T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

2. ANLAMDA S-KONVEKSLİK YARDIMIYLA BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLERİN ELDE EDİLMESİ

Yasemin PRISTUPA

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2025

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

2. ANLAMDA S-KONVEKSLİK YARDIMIYLA BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLERİN ELDE EDİLMESİ

Yasemin PRISTUPA

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2. ANLAMDA S-KONVEKSLİK YARDIMIYLA BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLERİN ELDE EDİLMESİ

Yasemin PRISTUPA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 27/01/2025 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE (Danışman)
Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ÖZET

2. ANLAMDA S-KONVEKSLİK YARDIMIYLA BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLERİN ELDE EDİLMESİ

Yasemin PRISTUPA

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç.Dr. Gültekin TINAZTEPE

Ocak 2025, 43 sayfa

Bu tezde temel olarak ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için literatürde ifade edilen Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler kullanılarak özel fonksiyonlarla ilgili eşitsizlikler elde edilmesi amaçlanmıştır. Çalışmada önce ikinci anlamda s-konveks fonksiyonların bazı özellikleri ve üreteç fonksiyonlar kullanılarak yeni ikinci anlamda s-konveks fonksiyon örnekleri elde edilmiştir. Daha sonra bu fonksiyonlar, s-konveks fonksiyonlar için literatürde verilen Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler kullanılarak, içlerinde gamma, beta, digamma başta olmak üzere, tam olmayan gamma ve beta, hipergeometrik fonksiyonlar, Gauss hata fonksiyonu, üstel integral ve Dawson integral fonksiyonu gibi fonksiyonların bulunduğu bazı özel fonksiyonlarla ilgili eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca literatürde s-konveks fonksiyonlar için ifade edilmiş Hermite-Hadamard tipi olmayan eşitsizliklerin de kullanımıyla integralle tanımlanmayan içlerinde Riemann-Zeta fonksiyonun bulunduğu bazı fonksiyonlarla ilgili bulgular da sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Beta Fonksiyonu, Digamma Fonksiyonu, Gamma Fonksiyonu, Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler, İkinci Anlamda s-konveks Fonksiyon.

JÜRİ: Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ABSTRACT

OBTAINING INEQUALITIES RELATED TO SOME SPECIAL FUNCTIONS WITH THE HELP OF S-CONVEX CONVEXITY IN THE 2ND SENSE

Yasemin PRISTUPA

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE

January 2025, 43 pages

In this thesis, it is aimed to obtain inequalities related to special functions by using Hermite-Hadamard type inequalities expressed in the literature for s-convex functions in the second sense. Firstly, some properties of s-convex functions in the second sense and new examples of s-convex functions in the second sense are obtained by using generating functions. Then, using Hermite-Hadamard type inequalities given in the literature for s-convex functions, inequalities are obtained for some special functions including gamma, beta, digamma, incomplete gamma and beta, hypergeometric functions, Gaussian error function, exponential integral and Dawson integral function. In addition, by using non-Hermite-Hadamard type inequalities expressed in the literature for s-convex functions, results are presented for some functions not defined by integration, including the Riemann-Zeta function.

KEYWORDS: Beta function, Digamma function, Gamma function, Hermite-Hadamard type inequalities, s-convex function in the second sense.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Assoc. Prof. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ÖNSÖZ

Bu tezin konusunun 2. anlamda s-konvekslik yardımıyla bazı özel fonksiyonlar ile ilgili eşitsizliklerin elde edilmesi olmasındaki en büyük etmen daha önce bu alanda bir araştırma yapılmamış olmasıdır. Özel fonksiyonların eşitsizlikle ifade edilen özelliklerinin açığa çıkarması bilimde ve teknolojide önemli ölçüde etkiye sahip olacaktır.

Bu tez, Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma, Sonuçlar olmak üzere beş bölümden oluşur.

Giriş bölümünde konuyla ilgili ön bilgiler verilip çalışmanın amacı ve kapsamı açıklanmıştır.

Kaynak Taraması bölümünde bu tezde kullanılan temel kavramlar ve özellikler literatür taraması ile birlikte verilmiştir. İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar, s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler, s-konveks fonsiyonlar için Hermite-Hadamard tipi olmayan eşitsizlikler ve bazı özel fonksiyonlar ile ilgili temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde, s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler ve s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli olmayan bazı eşitsizlikler verilmiş ve bu eşitsizliklerde s-konveks fonksiyon örnekleri yerine konularak integralin sıra koruma özelliği kullanılarak eşitsizliklerin uygun bir aralık için her iki tarafının integrali alınması metoduyla özel fonsiyonlarla ilgili yeni eşitsizlikler elde edileceği belirtilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde, tez çalışmasında elde edilen sonuçlar verilmiştir. s-konveks fonksiyonların ilgili özellikleri kullanılarak yeni s- konveks fonksiyon örnekleri elde edilmiş ve bu örneklerin literatürde yer alan Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerde kullanılması ile genellikle integralle ifade edilebilen özel fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilmiştir. Örneklerin Hermite-Hadamard tipi olmayan eşitsizliklerle de integralle elde edilemeyen bazı özel fonksiyonlarla ilgili sonuçlar elde edilebileceği gösterilmiştir.

Sonuç kısmında tezdeki bulguların özeti ve önemi belirtilmiştir.

Yüksek lisans eğitimim boyunca ve tez çalışmamda engin bilgileriyle bana ışık tutup her zaman destek olan sayın danışman hocam Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE'ye teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Son teşekkürüm hayatım boyunca desteklerini hissettiğim her anımda yanımda olan

aileme... Her zaman yanımda olan, güç kaynağım sevgili eşim Sergei PRISTUPA'ya, bu günlere gelmemde büyük emeği olan her zaman arkamda olan, canım annem Göyçek DURMUŞ'a, tüm eğitim hayatım boyunca bana yol gösteren, hep yanımda olan sevgili abilerim Mustafa DURMUŞ, Musa Çelebi DURMUŞ ve kardeşim Nesrin DURMUŞ'a, bugün bedenen yanımda olamasa da her an yanımda hissettiğim, bana bir insanın hayatı nasıl yaşaması gerektiğini öğreten ve tüm başarılarımı uğruna adadığım canım babam Remzi DURMUŞ'a teşekkür ederim. Yüksek lisans tezimi sevgili aileme ithaf ediyorum...

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
AKADEMİK BEYAN vi
SİMGELER VE KISALTMALAR vii
ŞEKİLLER DİZİNİ viii
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK TARAMASI 4
2.1. İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar 4
2.2. s-konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tip Eşitsizlikler 6
2.3. s-konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Olmayan Bazı Eşitsizlikler 9
2.4. Bazı Özel Fonksiyonlar 10
3. MATERYAL VE METOT 14
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 15
4.1. Yeni s-konveks Fonksiyon Örnekleri 15
4.2. Özel Fonksiyonlarla İlgili Sonuçlar 19
5. SONUÇLAR 40
6. KAYNAKLAR 41
ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "2. Anlamda s-konvekslik Yardımıyla Bazı Özel Fonksiyonlar İle İlgili Eşitsizliklerin Elde Edilmesi" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

...../...../20.....

Yasemin PRISTUPA

İmza

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{++}$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu Öklit Uzayı
I^o	: I kümesinin içi
$L[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
$\Gamma(x)$	: Gamma fonksiyonu
$\beta(x,y)$	: Beta fonksiyonu
$\beta_\theta\,(x,y)$	: Tam olmayan beta fonksiyonu
$\Gamma(x,y)$	: Tam olmayan gamma fonksiyonu
$\psi(x)$	: Digamma fonksiyonu
$\mathrm{Ei}(x)$	: Üstel integral fonksiyonu
$E_n(x)$	: Genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonu
$\mathrm{erf}(x)$	: Gauss hata fonksiyonu
${}_2F_1(\beta,\gamma;\eta;z)$	: Hipergeometrik fonksiyon
${}_pF_q(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;z)$	: Genelleştirilşmiş hipergeometrik fonksiyon
$\zeta(x)$	: Riemann Zeta fonksiyonu
$Shi(x)$	: Hiperbolik sinüs integral fonksiyonu
$Chi(x)$	: Hiperbolik kosinüs integral fonksiyonu
$F(x)$	: Dawson integral fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 $h(x) = x^s e^{x^2}$ fonksiyonunun bazı s değerleri için grafiği 16
Şekil 4.2 $h(x) = \frac{e^x}{x+1} - 1$ fonksiyonunun grafiği 17
Şekil 4.3 Bazı a, b ve s değerleri için $k(x)$ fonksiyonları 18

1. GİRİŞ

Matematiksel analiz ve optimizasyon teorisi, günümüz bilim ve mühendislik disiplinlerinin temellerinden biridir. Bu teorinin önemli bileşenlerinden biri de konvekslik kavramıdır. Konvekslik, bir fonksiyonun davranışını ve onun en küçük (veya en büyük) değerlerini analiz etmeyi kolaylaştıran güçlü bir araçtır. Konveks fonksiyonların özel yapısı ve özellikleri, matematiksel modelleme, optimizasyon, ekonomi ve mühendislik gibi pek çok alanda çözüm yöntemlerinin etkinliğini artırmak için kullanılır.

Şimdi konveks küme ve konveks fonksiyon kavramını hatırlayalım.

$C \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\forall x, y \in C$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in C$$

ise C ye konveks (dışbükey) bir küme denir.

Konveks kümeyi sezgisel bir tanımla ifade etmek gerekirse örneğin bir daire, konveks bir kümedir. Çünkü daire içerisindeki herhangi iki nokta seçildiğinde, bu iki nokta arasındaki doğru parçası daima dairenin içinde kalır.

$C \subset \mathbb{R}^n$ ve C konveks bir küme ve $f : C \to \mathbb{R}$ olsun. $\forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{1.1}$$

ise f ye konveks fonksiyon (eşitsizliğin tersine olması durumunda konkav fonksiyon) denir. Bu çalışma boyunca bu tanımla verilen konveks fonksiyon için klasik konveks fonksiyon ifadesi kullanılacaktır.

Geometrik anlamda, gerçek değerli bir fonksiyona, fonksiyonun grafiğindeki herhangi iki ayrı nokta arasındaki doğru parçası , iki nokta arasındaki grafiğin üstünde veya üzerinde yer alıyorsa konveks fonksiyon denir. Basitçe ifade etmek gerekirse, konveks bir fonksiyon grafiği bir fincan şeklindedir.

Görüldüğü üzere konveks fonksiyonlar eşitsizlik aracılığıyla tanımlanır. Aynı zamanda konveks fonsiyonlarla ilgili karakterizasyonlardan bir tanesi fonksiyonun integrali ile ilgili bazı eşitsizlikleri sağlamasıdır. Bunların arasında literatürde en çok çalışma yapılanı Hermite-Hadamard Eşitsizliğidir.

I bir reel sayı olmak üzere $f : I \to R$ fonksiyonu konveks ise $a, b \in I$ ve $a < b$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

sağlanır. Bu eşitsizliğe Hermite-Hadamard Eşitsizliği denir. Bu eşitsizlik fonksiyonun bir aralıktaki belirli integral ortalamasının, integral sınırlarının fonksiyon altındaki görüntülerinin ortalaması ile integral sınırlarının ortalamasının fonksiyon altındaki görüntüsü arasında kaldığını ifade eder. Literatürde eşitsizliğin sol iki terim arasındaki parçası Hermite-Hadamard Eşitsizliği'nin sol parçası sağ iki terim arasındaki parçası ise Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin sağ parçası olarak ayrıca isimlendirilmiştir.

