde edilir.

Örnek

$\mathbb{R}^4$ uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (\mathbf{1, 4, 2, 3})$ vektörünün doğrultman kosinüslerini bulunuz.

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *vektörünün eksenlerle yaptığı açılar* $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ *ve* θ_4 *olmak üzere,*

$$\cos\theta_i = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{e}}_i \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| \left\| \vec{\mathbf{e}}_i \right\|} = \frac{u_i}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|}$$

olduğu kullanılırsa,

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}, \quad \cos\theta_2 = \frac{4}{\sqrt{30}}, \quad \cos\theta_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}, \quad \cos\theta_4 = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

bulunur.

Teorem

$\mathbb{R}^n$ uzayında verilen bir $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ vektörünün, $\mathbb{R}^n$'in dik koordinat sistemindeki koordinat eksenleriyle yaptıkları açılar sırasıyla $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ olsun. Buna göre,

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 + \cdots + \cos^2\theta_n = 1$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt.

$\mathbb{R}^n$ uzayında koordinat eksenlerinin doğrultu vektörleri olarak,

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = (1,0,0,...,0), \ \vec{\mathbf{e}}_2 = (0,1,0,...,0), ..., \ \vec{\mathbf{e}}_n = (0,0,0...,1)$$

alınabilir. Buna göre, $\cos\theta_i = \dfrac{\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{e}}_i \rangle}{\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \| \, \|\vec{\mathbf{e}}_i\|} = \dfrac{u_i}{\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \|}$ elde edilir. Buradan,

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cdots + \cos^2\theta_n = \frac{u_1^2}{\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \|^2} + \frac{u_2^2}{\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \|^2} + \cdots + \frac{u_n^2}{\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \|^2} = \frac{\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \|^2}{\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \|^2} = 1$$

bulunur. □

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayında bir $\overrightarrow{u}$ birim vektörü, x ekseniyle 60°, y ekseniyle 30° yaptığı biliniyor. Buna göre $\overrightarrow{u}$ vektörünü bulunuz.

Çözüm

$\cos^2 60^\circ + \cos^2(30^\circ) + \cos^2(\theta_3) = 1$ *olduğunu kullanacağız. Buna göre,*

$$\cos^2(\theta_3) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

olduğundan, $\cos\theta_3 = 0$ *elde edilir. Yani,* $\theta_3 = 90^\circ$ *veya* 270° *olabilir. Buna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *vektörü,* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \left(1/2, \sqrt{3}/2, 0\right)$ *olarak bulunur.*

Not : $\mathbb{R}^n$ uzayında, bir $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün doğrultu kosinüsleri $\cos\theta_1, \cos\theta_2, ..., \cos\theta_n$ ise, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|(\cos\theta_1, \cos\theta_2, ..., \cos\theta_n)$ ile belirlidir.

Problem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında bir* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *vektörünün x ekseniyle* 60°, *y ekseniyle* 60° *yaptığı biliniyor. Buna göre, z ekseniyle kaç derecelik açı yapabilir?*

KAYNAK

Mustafa Özdemir, Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınları, 4. Baskı, İzmir, 2019.