Konveks fonksiyonların son yıllarda bir çok genelleştirmesi yapılmıştır. p konveks, B konveks, B^{-1} konveks, gibi fonksiyonlar literatürde sıkça rastlanan konvekslik genelleştirmelerindendir (Kemali vd. 2015; Sezer vd. 2021). s-konvekslik de son zamanlarda bir çok araştırmacının ilgilendiği bir konvekslik türüdür. s konvekslik kavramı ilk kez Orlicz (1961) tarafından tanımlanmış, daha sonra Breckner (1978) tarafından ikinci anlamda s konveks fonksiyon tanımı verilmiştir. Kemali vd. (2021) tarafından üçüncü anlamda ve Eken vd. (2021) tarafından dördüncü anlamda s konveks fonksiyon tanımları verilmiştir. Bu fonksiyonlar genel olarak (1.1) eşitsizliğinde sağ veya sol tarafta α ve $1-\alpha$ katsayılarının bir s parametresi yardımıyla elde edilmektedir. Bu çalışmaya temel olan ikinci anlamda s-konveks fonksiyon tanımı aşağıdaki gibi verilir:

$s \in (0,1]$ ve $I \subset \mathbb{R}_+$ bir sayı aralığı olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ verilsin. Eğer her $u, v \in I$ ile $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha^s f(u) + (1-\alpha)^s f(v)$$

oluyorsa f fonksiyonu ikinci anlamda s-konvekstir denir. Bu tanımda s yerine $\frac{1}{s}$ olarak değiştirilirse dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Klasik konveks fonksiyonların sahip olduğu özellikler bu konveks fonsiyon tipleri için araştırılmıştır. Bunlar arasında en çok çalışılanlardan biri Hermite-Hadamard eşitsizliği olmuştur. Birçok araştırmacı tarafından farklı konvekslik türleri için bu eşitsizlik ifade edilmiştir. Bu türde en çok çalışma ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için yapılmıştır.

Bu bağlamda Dragomir ve Fitzpatrick (1999) ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliğini ifade etmiştir. Sonraki araştırmacılar birinci veya ikinci mertebeden türevi ve bu türevlerin mutlak değerinin bir kuvveti s-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin sağ veya sol parçası ile ilgili eşitsizlikler ortaya koymuştur (Dragomir vd. 1999; Hussain vd. 2009; Alomari vd. 2010,2011;

Özdemir vd. 2013; Sarıkaya vd. 2015; Yıldız vd. 2016; Khan vd. 2017; Özcan vd. 2019). Ayrıca s-konveks fonksiyonların birbiriyle veya klasik konveks olan fonksiyonlarla çarpımı olarak ifade edilen fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi olarak adlandırılan bazı eşitsizlikler sunulmuştur (Kırmacı vd. 2007). Literatürde s-konveks fonksiyonlar için elde edilmiş Hermite-Hadamard tipi haricinde birçok eşitsizlik vardır. (Sarıkaya vd. 2010; Pinheiro 2008; Chen vd 2022)

s-konveks fonksiyonlar için ifade edilen Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler incelendiğinde uygulama olarak çoğunlukla iki sayının ortalamaları (aritmetik, geometrik vb) veya fonksiyonun numerik integrasyonu ile ilgili bazı sonuçlar görülmektedir. Bütün bu çalışmalar integral içeren bir eşitsizlikle ilgili olduğundan integralle ifade edilebilen özel fonksiyonların eşitsizliklerle gösterilebilecek özellikleri birer uygulama olarak yapılabilir. Bu bağlamda literatürde bir çalışma yapılmadığı gözlemlenmiştir. Bu tez çalışmasında önce ikinci anlamda s-konveks fonksiyon örnekleri elde edilecek daha sonra bu örnekler literatürde s-konveks fonksiyonlar için verilen Hermite-Hadamard Eşitsizliği ile ilgili sonuçlar kullanılarak Gamma, Beta, Tam Olmayan Beta, Digamma(Psi), Üstel İntegral, Genelleştirilmiş Üstel İntegral, Gauss Hata, Hipergeometrik, Genelleştirilmiş Hipergeometrik, Hiperbolik Sinüs İntegral, Hipebolik Kosinüs İntegral, Dawson İntegral Fonksiyonu gibi özel fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilecektir. Ayrıca bu çalışmada s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi olmayan bazı eşitsizlik türleri için de integralle ifade edilmeyen Riemann-Zeta fonksiyonu gibi önemli fonksiyon çeşitlerinin elde edilmesine dair sonuçlar sunulacaktır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu kısımda ikinci anlamda s-konveks fonksiyon tanımı ve özellikleri verilecek, daha sonra bu fonksiyonlar için literatürde elde edilen Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler sunulacak, ayrıca bulgular kısmında rastlanılacak bazı özel fonksiyon tanımları verilecektir.

2.1. İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar

İkinci anlamda s konveks fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1. *(Breckner 1978)* $s \in (0,1]$ *ve* $I \subset \mathbb{R}_+$ *bir aralık olmak üzere* $f : I \to \mathbb{R}$ *verilsin. Eğer her* $u, v \in I$ *ile* $\alpha + \beta = 1$ *koşulunu sağlayan her* $\alpha, \beta \geq 0$ *için*

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

oluyorsa f *fonksiyonu ikinci anlamda s-konvekstir denir.*

İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar kümesi K_s^2 ile gösterilir. $s = 1$ durumu klasik konvekslik tanımına karşılık gelir. Dolayısıyla s-konvekslik klasik konveksliğin bir genellemesidir.

Bundan sonra tez boyunca s konveks fonksiyon denildiğinde ikinci anlamda s konveks fonksiyon kastedilecektir. Ayrıca tez boyunca özellikle belirtilmediği müddetçe s, (0,1] aralığında bir reel sayı ve I'da bir reel sayı aralığı olarak kabul edilecektir.

Teorem 2.2. *(Hudzik ve Maligranda 1994)* $f : I \to \mathbb{R}$ *bir s-konveks fonksiyon ise her* $x \in I$ *için* $f(x) \geq 0$ *olur.*

Literatürde rastlanılan görebildiğimiz kadarıyla tek s-konveks fonksiyon örneği aşağıdaki parçalı fonksiyondur.

Örnek 2.3. *(Dragomir 1999)*$a, b, c \in \mathbb{R}$ *olsun.* $u \in \mathbb{R}_+$ *tanımlanan*

$$f(u) = \begin{cases} a & , \quad u = 0 \text{ ise} \\ bu^s + c & , \quad u > 0 \text{ ise} \end{cases} \tag{2.1}$$

$b \geq 0$ *ve* $0 \leq c \leq a$ *ise* $f \in K_s^2$ *dir.*

Bu örnekte $s = 1$ hariç herbir s değeri için elde edilen f fonksiyonunun aynı zamanda klasik konkav fonksiyon olduğu görülür. Bulgular kısmında hem s-konveks hem konveks olan fonksiyonlara örnekler verilecektir. Bulgular kısmında çokça kullanılacak $f(x) = x^s$'in $\mathbb{R}_+$'de örneğe göre s-konveks olduğu açıktır.

Şimdi de s konveks fonksiyonlarla ilgili bazı özelliklere bakalım. Bunun için önce φ-fonksiyon tanımını verelim.

Tanım 2.4. *(Orlicz 1961)* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *ile verilen fonksiyon azalmayan, sürekli,* $f(0) = 0$ *ve* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *koşulunu sağlıyorsa* φ*-fonksiyon olarak adlandırılır.*

Şimdi de yeni s konveks fonksiyonlar elde etmemize olanak sağlayacak bir teoremi ifade edelim.

Teorem 2.5. *(Hudzik ve Maligranda 1994)* $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *birer* φ*-fonksiyon olmak üzere* f*, azalmayan s-konveks bir fonksiyon ve* g *de konveks bir fonksiyon ise* $f \circ g$ *bir s-konveks fonksiyondur.*

Literatürde Teorem 2.5'ten farklı olarak tek ve çift katlı integral yardımıyla tanımlanan iki üreteç fonksiyon yer almaktadır.

Teorem 2.6. *(Dragomir ve Fitzpatrick 1999)* f, $[a, b]$ *aralığında tanımlı bir s-konveks fonksiyon olsun ve* $t \in [0, 1]$ *için*

$$k(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(tx + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) dx$$

verilsin. k *fonksiyonu da s-konvekstir ve* $t \in [0, 1]$ *için*

$$k(t) \geq 2^{s-1} f((a+b)/2). \tag{2.2}$$

Teorem 2.7. *(Dragomir ve Fitzpatrick 1999)* f, $[a, b]$ *aralığında s-konveks bir fonksiyon olsun ve* $t \in [0, 1]$ *için*

$$l(t) = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f(tx + (1-t)y)\, dxdy$$

tanımlansın bu durumda $l(t)$*'de s-konvekstir ve*

$$2^{1-s} l(t) \geq \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f(\frac{x+y}{2}) dxdy.$$

Literatürde ikinci anlamda s konveks fonksiyon tanımının da genişlemeleri sunulmuştur. Bunlardan bir tanesi de koordinata göre s konveks fonksiyon kavramıdır.

Tanım 2.8. *(Alomari ve Darus 2008)* $0 < a < b$ *and* $0 < c < d$ *ve* $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ *olmak üzere* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu verilsin. Belirli* $y \in [c,d]$ *değeri ve her* $x \in [a,b]$ *için* $f_y(x) = f(x,y)$ *ve belirli* $x \in [a,b]$ *değeri ve her* $y \in [c,d]$ *için* $f_x(y) = f(y)$ *şeklinde tanımlanan fonksiyonlar her* $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ *için s-konveks oluyorsa f' ye koordinata göre s-konveks denir.*

2.2. s-konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tip Eşitsizlikler

Literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliğinin s-konveks fonksiyonlar için elde edilmesi birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmaların büyük bir çoğunluğunda Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ ve sol parçaları için daha ince eşitsizlikler ortaya konmuştur. s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin tamamı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.9. *(Dragomir 1999)* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *ve* $a < b$ *olsun.* f*,* $[a,b]$ *üzerinde s-konveks bir fonksiyon ise*

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{2.3}$$

olur.

Yukarıdaki eşitsizliğe benzer fakat integralin parçalandığı durum için bir eşitsizlik aşağıda sunulmuştur.

Teorem 2.10. *(Sarıkaya vd. 2022)* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *bir s-konveks fonksiyon ve* $a < b$ *olmak üzere* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *olsun. Eğer* $f \in L[a,b]$ *ve* $x \in (a,b)$ *ise*

$$\begin{aligned} 2^{s-1}\left(f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f\left(\frac{b+x}{2}\right)\right) &\leq \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt + \frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)dt \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)+2f(x)}{s+1}. \end{aligned}$$

Aşağıda sırasıyla türevinin ve ikinci türevinin mutlak değeri s-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ parçası ile ilgili iki sonuç aşağıda sunulmuştur.

Teorem 2.11. *(Alomari vd. 2011) f, $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ de türevlenebilir ve türevi (a,b) de integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$, s-konveks ise*

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{(2^{2-s}+1)(b-a)}{4(s+1)(s+2)} \left[|f'(a)| + |f'(b)|\right].$$

Teorem 2.12. *(Özdemir vd. 2013) $I \subset \mathbb{R}_+$ bir reel sayı aralığı, $a,b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$, I°'da iki kez türevlenebilir ve ikinci türevi $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. $|f''|$, I'da s-konveks ise*

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)} \times \left\{ |f''(a)| + (s+1)(s+2)\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |f''(b)| \right\}.$$

Yukarıdakilere benzer bir sonucu türevinin mutlak değeri s-konveks ve türevi sınırlı fonksiyonlar için Alomari vd. (2010) ifade etmiştir.

Teorem 2.13. *(Alomari vd. 2010) $I \subset \mathbb{R}_+$, $a,b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$, I°'da türevlenebilir ve türevi $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ve $|f'|$, I'da s-konveks ise*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \right| \leq \frac{M}{b-a} \cdot \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{s+1} \right]. \tag{2.4}$$

Yukarıda görüldüğü üzere yazarlar sonuçlarda her ne kadar türevinin ve ikinci türevinin mutlak değerinin s-konveks olma koşulunu ileri sürmüşlerse de Teorem 2.2'e göre mutlak değerleri şartına gerek yoktur. Burada sonuçların orijinalini göstermek adına direkt olduğu gibi verilmiştir.

Aşağıda verilen iki teorem s-konveks iki fonksiyonun çarpımı ve biri s-konveks diğeri klasik konveks iki fonksiyonun çarpımı olarak verilen fonksiyonlar ile ilgili literatürde Hermite-Hadamard tipi eşitsizlik başlığı altında sunulan iki sonucu içermektedir

Teorem 2.14. *(Kırmacı vd. 2007) f ve g, $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$'de tanımlı çarpımları integrallenebilir iki fonksiyon ve $s_1, s_2 \in (0,1)$ olsun. f, s_1-konveks ve g, s_2-konveks fonksiyon ise*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \frac{1}{s_1+s_2+1}\left[M(a,b) + \frac{s_1 s_2}{s_1+s_2}\beta(s_1,s_2)N(a,b) \right].$$

Burada $M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$ ve $N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$'dir.

Teorem 2.15. *(Kırmacı vd. 2007)* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *ve* $a < b$ *olmak üzere* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ile verilen fonksiyonlar için* fg *integrallenebilir,* f *pozitif değerli ve konveks,* g *s-konveks ise*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{s+2}M(a,b) + \frac{1}{(s+1)(s+2)}N(a,b).$$

Burada $M(a, b)$ *ve* $N(a, b)$ *Teorem 2.14'de tanımlandığı gibidir.*

Yukarıdaki sonuçlara benzer fakat integrallenebilir bir fonksiyonla, türevi s-konveks olan fonksiyonun çarpımı için aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem 2.16. *(Yıldız 2016)* $I \subset \mathbb{R}_+$, $a, b \in I$ *ve* $a < b$ *olmak üzere* $f : I \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* I°*'da türevlenebilir ve* $g : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ *ile* f', $[a, b]$ *aralığında integrallenebilir olsun.* $|f'|$, $[a, b]$*'de s-konveks ise*

$$w(x, y; s) = (2^{s+2} - (s + 3))|f'(x)| + (s + 1)|f'(y)|$$

olmak üzere

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2^{s+2}(s+1)(s+2)}\left(\|g\|_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty} w(a, b; s) + \|g\|_{[\frac{a+b}{2},b],\infty} w(b, a; s)\right)$$

Burada

$$\|g\|_{[\frac{a+b}{2},b],\infty} = \sup_{x\in[\frac{a+b}{2},b]}\{g(x)\}.$$

Khan vd. (2017), ikinci türevinin birden büyük bir kuvveti s-konveks olan fonksiyonlarla ilgili Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafına benzer aşağıdaki eşitsizliği sunmuştur.

Teorem 2.17. $p, q \in (1, \infty)$, $I \subset \mathbb{R}_+$, $a, b \in I$ *ve* $a < b$ *olmak üzere* $f : I \to \mathbb{R}$, I°*'da iki kez türevlenebilir ve ikinci türevi* $[a, b]$ *aralığında integrallenebilir olsun.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *ve* $|f''|^q$, I*'da s-konveks ise* $x \in [a, b]$ *için*

$$\left|\frac{[(x-a)^2 - (b-x)^2]f'(x) + 2f(b)(b-x) + 2f(a)(x-a)}{2(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \left(\frac{1}{2}\beta(\frac{1}{2}, p+1)\right)^{1/p} \frac{(x-a)^3\left[|f''^q + |f''^q\right]^{1/q} + (b-x)^3\left[|f''^q + |f''^q\right]^{1/q}}{2(s+1)^{1/q}(b-a)}.$$

Alomari ve Darus (2008) tarafından koordinata göre s-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard tip eşitsizliği vermiştir.

Teorem 2.18. Δ, *Tanım 2.8'daki gibi verilsin.* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *koordinata göre s-konveks ise*

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{2(s+1)} \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,c)\,dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,d)\,dx + \frac{1}{d-c}\int_c^d f(a,y)\,dy + \frac{1}{d-c}\int_c^d f(b,y)\,dy\right]$$

2.3. s-konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Olmayan Bazı Eşitsizlikler

Çalışmamızda s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi olmayan eşitsizlikler yardımıyla da özel fonksiyonlarla ilgili bulgular elde edilebileceğini göstermek amacıyla bazı sonuçları kullanacağız.

Bir önceki altbölümde sunulan eşitsizlikler haricinde s-konveks fonksiyonlar için ifade edilen bir eşitsizlik de Simpson eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik aşağıdaki gibi verilir:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında 4. mertebeden sürekli türevlenebilen bir fonksiyon ve $\left\|f^{(4)}\right\|_\infty = \sup_{x\in(a,b)} \left|f^{(4)}(x)\right| < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{1}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty (b-a)^4.$$

Türevi s-konveks fonksiyonlar için bu eşitsizliği, Sarıkaya vd. (2010) aşağıdaki şekilde belirtmiştir.

Teorem 2.19. $a < b$ *olmak üzere* $f : [a,b] \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* (a,b)*'de türevlenebilir ve türevi de* $[a,b]$ *aralığında integrallenebilir olsun.*

$$m(s) = \frac{(s-4)6^{s+1} + 2\times 5^{s+2} - 2\times 3^{s+2} + 2}{6^{s+2}(s+1)(s+2)}$$

olarak tanımlansın. Eğer $|f'|$, $[a,b]$*'de s-konveks bir fonksiyon ise*

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a)m(s)\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right].$$

Pinheiro (2008) tarafından aşağıdaki Popoviciu tipi eşitsizliği sunulmuştur.

Teorem 2.20. *$a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$ ve f, $[a, b]$ üzerinde ikinci anlamda s-konveks bir fonksiyon olsun. $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ ise*

$$2^{s-1}\frac{3^s-1}{3^s}\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_1}{2}\right)\right] \leq f(x_1)+f(x_2)+f(x_3) - f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right).$$

olur.

Teorem 2.21. *(Chen vd. 2022) $a > 0$ olmak üzere $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, a]$ verilsin. $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sayıları, $i = 1, 2, \ldots, n$ için*

$$\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

şeklinde tanımlanan sıfırdan farklı $\bar{x}_n$ sayısı için $x_i \leq \bar{x}_n$ koşulunu sağlasınlar. f, $[0, a]$ üzerinde ikinci anlamda s-konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{x_i}{\bar{x}_n}\right)^s f(\bar{x}_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i \left(1-\frac{x_i}{\bar{x}_n}\right)^s f(0).$$

olur.

2.4. Bazı Özel Fonksiyonlar

Bulgular kısmında karşımıza çıkacak bazı özel fonksiyonların tanımları burada verilecektir.

$z \in \mathbb{C}$ ve $\operatorname{Re} z > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

ile verilen fonksiyon **Gamma fonksiyonu** olarak adlandırılır. Ayrıca $x \in \mathbb{R}$ ve $x > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z, x) = \int_0^x e^{-t} t^{z-1} dt$$

ile verilen fonksiyon **Tam olmayan gamma fonksiyonu** olarak adlandırılır.

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $x > 0, y > 0$ olsun.

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

ile verilen fonksiyon **Beta fonksiyonu** olarak adlandırılır.

Bulgularda verilen ispatlarda Beta dönüşümünün bazı özellikleri kullanıacaktır. Beta fonksiyonunun, simetri özelliğine sahip olduğu açıktır.

$$\beta(x,y) = \beta(y,x)$$

Beta ve Gamma fonksiyonları arasında aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Beta dönüşümünün aşağıdaki özellikleri de geçerlidir:

$$\beta(x+1,y) + \beta(x,y+1) = \beta(x,y).$$

$$\beta(x,y+1) = \frac{y}{x}\beta(x+1,y) = \frac{y}{x+y}\beta(x,y).$$

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $x > 0, y > 0$ olsun. $0 < \theta < 1$ olmak üzere

$$\beta_\theta(x,y) = \int_0^\theta t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

fonksiyonu **tam olmayan beta fonksiyonu** olarak tanımlanır.

Gamma fonksiyonu ile yakından ilişkili olan başka bir özel fonksiyon **Digamma (Psi)** $\psi(z)$ **fonksiyonu**

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

ile tanımlanır.

Bu fonksiyon aşağıdaki integral göstermine sahiptir (Dragomir vd. 1999):

$$\psi(z) = \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-z}dz - \gamma$$

Burada γ, Euler-Mascheroni sabiti olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right] \approx 0.577215\ldots .$$

$x \in \mathbb{R}$ ve $x > 0$ olmak üzere

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt$$

ile verilen integrale **üstel integral fonksiyonu** denir.

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon **genelleşmiş üstel integral fonksiyonudur** ve $E_1(x) = -\operatorname{Ei}(-x)$ ilişkisi mevcuttur.

x pozitif reel sayı olsun.

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

ile verilen fonksiyon **Gauss hata fonksiyonu** olarak adlandırılır.

$\beta, \gamma, \eta \in \mathbb{R}$ olmak üzere η sıfır ya da negatif tamsayı olmasın. $(\cdot)_n$ Pochhammer sembolü yani

$$(\mu)_n = \mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n-1)$$

olmak üzere $z \in \mathbb{C}$ için $|z| \leq 1$ için

$${}_2F_1(\beta, \gamma; \eta; z) = 1 + \frac{\beta\gamma}{\eta} z + \frac{\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)}{\eta(\eta+1)} \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{(\beta)_n (\gamma)_n}{(\eta)_n} \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona tanımlı **hipergeometrik fonksiyon** denir. Seri $|z| < 1$ için yakınsar. $\beta + \gamma - \eta < 0$ durumunda $|z| = 1$ üzerinde yakınsar. Birim disk dışındaki z noktalarında fonksiyon değeri analitik devam ile hesaplanabilir.

Bu fonksiyonun daha genel versiyonu aşağıdaki gibi verilir.

p, q pozitif sayılar, $a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q \in \mathbb{R}$ olmak üzere $b_1, ..., b_q$ den hiç biri negatif bir tam sayı ya da sıfır olmasın ve $z \in \mathbb{C}$ olsun.

$$1 + \frac{a_1 a_2 \cdots a_p}{b_1 b_2 \cdots b_q} z + \frac{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)\cdots a_p(a_p+1)}{b_1(b_1+1)b_2(b_2+1)\cdots b_q(b_q+1)} \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \cdots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

serisinde $(\cdot)_n$ Pochhammer sembolü yani

$$(x)_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

olmak üzere, seri **genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon** olarak adlandırılır ve eğer yakınsaksa ${}_pF_q(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; z)$ ile gösterilir.

$p \leq q$ durumunda ${}_pF_q$ tüm karmaşık düzlemde yakınsar. $p = q+1$ durumunda $|z| < 1$ birim diskinde yakınsar. Ayrıca $\sum_{i=1}^{q} b_i - \sum_{i=1}^{p} a_i > 0$ ise $|z| = 1$ için yakınsar. $p > q$ durumunda, yalnızca $z = 0$ için yakınsar veya $a_1, ..., a_p$'den herhangi birinin negatif bir tam sayı veya sıfır olması koşuluyla tüm karmaşık düzlemde yakınsar.

$r \in \mathbb{C}$ ve $\operatorname{Re} r > 1$ olmak üzere

$$\zeta(r) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r}$$

ile verilen seri toplamına **Riemann Zeta Fonksiyonu** $\zeta(r)$ denir.

$x \in \mathbb{R}_{++}$ olmak üzere

$$Shi(x) = \int_0^x \frac{\sinh t}{t} dt$$

ile verilen integral **hiperbolik sinüs integral fonksiyonu** olarak adlandırılır.

$x \in \mathbb{R}_{++}$ olmak üzere

$$Chi(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cosh t - 1}{t} dt$$

ile verilen integral **hiperbolik kosinüs integral fonksiyonunu** belirtir.

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x \frac{e^{t^2}}{t} dt$$

ile verilen fonksiyon **Dawson integral fonksiyonu** olarak adlandırılır

3. MATERYAL VE METOT

"Kaynak Taraması" bölümü, "s-konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tip Eşitsizlikler" altbölümü ile verilen "s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Olmayan Bazı Eşitsizlikler" altbölümünde verilen eşitsizlikler çalışmanın materyalini oluşturacaktır. Bu eşitsizliklerde "İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar" bölümünde verilen s-konveks fonksiyon örnekleri yerine konularak integralin sıra koruma özelliği kullanılarak eşitsizliklerin uygun bir aralık için her iki tarafının integrali alınacaktır. Bu metodla özel fonsiyonlarla ilgili eşitsizlikler elde edilecektir. İntegrallerin hesaplanmasında Wolfram Research Inc. tarafından geliştirilen hesap makinesi kullanılmıştır (Wolfram 2024).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde Kaynak taraması bölümünün ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar başlıklı altbölümünde sunulan s-konveks fonksiyon örneği kullanılarak, yine aynı altbölümde verilen özellikler ve üreteç fonksiyonlar yardımıyla yeni s-konveks fonksiyonlar elde edilecek, daha sonra bu fonksiyonlar, s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler ve s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip olmayan eşitsizlikler alt bölümlerinde verilen eşitsizliklerde kullanılarak özel fonksiyonları içeren sonuçlar elde edilecektir.

4.1. Yeni s-konveks Fonksiyon Örnekleri

Literatürde s-konveks fonksiyonlarla ilgili birçok eşitsizlik olmasına rağmen, Hudzik ve Maligranda (1994) tarafından Kaynak Taraması bölümünde verilen tek örnek mevcuttur. Bu alt bölümde bu örnek s-konveks fonksiyonun ilgili özellikleri ve üreteç fonksiyonlarında kullanılarak, yeni s-konveks fonksiyonları elde edilecektir. Bu yeni örneklerin bazıları klasik konveks fonksiyonlarla kıyaslamada fikir verebilmesi açısından grafiklerle de sunulacaktır.

s-konveks fonksiyonların Teorem 2.5'de verilen özellikleri kullanılarak aşağıdaki örnekler elde edilebilir.

Örnek 4.1. $h(x) = x^s e^{x^2}$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}_+$*'de s-konveks bir fonksiyondur.*

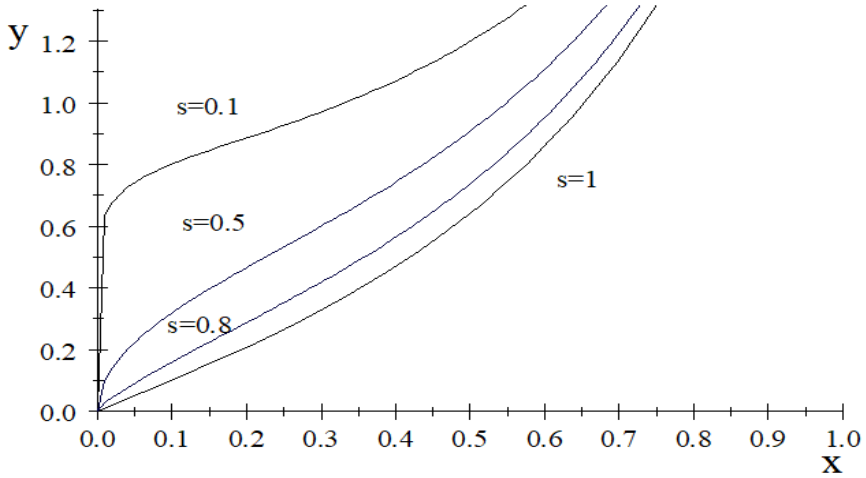
İspat $g(x) = xe^{\frac{x^2}{s}}$ alınırsa $x \in \mathbb{R}_+$ için

$$g'(x) = \frac{1}{s} e^{\frac{1}{s}x^2} \left(2x^2 + s\right) > 0$$

dolayısıyla g'nin artan ve sürekli olduğu, $g(0) = 0$ ve $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ koşullarını sağladığı, sonuç olarak g'nin φ-fonksiyon olduğu görülür. Diğer taraftan

$$g''(x) = \frac{xe^{\frac{1}{s}x^2}}{s^2} \left(4x^2 + 6s\right) > 0$$

olduğundan g'nin konveks olduğu görülür. $f(x) = x^s$'nin de φ-fonksiyon ve (2.1)'a göre s-konveks olduğu aşikar olduğundan Teorem 2.5'e göre $(f \circ g)(x) = x^s e^{x^2}$ nin s-konveks olduğu görülür. □



Şekil 4.1. $h(x) = x^s e^{x^2}$ fonksiyonunun bazı s değerleri için grafiği

Yukarıdaki fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.

Şekil 4.1.'den görüleceği üzere $s = 0.1$ durumunda elde edilen fonksiyonun 0.1-konveks fonksiyon olduğu fakat klasik konveks fonksiyon olmadığı görülmektedir. Bu örnek s-konveks olup konveks olmayan fonksiyonlara bir örnektir. Daha detaylı incelenirse 1 hariç tüm s değerleri için $h(x)$'in önce klasik konkav ve daha sonra klasik konveks olduğu görülebilir.

Örnek 4.2. $h(x) = \frac{e^x}{x+1} - 1$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}_+$*'de s-konveks bir fonksiyondur.*

İspat $g(x) = \left(\frac{e^x}{x+1} - 1\right)^{\frac{1}{s}}$ alınırsa $x \in \mathbb{R}_+$ için $\left(\frac{e^x}{x+1} - 1\right)$'in artan ve pozitif değerli olduğu dikkate alınırsa

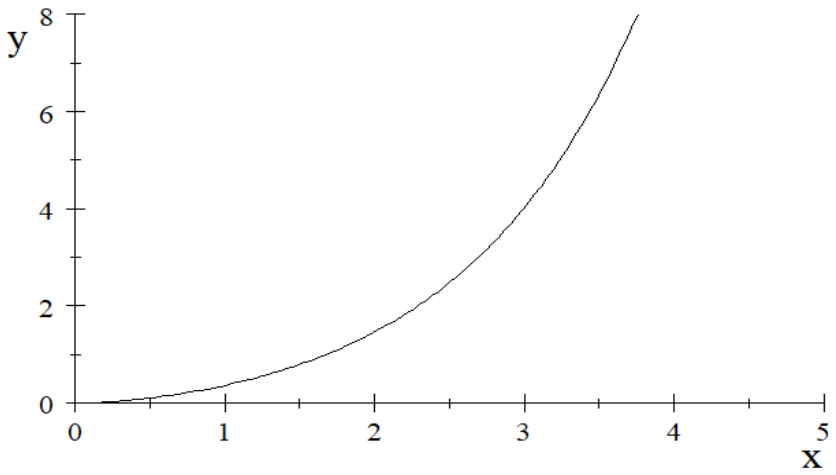
$$g'(x) = \frac{1}{s} \frac{xe^x}{(x+1)^2} \left(\frac{e^x}{x+1} - 1\right)^{\frac{1}{s}-1} > 0$$

yani g'nin artan, pozitif değerli ve sürekli olduğu, $g(0) = 0$ ve $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ koşullarını sağladığından g'nin φ-fonksiyon olduğu ortaya çıkar. Diğer taraftan

$$g''(x) = \frac{e^x}{s(x+1)^2} \left(\frac{e^x}{x+1} - 1\right)^{\frac{1}{s}-2} \left(\frac{x^2+1}{x+1} + (1-s)x\right) > 0$$

olduğundan g'nin konveks olduğu görülür. $f(x) = x^s$'nin de φ-fonksiyon ve s-konveks olduğu aşikar olduğundan Teorem 2.5'e göre $(f \circ g)(x) = \frac{e^x}{x+1} - 1$'nin s-konveks olduğu görülür. □

Yukarıda sunulan örneğin grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.2. $h(x) = \frac{e^x}{x+1} - 1$ fonksiyonunun grafiği

Şekil 4.2.' den de gözüktüğü gibi $h(x)$ fonksiyonunun her s değeri için hem s-konveks hem de klasik konveks fonksiyon olduğu görülür.

Örnek 4.3. *$a, b \in R$ ve $a < b$ olsun.*

$$k(t) = \begin{cases} \frac{1}{t(b-a)} \frac{1}{s+1} \left[\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t \right)^{s+1} - \left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} t \right)^{s+1} \right], & t \in (0,1] \\ \left(\frac{a+b}{2} \right)^s & t = 0 \end{cases}$$

fonskiyonu 2. anlamda s-konvekstir.

İspat Teorem 2.6'de $f(x) = x^s$ koyalım. Önce $t \neq 0$ durumunu inceleyelim. Bu durumda

$$k(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^s dx$$

olur. $u = tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right)$ denir ve integral dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(tx + (1-t) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^s dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} t}^{\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t} u^s \frac{du}{t} \\ &= \frac{1}{t(b-a)} \frac{1}{s+1} \left[\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t \right)^{s+1} - \left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} t \right)^{s+1} \right] \end{aligned}$$

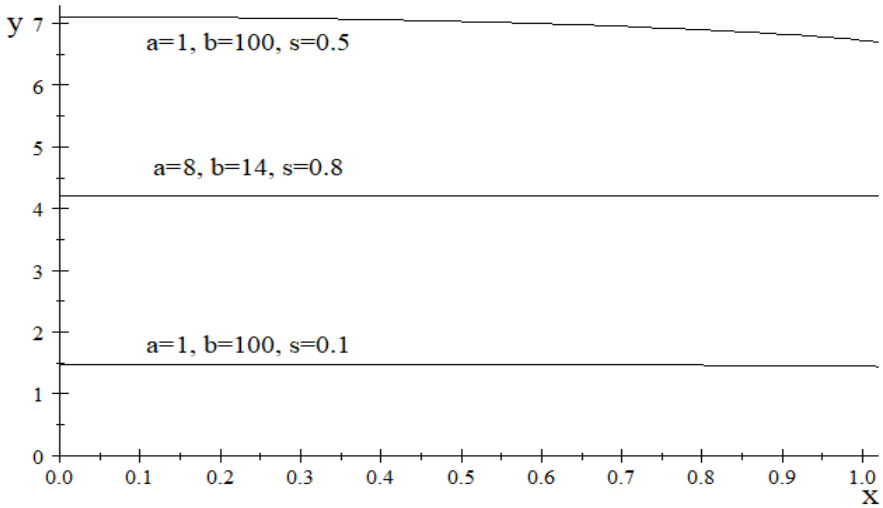
bulunur.

$t = 0$ durumunda

$$k(0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{a+b}{2}\right)^s dx$$
$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^s.$$

Her iki sonuç birleştirilirse verilen fonksiyon elde edilmiş olur. □

Şekil 4.3.'te bazı a, b ve s değerleri için $k(x)$ fonksiyonları grafikte gösterilmiştir. s'nin çok küçük değerleri veya a ve b'nin birbirine yakın değerleri için fonksiyon doğru şekline yaklaşmaktadır. Diğer taraftan aynı a ve b değerleri için s'nin değişimine göre $k(x)$'in eğrisini bir grafik üzerinde gözlemlemek zor olduğu için sadece üç durum için grafik verilmiştir.



Şekil 4.3. Bazı a, b ve s değerleri için $k(x)$ fonksiyonları

Matematik çizim programları ile yapılan denemelerden, $k(x)$'in klasik konkav bir fonksiyon şekline uygun bir eğriye sahip olduğu sezgisel olarak söylenebilir.

Örnek 4.4. *$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun.*

$$l(t) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^2}\frac{1}{t(1-t)}\frac{1}{(s+1)(s+2)} & t \in (0,1] \\ \quad \times \left(b^{s+2} + a^{s+2} - \left[(a+t(b-a))^{s+2} + (b-t(b-a))^{s+2}\right]\right), & \\ \dfrac{1}{s+1}\dfrac{b^{s+1}-a^{s+1}}{b-a}, & t = 0 \end{cases}$$

fonskiyonu s-konvekstir.

İspat Teorem 2.7'de $f(x) = x^s$ koyalım. $t \neq 0$ durumunu düşünelim

$$l(t) = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (tx + (1-t)y)^s \, dxdy$$

olur. $u = tx + (1-t)y$ denir ve integral dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
l(t) &= \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \left(\int_{ta+(1-t)y}^{tb+(1-t)y} u^s \frac{1}{t} du \right) dy \\
&= \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \frac{1}{t(s+1)} \left[(tb + (1-t)y)^{s+1} - (ta + (1-t)y)^{s+1} \right] dy \\
&= \frac{1}{t(b-a)^2} \frac{1}{s+1} \left[\int_a^b (tb + (1-t)y)^{s+1} \, dy - \int_a^b (ta + (1-t)y)^{s+1} \, dy \right] \\
&= \frac{1}{t(b-a)^2} \frac{1}{s+1} \left[\int_{a+t(b-a)}^b \frac{u^{s+1}}{1-t} dy - \int_a^{b-t(b-a)} \frac{u^{s+1}}{1-t} dy \right] \\
&= \frac{1}{(b-a)^2} \frac{1}{t(1-t)} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\
&\qquad \times \left(b^{s+2} - (a + t(b-a))^{s+2} - (b - t(b-a))^{s+2} - a^{s+2} \right) \\
&= \frac{1}{(b-a)^2} \frac{1}{t(1-t)} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\
&\qquad \times \left(b^{s+2} + a^{s+2} - \left[(a + t(b-a))^{s+2} + (b - t(b-a))^{s+2} \right] \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

$t = 0$ ise

$$\begin{aligned}
l(0) &= \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b y^s dxdy \\
&= \frac{1}{s+1} \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{b-a}.
\end{aligned}$$

□

4.2. Özel Fonksiyonlarla İlgili Sonuçlar

Literatürde yer alan s-konveks fonksiyon örneği ile önceki altbölümde elde edilen örneklerin s-konveks fonksiyonlar için ifade edilen Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerde yerine konması ve daha sonra uygun şekilde integrasyonu ile özel fonksiyonlarla ilgili sonuçlar elde edilecektir. Alanyazın incelemeleri özel fonksiyonlarla eşitsizlikler olmasına rağmen elde edilen sonuçların daha önce araştırmacılar tarafından ifade edilmediğini

göstermektedir. Buradaki bulgular, örnek fonksiyonların yerine konulacağı eşitsizliklerin Kaynak Taraması bölümündeki veriliş sırasına göre sunulmuştur.

Teorem 4.5. $x \in (0,1)$ *ise*

$$\mathrm{Ei}(\ln(x)) - \mathrm{Ei}(2\ln(x)) - \mathrm{Ei}(\ln(2-x)) + \mathrm{Ei}(2\ln(2-x)) \geq \frac{1-x}{\ln 2}.$$

İspat Örnek 4.3' da $a = 0$, $b = 1$ alalım. Bu durumda

$$k(t) = \begin{cases} -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1}}{s+1} \frac{(1-t)^{s+1} - (t+1)^{s+1}}{t} & \text{eğer} \quad 0 < t < 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{s} & \text{eğer} \quad t = 0 \end{cases}$$

olarak bulunur ve (2.2)'de yazılırsa, gerekli düzenlemelerden sonra $t \in (0,1)$ için

$$\frac{(t+1)^{s+1} - (1-t)^{s+1}}{t\,(s+1)} \geq 2^s \tag{4.1}$$

olur. (4.1)'de s'ye göre $[0,1]$ aralığında integral alınır ve

$$\int \frac{(t+1)^{s+1} - (1-t)^{s+1}}{t\,(s+1)} ds = \frac{\mathrm{Ei}((s+1)\ln(t+1)) - \mathrm{Ei}((s+1)\ln(1-t))}{t} + \mathrm{C}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{\mathrm{Ei}(\ln(1-t)) - \mathrm{Ei}(2\ln(1-t)) - \mathrm{Ei}(\ln(t+1)) + \mathrm{Ei}(2\ln(t+1))}{t} \geq \frac{1}{\ln 2}$$

elde edilir. Her iki taraf t ile genişletilit ve $x = 1 - t$ dönüşümü yapılırsa istenen sonuç elde edilmiş olur. □

Teorem 4.6. $x \in (1,2]$ *ise*

$$\frac{3}{4}\left(1 - \frac{x(2^x - 1)}{2(2x+1)}\right)\beta(x,x) \geq \beta(x,2x).$$

İspat Örnek 4.4'da $a = 0$, $b = 1$ kabul edilirse $t \in (0,1)$ için

$$l(t) = \frac{(1-t)^{s+2} + t^{s+2} - 1}{(s+1)\,(s+2)\,t\,(t-1)}$$

elde edilir.

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{x+y}{2}\right)^s dx\,dy = \frac{1}{2^s}\frac{2^{s+2}-2}{(s+1)(s+2)}$$

olduğundan Teorem 2.7'de verilen eşitsizlikte yazılırsa

$$2^{1-s}\frac{(1-t)^{s+2} + t^{s+2} - 1}{(s+1)\,(s+2)\,t\,(t-1)} \geq \frac{1}{2^s}\frac{2^{s+2}-2}{(s+1)(s+2)}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirme ve düzelemeler yapılırsa

$$\frac{(1-t)^{s+2}+t^{s+2}-1}{t\,(t-1)} \geq 2^{s+1}-1$$

elde edilir. Burada her eşitsizliğin her iki yönü $t^{s+1}\,(1-t)^{s+1}$ ile çarpılırsa

$$t^s\,(1-t)^s - t^s\,(1-t)^{2s+2} - t^{2s+2}(1-t)^s \geq (2^{s+1}-1)t^{s+1}\,(1-t)^{s+1}$$

ve her iki tarafın t'ye göre [0,1] aralığında integrali alınırsa

$$\beta(s+1,s+1) - 2\beta(s+1,2s+3) \geq (2^{s+1}-1)\beta(s+2,s+2)$$

ve burada $x = s+1$ denirse

$$\beta(x,x) - 2\beta(x,2x+1) \geq (2^x-1)\beta(x+1,x+1)$$

elde edilir. Beta fonksiyonun özelliklerinden

$$\beta(x,2x+1) = \frac{2}{3}\beta(x,2x) \text{ ve } \beta(x+1,x+1) = \frac{x}{2(2x+1)}\beta(x,x)$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\left(1 - \frac{x(2^x-1)}{2(2x+1)}\right)\beta(x,x) \geq \frac{4}{3}\beta(x,2x)$$

bulunur buradan istenen eşitlik bulunmuş olur. □

Yukarıdaki eşitsizlik $x = 2$ için eşitlik olur.

Teorem 4.7. *$x \in [0, \frac{1}{2}]$ ve $y \in (0,1)$ ise*

$$\begin{aligned} 2^{y-3}(1-2^{-y-1})(y+1)(1-2x) &\leq \eta(x,y) - \eta(1-x,y) + 2(1+y)\ln(\frac{x}{1-x}) \\ &\leq \frac{2(1-2x)}{x(1-x)}\left(1-(1-x)^{y+2}-x^{y+2}\right) \end{aligned}$$

olur. Burada $a, s \in [0,1)$ olmak üzere

$$\eta(a,s) = 2a^{1+s}(1 - {}_2F_1(1,1+s,2+s,a)).$$

İspat Örnek 4.4'de $a = 0$ ve $b = 1$ kabul edilirse

$$l(t) = \frac{(1-t)^{s+2}+t^{s+2}-1}{(s+1)\,(s+2)\,t\,(t-1)}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun $(0,1)$ aralığında s-konveks olduğu görülür. $0 < a < b < 1$ ve $a+b=1$ olacak şekilde bir $[a,b]$ için F fonksiyonunu (2.3)'de düşünelim.

$$l(a) = l(b) = \frac{1}{ab\,(s+1)\,(s+2)}\left(1 - b^{s+2} - a^{s+2}\right)$$

ve $l(\frac{1}{2}) = \frac{1-2^{-s-1}}{2^2(s+1)(s+2)}$ olacaktır.

$$Q(t) = -\frac{1}{s+1}\Big(-(1-t)^{1+s} + t^{1+s} + (1-t)^{1+s}\,{}_2F_1(1,1+s,2+s,1-t) \\ - t^{1+s}\,{}_2F_1(1,1+s,2+s,t) - (1+s)\ln(1-t) + (1+s)\ln(t)\Big)$$

olmak üzere

$$\int \frac{-1+t^{s+2}+(1-t)^{s+2}}{t(1-t)}dt = Q(t) + C$$

olduğundan ${}_2F_1(1,1+s,2+s,1-a) =_2 F_1(1,1+s,2+s,b)$ ve ${}_2F_1(1,1+s,2+s,1-b) =_2 F_1(1,1+s,2+s,a)$ olduğu dikkate alınırsa

$$Q(b) = -\frac{1}{s+1}\Big(-a^{1+s} + b^{1+s} + a^{1+s}\,{}_2F_1(1,1+s,2+s,a) \\ - b^{1+s}\,{}_2F_1(1,1+s,2+s,b) + (1+s)\ln(\frac{b}{a})\Big)$$

ve

$$Q(a) = -\frac{1}{s+1}\Big(-b^{1+s} + a^{1+s} + b^{1+s}\,{}_2F_1(1,1+s,2+s,b) \\ - a^{1+s}\,{}_2F_1(1,1+s,2+s,a) + (1+s)\ln(\frac{a}{b})\Big)$$

olacağından

$$\int_a^b \frac{(1-t)^{s+2}+t^{s+2}-1}{t\,(t-1)}dx = \frac{1}{s+1}\Big(2a^{1+s}(1 - {}_2F_1(1,1+s,2+s,a)) \\ - 2b^{1+s}(1 - {}_2F_1(1,1+s,2+s,b)) + 2(1+s)\ln(\frac{a}{b})\Big)$$

(2.3)'de yerine konur ve $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$'ler sadeleştirilirse

$$2^{s-3}(1-2^{-s-1}) \le \frac{1}{s+1}\frac{1}{b-a}\Big(2a^{1+s}(1 - {}_2F_1(1,1+s,2+s,a)) \\ - 2b^{1+s}(1 - {}_2F_1(1,1+s,2+s,b)) + 2(1+s)\ln(\frac{a}{b})\Big) \\ \le \frac{1}{s+1}\frac{2}{ab}\left(1 - b^{s+2} - a^{s+2}\right)$$

elde edilir. Burada $a = x$, $b = 1-x$ ve $s = y$ yazılır ve eşitsizlik düzenlenirse istenen sonuç elde edilir. □

Yukarıda $x = y$ ve $x \in [0, \frac{1}{2}]$ olması halinde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.8. $x \in [0, \frac{1}{2})$ *ise*

$$2^{x-3}(1-2^{-x-1})(x+1)(1-2x) \leq \eta(x,x) - \eta(1-x,x) + 2(1+x)\ln(\frac{x}{1-x}) \leq \frac{2(1-2x)}{x(1-x)}\left(1-(1-x)^{x+2}-x^{x+2}\right)$$

olur.

Teorem 4.9. $x \in [2,3]$ *ise*

$$2^{x-2} - 2^{-1} \leq \psi(x) + \gamma \leq \frac{x}{x-1} \tag{4.2}$$

olur.

İspat $t \in [0,1)$ olmak üzere (2.3)'da $a = t$, $b = 1$ ve $f(x) = x^s$ alınırsa

$$2^{s-1}\left(\frac{1+t}{2}\right)^s \leq \frac{1}{1-t}\frac{1}{s+1}.(1-t^{s+1}) \leq \frac{t^s+1}{s+1}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında t'ye göre integrali alınırsa

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (1+t)^s\,dt \leq \frac{1}{s+1}\int_0^1 \frac{1-t^{s+1}}{1-t}dt \leq \frac{1}{s+1}\int_0^1 (t^s+1)dt$$

elde edilir.

$$\int_0^1 (1+t)^s\,dt = \frac{2^{s+1}-1}{s+1} \text{ ve } \int_0^1 (t^s+1)\,dt = \frac{s+2}{s+1}$$

digamma fonksiyonun integral gösterimi kullanılır ve $\frac{1}{s+1}$'ler sadeleştirilirse

$$2^s - 2^{-1} \leq \psi(s+2) + \gamma \leq \frac{s+2}{s+1}$$

bulunur. $x = s+2$ yazılırsa $2 \leq x \leq 3$ için

$$2^{x-2} - 2^{-1} \leq \psi(x) + \gamma \leq \frac{x}{x-1}.$$

□

Sonuç 4.10. *(4.2),* $x = 3$ *için eşitliğe dönüşür.*

Teorem 4.11. $x \in [2,3]$ *ise*

$$ {}_2F_1(2-x, x-1; x; -1) - \frac{1}{x-1} \leq \psi(x) + \gamma \tag{4.3}$$

olur.

İspat $t \in [0,1)$ olmak üzere Teorem 2.10'de $a=0$, $b=1$, $x=t$ ve $f(x)=x^s$ alınır ve eşitsizlikte gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{1}{2}\left(t^s+(1+t)^s\right) \leq \frac{t^s}{s+1}+\frac{1}{s+1}\frac{1-t^{s+1}}{1-t}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafında aritmetik geometrik orta eşitsizliği uygulanırsa

$$t^{\frac{s}{2}}(1+t)^{\frac{s}{2}} \leq \frac{t^s}{s+1}+\frac{1}{s+1}\frac{1-t^{s+1}}{1-t}$$

elde edilmiş olur. Bu eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında t'ye göre integrali alınırsa

$$\frac{{}_2F_1(-s,s+1;s+2;-1)}{s+1} \leq \frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}\left(\psi\left(s+2\right)+\gamma\right)$$

elde edilir.

$${}_2F_1(-s,s+1;s+2;-1) \leq \frac{1}{(s+1)}+\left(\psi\left(s+2\right)+\gamma\right)$$

ve $x=s+2$ denirse $2 \leq x \leq 3$ için

$${}_2F_1(2-x,x-1;x;-1)-\frac{1}{x-1} \leq \psi(x)+\gamma.$$

□

Teorem 4.12. $x \in [-\ln 8, -\ln 4]$ *ise*

$$\frac{3}{16}\left(\ln(-x)-2\ln\ln 2\right)-\frac{2^{-1}-2e^x}{4\ln 2}+\frac{1}{4}\operatorname{Ei}(-\ln 4) \leq \operatorname{Ei}(x).$$

İspat Teorem 2.11'de $t \in (0,\infty)$ olmak üzere $a=0$, $b=t$, $f(x)=\frac{x^{s+1}}{s+1}$ kabul edelim. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^t \frac{x^{s+1}}{s+1}dx=\frac{t^{s+2}}{(s+1)(s+2)}$$

olur. Eşitsizlikte yerine konur ve $\frac{t^{s+1}}{s+1}$ sadeleştirilirse

$$\left|\frac{1}{2^{s+1}}-\frac{1}{s+2}\right| \leq \frac{2^{2-s}+1}{4\left(s+2\right)}$$

burada $s+2<2^{s+1}$ olduğundan $\left|\frac{1}{2^{s+1}}-\frac{1}{s+2}\right|=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{2^{s+1}}$ yani

$$\frac{1}{s+2}-\frac{1}{2^{s+1}} \leq \frac{2^{2-s}}{4\left(s+2\right)}+\frac{1}{4\left(s+2\right)}$$

dolayısıyla

$$\frac{3}{4\left(s+2\right)}-\frac{1}{2^{s+1}} \leq \frac{2^{-s}}{s+2}$$

elde edilir. Her iki tarafın s ye göre $[0,k]$ aralığında integrali alınırsa

$$\frac{3}{4}\left(\ln(k+2)-\ln 2\right)-\frac{2^{-k-1}(2^k-1)}{\ln 2}\leq 4\,\mathrm{Ei}(-(k+2)\ln 2)-\mathrm{Ei}(-\ln 4)$$

elde edilir. $x=-(k+2)\ln 2$ denirse

$$\frac{3}{4}\left(\ln(-x)-2\ln\ln 2\right)-\frac{2^{-1}-2e^x}{\ln 2}\leq 4\,\mathrm{Ei}(x)-\mathrm{Ei}(-\ln 4)$$

bulunur. □

Teorem 4.13. $x\in(0,1)$ *ise*

$$2^4-2^{1-x}-\frac{1}{x+4}-\frac{8}{x+1}\leq\frac{(x+1)(x+2)}{2^x(x+4)}2F_1(1,-x;x+5;-1)-7\beta(x+1,x+4).$$

İspat Teorem 2.12' de $I=[0,1]$ ve $f(x)=\frac{x^{s+2}}{(s+2)(s+1)}$ alınırsa $a=t$ ve $b=1$ düşünülürse $f''(x)=x^s$ ve

$$\int_t^1\frac{x^{s+2}}{(s+2)(s+1)}dx=\frac{1-t^{s+3}}{(s+3)(s+2)(s+1)}$$

olur. Buradan

$$\left|\frac{1}{(s+2)(s+1)}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{s+2}-\frac{1}{1-t}\frac{1-t^{s+3}}{(s+3)(s+2)(s+1)}\right|$$
$$\leq\frac{(1-t)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{t^s+(s+1)(s+2)\left(\frac{1+t}{2}\right)^s+1\right\}$$

elde edilir. Eşitsizlik $(1-t)^{s+1}(s+1)(s+2)$ ile çarpılırsa

$$\left|\left(\frac{1+t}{2}\right)^{s+2}-(1-t)^s\frac{(1-t^{s+3})}{s+3}\right|\leq\frac{(1-t)^{s+3}}{8(s+3)}\left\{t^s+(s+1)(s+2)\left(\frac{1+t}{2}\right)^s+1\right\}$$

elde edilir.

$$\int_0^1 t^s(1-t)^{s+3}=\beta(s+1,s+4)\ \text{ ve }\ \int_0^1(\frac{1+t}{2})^s(1-t)^{s+3}dt=\frac{{}_2F_1(1,-s;s+5;-1)}{2^s(s+4)}$$

ve

$$\int_0^1(1-t)^{s+3}=\frac{1}{s+4}\ \text{ ve }\ \int_0^1(\frac{1+t}{2})^{s+2}dt=\frac{2-2^{-2-s}}{s+3}$$

ve

$$\int_0^1(1-t)^s(1-t^{s+3})dt=\int_0^1(1-t)^s dt-\int_0^1(1-t)^s t^{s+3}dt=\frac{1}{s+1}-\beta(s+1,s+4)$$

olacağından

$$\frac{2-2^{-2-s}}{s+3}-\frac{1}{s+3}\left(\frac{1}{s+1}-\beta(s+1,s+4)\right)$$
$$\leq\frac{1}{8(s+3)}\left\{\beta(s+1,s+4)+(s+1)(s+2)\frac{{}_2F_1(1,-s;s+5;-1)}{2^s(s+4)}+\frac{1}{s+4}\right\}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$2^4-2^{1-s}-8\left(\frac{1}{s+1}-\beta(s+1,s+4)\right)$$
$$\leq\beta(s+1,s+4)+(s+1)(s+2)\frac{{}_2F_1(1,-s;s+5;-1)}{2^s(s+4)}+\frac{1}{s+4}$$

ve

$$2^4-2^{1-s}-\frac{1}{s+4}-\frac{8}{s+1}\leq(s+1)(s+2)\frac{{}_2F_1(1,-s;s+5;-1)}{2^s(s+4)}-7\beta(s+1,s+4).$$

□

Teorem 4.14. $x\in(2,3)$ *ise*

$$g_1(x)=\frac{(2-x)e}{2^{x-1}}-1,\;\; g_2(x)=-\frac{1}{2^{x-1}}+\frac{2}{e}-\frac{1}{x}$$

olmak üzere

$$|g_1(x)\Gamma(x,1)-(g_1(x)+1)\Gamma(x,2)+\Gamma(x)+g_2(x)|\leq\frac{e-2}{2e}.$$

İspat Teorem 2.13' de $I=[0,1]$ ve $f(z)=\frac{z^{s+1}}{s+1}$ alınır, $a=t$, $b=1$, $x=\frac{1+t}{2}$ düşünülürse $f'(x)=x^s$ olur ve $M=1$ olur. (2.4) eşitsizliği gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$\left|\frac{(1+t)^{s+1}}{2^{s+1}}-\frac{1}{s+2}\frac{1-t^{s+2}}{1-t}\right|\leq\frac{1-t}{2}$$

olur. Buradan

$$-\frac{1-t}{2}\leq\frac{(1+t)^{s+1}}{2^{s+1}}-\frac{1}{s+2}\frac{1-t^{s+2}}{1-t}\leq\frac{1-t}{2}$$

elde edilir. Eşitsizlik $(1-t)e^{-t}$ ile çarpılırsa

$$-\frac{(1-t)^2e^{-t}}{2}\leq\frac{(1+t)^{s+1}(1-t)e^{-t}}{2^{s+1}}-\frac{1}{s+2}(1-t^{s+2})e^{-t}\leq\frac{(1-t)^2e^{-t}}{2}$$

elde edilir.

$$\int_0^1(1-t)^2e^{-t}dt=\frac{e-2}{e},$$

$$\int_0^1 (1+t)^{s+1}(1-t)e^{-t}dt = e\left(2\Gamma(s+2,1) - 2\Gamma(s+2,2) - \Gamma(s+3,1) + \Gamma(s+3,2)\right)$$

ve

$$\int_0^1 (1-t^{s+2})e^{-t} = -\Gamma(s+3) + \Gamma(s+3,1) - \frac{1}{e} + 1$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$-\frac{e-2}{2e} \leq \frac{1}{2^{s+1}} e\left(2\Gamma(s+2,1) - 2\Gamma(s+2,2) - \Gamma(s+3,1) + \Gamma(s+3,2)\right) - \frac{1}{s+2}\left(-\Gamma(s+3) + \Gamma(s+3,1) - \frac{1}{e} + 1\right) \leq \frac{e-2}{2e}$$

bulunur. $x = s+2$ denirse

$$-\frac{e-2}{2e} \leq \frac{1}{2^{x-1}} e\left(2\Gamma(x,1) - 2\Gamma(x,2) - \Gamma(x+1,1) + \Gamma(x+1,2)\right) - \frac{1}{x}\left(-\Gamma(x+1) + \Gamma(x+1,1) - \frac{1}{e} + 1\right) \leq \frac{e-2}{2e}$$

bulunur.

$$\Gamma(x+1,1) = x\Gamma(x,1) + e^{-1} \text{ ve } \Gamma(x+1,2) = x\Gamma(x,2) + 2^x e^{-2}$$

olduğu dikkate alınır ve yerine yazılırsa

$$-\frac{e-2}{2e} \leq \frac{1}{2^{x-1}} e\left(2\Gamma(x,1) - 2\Gamma(x,2) - x\Gamma(x,1) - e^{-1} + x\Gamma(x,2) + 2^x e^{-2}\right) - \frac{1}{x}\left(-\Gamma(x+1) + x\Gamma(x,1) + 1\right) \leq \frac{e-2}{2e}$$

ve $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olduğu da kullanılır burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\frac{e-2}{2e} \leq \left(\frac{(2-x)e}{2^{x-1}} - 1\right)\Gamma(x,1) + \frac{e(x-2)}{2^{x-1}}\Gamma(x,2) - \frac{1}{2^{x-1}} + \frac{2}{e} + \Gamma(x) - \frac{1}{x} \leq \frac{e-2}{2e}$$

elde edilmiş olur. □

Teorem 4.15. $x \in [0,1]$ *ise*

$$\frac{x+7}{4} - \frac{1}{2^{x-2}} \leq \psi(x) + \gamma \leq \frac{9-x}{4} - \frac{1}{2^{x-2}}.$$

İspat a, b, x, M sayıları ve f fonksiyonu Teorem 4.14'nun ispatındaki gibi alınırsa (2.4)

$$-\frac{1-t}{2} \leq \frac{(1+t)^{s+1}}{2^{s+1}} - \frac{1}{s+2}\frac{1-t^{s+2}}{1-t} \leq \frac{1-t}{2}$$

olur. Eşitsizlik t'ye göre $[0,1]$ aralığında integrallenir ve

$$\int_0^1 (1+t)^{s+1}\,dt = \frac{2^{s+2}-1}{s+2} \text{ ve } \int_0^1 \frac{1-t^{s+2}}{1-t}dt = \psi(s+3)+\gamma$$

olduğu dikkate alınırsa

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2^{s+1}}\frac{2^{s+2}-1}{s+2} - \frac{1}{s+2}\left(\psi(s+3)+\gamma\right) \leq \frac{1}{4}$$

elde edilir. Burada $x = s+3$ denirse

$$\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{2^{x-2}}\frac{2^{x-1}-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\left(\psi(x)+\gamma\right) \leq -\frac{1}{4}$$

ortaya çıkar. Gerekli düzenlemeler yapılırsa istenen elde edilir. □

Teorem 4.16. $u, v \in [1,2]$ *ise*

$$\psi(u+v)+\gamma \leqslant (u+v)\left(\frac{1}{u+v-1} + \frac{u+v-1}{uv}\beta(u,v)\right).$$

İspat Teorem 2.14'de $t \in (0,1)$ olmak üzere $a = t$, $b = 1$, $f(x) = x^{s_1}$ ve $g(x) = x^{s_2}$ kabul edelim. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_t^1 x^{s_1+s_2}dx = \frac{1-t^{s_1+s_2+1}}{s_1+s_2+1}$$

ve $M(a,b) = M(t,1) = t^{s_1+s_2}+1$ ve $N(a,b) = N(t,1) = t^{s_1}+t^{s_2}$ olur. Eşitsizlikte bunlar yerine konur ve $\frac{1}{s_1+s_2+1}$ sadeleştirilirse

$$\frac{1-t^{s_1+s_2+1}}{1-t} \leqslant t^{s_1+s_2}+1+\frac{s_1s_2}{s_1+s_2}\beta(s_1,s_2)(t^{s_1}+t^{s_2})$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki yanı $[0,1]$ aralığı için t'ye göre integrali alınırsa

$$\int_0^1 \frac{1-t^{s_1+s_2+1}}{1-t}dt \leqslant \frac{1}{s_1+s_2+1}+1+\frac{s_1s_2}{s_1+s_2}\beta(s_1,s_2)(\frac{1}{s_1+1}+\frac{1}{s_2+1})$$

Sol taraf için Psi eşliği kullanılırsa

$$\psi(s_1+s_2+2)+\gamma \leqslant \frac{s_1+s_2+2}{s_1+s_2+1} + \frac{s_1s_2}{s_1+s_2}\frac{s_1+s_2+2}{(s_2+1)(s_1+1)}\beta(s_1,s_2)$$

elde edilir. $u = s_1+1$ ve $v = s_2+1$ dönüşümü yapılırsa

$$\psi(u+v)+\gamma \leqslant \frac{u+v}{u+v-1} + \frac{(u-1)(v-1)}{u+v-2}\frac{u+v}{uv}\beta(u-1,v-1)$$

burada

$$\beta(u-1,v-1) = \frac{(u+v-2)(u+v-1)}{(u-1)(v-1)}\beta(u,v)$$

yazılırsa istenen elde edilir. □

Teorem 4.17. $s \in (0,1)$ *ve* $x \in (1,\infty)$ *ise*

$$\mathrm{Shi}\,(x) \leq \frac{x-1}{s+2}\left(\sinh(1)(1+\frac{x^s}{s+1})+\frac{\sinh(x)}{x}(1+\frac{x^{-s}}{s+1}\right).$$

İspat $w>1$ olmak üzere $f(x)=\frac{\sinh(x)}{x^{1+s}}$ ve $g(x)=x^s$ fonksiyonlarını $[1,w]$ aralığında düşünelim. f, bu aralıkta pozitif değerlidir. $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{dx^2} = &-\frac{1}{2x^{s+3}e^{-x}}\left(s^2\left(e^{-2x}-1\right)\right.\\ &\left.+s\left(2x+3e^{-2x}+2xe^{-2x}-3\right)+2x+2e^{-2x}+2xe^{-2x}+x^2e^{-2x}-x^2-2\right)\end{aligned}$$

bulunur.

$$p(x)=e^{-2x}-1,\;\; q(x)=2x+3e^{-2x}+2xe^{-2x}-3$$

ve

$$r(x)=2x+2e^{-2x}+2xe^{-2x}+x^2e^{-2x}-x^2-2$$

olmak üzere

$$k(s)=s^2p(x)+sq(x)+r(x)$$

şeklinde s'ye bağlı bir $k(s)$ fonksiyon tanımlanırsa

$$q^2(x)-4p(x)r(x)=\left(e^{-2x}+4xe^{-2x}-1\right)\left(4x+e^{-2x}-1\right)$$

$x\in[1,w]$ için $4x+e^{-2x}-1>0$ ve

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}+4xe^{-2x}-1\right)=-2e^{-2x}\left(4x-1\right)$$

olduğundan $e^{-2x}+4xe^{-2x}-1$, $[1,w]$ aralığında azalan ve $e^{-2}+4e^{-2}-1\approx -0.32332$ olduğundan negatif değerlidir. Buna göre $x\in[1,w]$ için $q^2(x)-4p(x)r(x)<0$ ve $p(x)<0$ olacaktır. Buna göre $k(s)$ negatif değerli bir fonksiyondur. Dolayısıyla $x\in[1,w]$ için $\frac{d^2f}{dx^2}>0$ olacaktır. f, $[1,w]$ aralığında konvekstir. f ve g, $[1,w]$ aralığında Teorem 2.15 uygulanırsa

$$\frac{1}{w-1}\int_1^w\frac{\sinh(x)}{x}dx\leq\frac{1}{s+2}M(1,w)+\frac{1}{(s+1)(s+2)}N(1,w)$$

olur burada

$$M(1,w)=\sinh(1)+\frac{\sinh(w)}{w}\;\text{ ve }\;N(1,w)=\sinh(1)w^s+\frac{\sinh(w)}{w^{1+s}}$$

ve

$$\int_1^w \frac{\sinh(x)}{x}dx = \mathrm{Shi}\,(w)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{\mathrm{Shi}\,(w)}{w-1} \leq \frac{1}{s+2}\left(\sinh(1)(1+\frac{w^s}{s+1}) + \frac{\sinh(w)}{w}(1+\frac{w^{-s}}{s+1}\right)$$

olarak bulunur. $x = w$ yazılır ve düzenlenirse istenen elde edilir. □

Teorem 4.18. $x \in (0,1)$ *ise*

$$eF(1) - \frac{1-x}{x+2}\left(x^{-x} + x^x e^{1+x^2} + \frac{e}{x+1}(x^{-x}+x^x)\right) \leq e^{x^2}F(x)$$

olur. Burada F(x) Dawson fonksiyonudur.

İspat $t \in [0,1)$ olmak üzere Teorem 2.15'da $a = t$, $b = 1$ ve Örnek 4.1 ile verilen $g(x) = x^s e^{x^2}$ ve $f(x) = x^{-s}$ alınırsa

$$\int_t^1 e^{x^2}dx = eF(1) - e^{t^2}F(t),$$

$$M(t,1) = t^{-s} + t^s e^{1+t^2} \text{ ve } N(t,1) = t^{-s}e + t^s e$$

olacağından

$$\frac{eF(1) - e^{t^2}F(t)}{1-t} \leq \frac{t^{-s} + t^s e^{1+t^2}}{s+2} + \frac{1}{(s+1)(s+2)}t^{-s}e + t^s e$$

elde edilir. Her $s \in (0,1)$ için eşitsizlik doğru olacağından $x = t = s$ yazılırsa istenen elde edilmiş olur □

Teorem 4.19. $x > 0$ *ise*

$$\left|\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(x) - \Gamma(\frac{5}{4}) + x^{5/2}E_{-\frac{1}{4}}(x^2)\right| \leq \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{10\sqrt{2}} + \frac{3(8\sqrt{2}-7)e^{-\frac{x^2}{4}}\sqrt{x}}{2}$$

bulunur.

İspat Teorem 2.16' de $s = \frac{1}{2}$, $z > 0$ olmak üzere $[a,b] = [0,z]$ ve $f(x) = \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ ve $g(x) = e^{-x^2}$ alınırsa $\|g\|_{[0,\frac{z}{2}],\infty} = 1$ ve $\|g\|_{[\frac{z}{2},z],\infty} = e^{-\frac{z^2}{4}}$ olur ve eşitsizlik gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$\left|\frac{2}{3}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^z e^{-t^2}dt - \frac{2}{3}\int_0^z t^{\frac{3}{2}}e^{-t^2}dt\right| \leq \frac{z^{\frac{5}{2}}}{10\sqrt{2}} + \frac{(8\sqrt{2}-7)e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{z}}{2}$$

olur.

$$\int_0^z e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(z) \text{ ve } \int_0^z t^{\frac{3}{2}}e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\left(\Gamma(\frac{5}{4}) - z^{5/2}E_{-\frac{1}{4}}(z^2)\right)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\left|\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(z) - \frac{1}{3}\left(\Gamma(\frac{5}{4}) - z^{5/2}E_{-\frac{1}{4}}(z^2)\right)\right| \leq \frac{z^{\frac{5}{2}}}{10\sqrt{2}} + \frac{(8\sqrt{2}-7)e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{z}}{2}$$

elde edilir. □

Teorem 4.20. $x > 0$ *ve* $0 < y < 1$ *olsun.*

$$f_1(x,y) = x^y e^{-x}(y+1+x+\left(\frac{3}{4}\right)^{y+1}x),$$

$$f_2(x,y) = x^y e^{-\frac{x}{2}}(\frac{1}{2^y}\left(y+1+\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^{y+1}x)$$

$$f_3(x,y) = e^{-\frac{x}{2}}\left((2^{y+2}-(y+3))\frac{1}{2^y} + y + 1\right)$$

ve

$$f_4(x,y) = e^{-\frac{3x}{4}}\left((y+1)\frac{1}{2^y} + 2^{y+2} - (y+3)\right)$$

olmak üzere

$$\left|y(y+1)(\Gamma(y,x) - \Gamma(y,\frac{x}{2})) + f_1(x,y) - f_2(x,y)\right| \leq \frac{x^{2+y}}{2^{y+4}(y+2)}\left(f_3(x,y) + f_4(x,y)\right).$$

İspat Teorem 2.16' de, $b > 0$ olmak üzere, $a = \frac{b}{2}$ ve $f(x) = \dfrac{x^{s+1}}{s+1}$ ve $g(x) = e^{-x}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{\frac{b}{2}+b}{2}\right)\int_{\frac{b}{2}}^{b} g(t)dt - \int_{\frac{b}{2}}^{b} f(t)g(t)dt\right| \\
&\leq \frac{(\frac{b}{2})^2}{2^{s+2}(s+1)(s+2)} \times \left\{\|g\|_{\left[\frac{b}{2},\frac{3b}{4}\right],\infty}\left[(2^{s+2}-(s+3))\frac{b^s}{2^s} + (s+1)b^s\right]\right. \\
&\qquad \left. + \|g\|_{\left[\frac{3b}{4},b\right],\infty}\left[\left((s+1)\frac{b^s}{2^s} + \left(2^{s+2}-(s+3)\right)b^s\right)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

elde edilir. $\|g\|_{\left[\frac{b}{2},\frac{3b}{4}\right],\infty} = e^{-\frac{b}{2}}$, $\|g\|_{\left[\frac{3b}{4},b\right],\infty} = e^{-\frac{3b}{4}}$,

$$\int_{\frac{b}{2}}^{b} \frac{x^{s+1}}{s+1}e^{-t}dt = \frac{1}{s+1}\left(\Gamma(s+2,b) - \Gamma(s+2,\frac{b}{2})\right)$$

ve

$$\int_{\frac{b}{2}}^{b} e^{-t}dt = e^{-\frac{b}{2}} - e^{-b}$$

olduğu gözönüne alınırsa ve eşitsizlik

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{s+1}}{s+1}b^{s+1}(e^{-\frac{b}{2}} - e^{-b}) - \frac{1}{s+1}\left(\Gamma(s+2,b) - \Gamma(s+2,\frac{b}{2})\right)\right| \\ &\leq \frac{(\frac{b}{2})^2}{2^{s+2}(s+1)(s+2)}\left\{e^{-\frac{b}{2}}\left[(2^{s+2} - (s+3))\frac{b^s}{2^s} + (s+1)b^s\right]\right. \\ &\qquad \left. + e^{-\frac{3b}{4}}\left[\left((s+1)\frac{b^s}{2^s} + \left(2^{s+2} - (s+3)\right)b^s\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

haline gelir. Tam olmayan Gamma fonksiyonu ile ilgili özdeşliklerden

$$\begin{aligned}\Gamma(s+2,b) &= (s+1)\Gamma(s+1,b) + b^{s+1}e^{-b} \\ \Gamma(s+1,b) &= s\Gamma(s,b) + b^s e^{-b}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Gamma(s+2,\frac{b}{2}) &= (s+1)\Gamma(s+1,\frac{b}{2}) + (\frac{b}{2})^{s+1}e^{-\frac{b}{2}} \\ \Gamma(s+1,\frac{b}{2}) &= s\Gamma(s,\frac{b}{2}) + (\frac{b}{2})^s e^{-\frac{b}{2}}\end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma\left(s+2,b\right) &= s(s+1)\Gamma(s,b) + b^s e^{-b}(s+1+b) \\ \Gamma\left(s+2,\frac{b}{2}\right) &= s(s+1)\Gamma(s,\frac{b}{2}) + \frac{b^s}{2^s}e^{-\frac{b}{2}}(s+1+\frac{b}{2})\end{aligned}$$

elde edilir. Bunlar eşitsizlikte yerine konursa

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{3}{4}\right)^{s+1} b^{s+1}(e^{-\frac{b}{2}} - e^{-b}) - s(s+1)(\Gamma(s,b) - \Gamma(s,\frac{b}{2}))\right. \\ &\qquad \left. - b^s e^{-b}(s+1+b) + \frac{b^s}{2^s}e^{-\frac{b}{2}}(s+1+\frac{b}{2})\right| \\ &\leq \frac{b^{2+s}}{2^{s+4}(s+2)}\left\{e^{-\frac{b}{2}}\left[(2^{s+2} - (s+3))\frac{1}{2^s} + (s+1)\right]\right. \\ &\qquad \left. + e^{-\frac{3b}{4}}\left[\left((s+1)\frac{1}{2^s} + \left(2^{s+2} - (s+3)\right)\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılır ve $y = s$ ve $x = b$ alınırsa istenen sonuç elde edilir. □

Teorem 4.21. $x > 1$ *ise*

$$\frac{4(1+2x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}(x-1)}(x-1)(6x-1)(8x-1)(9x-1)}{(3x-1)x^{\frac{1}{x}-1}(-27x+(-3x^3+3x^4)\times 2^{\frac{1}{x}(x-1)+8}+281x^2-1377x^3+2802x^4+1)} \leq \left(\beta(\frac{1}{2},x)\right)^{1/x}.$$

İspat Teorem 2.17' de $I=[0,1]$ ve $f(x)=\frac{x^{\frac{s}{q}+2}}{\left(\frac{s}{q}+2\right)\left(\frac{s}{q}+1\right)}$ alınırsa ($|f''(x)|^q = x^s$ olacağından istenen s-konveks olur.) $s=\frac{1}{2}$ düşünülürse

$$\frac{(2x-1)\frac{x^{\frac{1}{2q}+1}}{\frac{1}{2q}+1}+2\frac{1}{\left(\frac{1}{2q}+1\right)\left(\frac{1}{2q}+2\right)}(1-x)}{2}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2q}+1\right)\left(\frac{1}{2q}+2\right)\left(\frac{1}{2q}+3\right)}$$
$$\leq \left(\frac{1}{2}\beta(\frac{1}{2},p+1)\right)^{1/p}\frac{x^{3+\frac{1}{2q}}+(1-x)^3\left[1+\sqrt{x}\right]^{1/q}}{2(\frac{3}{2})^{1/q}}$$

bulunur. Burada x'e göre $[0,1]$ aralığında integral alınırsa

$$\int_0^1 (2x-1)\frac{x^{\frac{1}{2q}+1}}{\frac{1}{2q}+1}dx=\frac{4q^2}{(4q+1)(6q+1)}$$

ve

$$\int_0^1 2\frac{1}{\left(\frac{1}{2q}+1\right)\left(\frac{1}{2q}+2\right)}(1-x)dx=\frac{4q^2}{(2q+1)(4q+1)}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2q}+1\right)\left(\frac{1}{2q}+2\right)\left(\frac{1}{2q}+3\right)}=8\frac{q^3}{(2q+1)(4q+1)(6q+1)}$$

ve

$$\int_0^1 \left(x^{3+\frac{1}{2q}}+(1-x)^3(1+\sqrt{x})^{1/q}\right)dx$$
$$=\frac{2q\left(1680q^4+\left(3\times 2^{1/q+8}+892\right)q^3+206q^2+23q+1\right)}{(4q+1)(5q+1)(6q+1)(7q+1)(8q+1)}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{4q^2}{(4q+1)(6q+1)}-8\frac{q^3}{(2q+1)(4q+1)(6q+1)}$$
$$\leq \left(\frac{1}{2}\beta(\frac{1}{2},p+1)\right)^{1/p}\frac{1}{2(\frac{3}{2})^{1/q}}\frac{2q\left(1680q^4+\left(3\times 2^{1/q+8}+892\right)q^3+206q^2+23q+1\right)}{(4q+1)(5q+1)(6q+1)(7q+1)(8q+1)}$$

elde edilir.

$$\frac{4q^2}{(4q+1)(6q+1)}-\frac{8q^3}{(2q+1)(4q+1)(6q+1)}=\frac{4q^2}{(4q+1)(2q+1)(6q+1)}$$

ve $\beta(\frac{1}{2}, p+1) = \frac{2p}{2p+1}\beta(\frac{1}{2}, p)$ olduğu dikkate alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{4q^2}{2q+1} \leq \left(\frac{p}{2p+1}\beta(\frac{1}{2}, p)\right)^{1/p} \frac{1}{2(\frac{3}{2})^{1/q}} \times \frac{2q\left(1680q^4 + \left(3 \times 2^{1/q+8} + 892\right)q^3 + 206q^2 + 23q + 1\right)}{(5q+1)(7q+1)(8q+1)}$$

edilir. Burada $q = \frac{p}{p-1}$ ve daha sonra $x = p$ denilerek ifade düzenlenirse istenen sonuç elde edilir. □

Teorem 4.22. *$1 < x$ ve $0 < s < 1$ ise $w(t) = \frac{e^t}{t+1}$ olmak üzere*

$$\frac{x-1}{1+(x-1)^s}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^s\left(w(\frac{x-1}{2}) - 1\right) - \frac{1}{2(s+1)^2}\frac{(x-1)^{s+1}-1}{x-2}\left(w(x-1)-1\right)\right] \leq \frac{1}{e}\left(chi(x) - \mathrm{Ei}(1) + shi(x)\right) - x + 1.$$

İspat $t > 1$ olmak üzere Teorem 2.18'de $\Delta = [1, t] \times [0, t]$ ve Örnek 4.2'yi dikkate alarak $f(x, y) = x^s\left(\frac{e^y}{y+1} - 1\right)$ fonksiyonunu düşünelim. Bundan önce bir önermeyi ispat edelim. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bir s-konveks fonksiyon ve $c > 0$ ise cf'de s-konveks fonksiyondur. $x, y \in [a, b]$ ve $t \in [0, 1]$ ise $f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^S f(y)$ olur. Her iki taraf c ile çarpılırsa $cf(tx + (1-t)y) \leq t^s cf(x) + (1-t)^s cf(y)$ olur ki bu da cf'nin s-konveks olduğunu gösterir.

$$f\left(\frac{1+t}{2}, \frac{t}{2}\right) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^s\left(\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\frac{t}{2}+1} - 1\right), \quad \int_1^t f(x, 0)\,dx = 0,$$

$$\int_1^t f(x, t)\,dx = \frac{t^{s+1}-1}{s+1}\left(\frac{e^t}{t+1} - 1\right),$$

$$\int_0^t f(1, y)\,dy = \frac{chi(t+1) - \mathrm{Ei}(1) + shi(t+1)}{e} - t,$$

$$\int_0^t f(t, y)\,dy = t^s\frac{chi(t+1) - \mathrm{Ei}(1) + shi(t+1)}{e} - t^{s+1}$$

olduğu dikkate alınır ve eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^s\left(\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\frac{t}{2}+1} - 1\right) \leq \frac{1}{2(s+1)}\left[\frac{1}{t-1}\frac{t^{s+1}-1}{s+1}\left(\frac{e^t}{t+1} - 1\right) + \frac{1}{t}\left(1+t^s\right)\left(\frac{chi(t+1) - \mathrm{Ei}(1) + shi(t+1)}{e} - t\right)\right]$$

elde edilir. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$\frac{t}{1+t^s}\left(\frac{1+t}{2}\right)^s\left(\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\frac{t}{2}+1}-1\right)-\frac{1}{2\left(s+1\right)^2}\frac{t^{s+1}-1}{t-1}\left(\frac{e^t}{t+1}-1\right)\frac{t}{1+t^s}$$
$$\leq \frac{chi(t+1)-\mathrm{Ei}(1)+shi(t+1)}{e}-t$$

elde edilir. $x=t+1$ denirse istenen eşitsizlik elde edilir. □

Buradan itibaren Kaynak Taraması bölümünde Hermite-Hadamard tipi olmayan bazı eşitsizlikler olarak belirttiğimiz eşitsizlikleri kullanarak özel fonksiyonlarla ilgili sonuçlar sunulacaktır.

Teorem 4.23. *$x>1$ ve $0<s<1$ olsun. Bu durumda*

$$w(s,x)=\left(\frac{x^{s+2}}{s+2}-\frac{x^{s+1}}{s+1}+\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}\right)$$

olmak üzere

$$\frac{x-1}{6}+\frac{1}{2^s}\frac{(x+1)^{s+2}-2^{s+2}}{3(s+2)}+\frac{x^{s+2}-1}{6(s+2)}-m(s)w(s,x)\leq(x-1)_3F_2(1,1,1;2,2;1-x)$$

Burada $m(s)$, Teorem 2.19'de verildiği şekilde tanımlıdır.

İspat Teorem 2.19'de $t>1$ olmak üzere $a=1$ ve $b=t$ ve $f(x)=\frac{x^{s+1}}{s+1}$ alınırsa

$$\frac{1}{6\left(s+1\right)}-\frac{1}{(s+1)(s+2)}\frac{t^{s+2}-1}{t-1}+\frac{1}{3}\frac{(t+1)^{s+1}}{2^s(s+1)}+\frac{1}{6}\frac{t^{s+1}}{s+1}\leq(t-1)m(s)(t^s+1)$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin $x>1$ olmak üzere t'ye göre $[1,x]$ aralığında integralini alalım.

$$\int_1^x\frac{t^{s+2}-1}{t-1}dt=(s+2)(x-1)_3F_2(1,1,1;2,2;1-x),$$

ve

$$\int_1^x(t+1)^{s+1}\,dt=\frac{(x+1)^{s+2}-2^{s+2}}{s+2}$$

ve

$$\int_1^x\left(t^s+1\right)(t-1)dt=\frac{1}{2}x\left(\frac{2x^{s+1}}{s+2}-\frac{2x^s}{s+1}+x-2\right)+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\frac{x-1}{6}-(x-1)_3F_2(1,1,1;2,2;1-x)+\frac{1}{3}\frac{1}{2^s}\frac{(x+1)^{s+2}-2^{s+2}}{s+2}+\frac{1}{6}\frac{x^{s+2}-1}{s+2}$$
$$\leq m(s)\left(\frac{1}{2}x\left(\frac{2x^{s+1}}{s+2}-\frac{2x^s}{s+1}+x-2\right)+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}\right)$$

elde edilir. □

Teorem 4.24. $x \in (1,2)$ *ise*

$$\frac{3^{x-1}}{x2^{x-2}} - \frac{1}{2x-1} \leq 2^{2x-1}_{\frac{1}{2}}\beta(x,x) - \left(3^{x-1}\left(2^{x-2}-2\right) + 2^{2x-1} - 1\right)\beta(x,x)$$

olur.

İspat Teorem 2.20 için $0 < t < 1$ olmak üzere $f(x) = x^s$ fonskiyonunu $(0,\infty)$ 'da düşünelim.$x_1 = x_2 = 1-t$ ve $x_3 = t$ alalım. Bu durumda

$$2^{s-1}\frac{3^s-1}{3^s}\left[(1-t)^s + \frac{1}{2^{s-1}}\right] \leq 2(1-t)^s + t^s - \left(\frac{2-t}{3}\right)^s.$$

Eşitsizliğin her iki tarafı t^s ile çarpılırsa

$$2^{s-1}\frac{3^s-1}{3^s}\left(t^s(1-t)^s + \frac{t^s}{2^{s-1}}\right) \leq 2t^s(1-t)^s + t^{2s} - \frac{t^s}{3^s}(2-t)^s$$

olur. t'ye göre $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa, beta fonksiyonu tanımı ve

$$\int t^s(2-t)^s dt = -2^{2s+1}\beta_{1-\frac{t}{2}}(s+1,s+1)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} 2^{s-1}\frac{3^s-1}{3^s}&\left(\beta(s+1,s+1) + \frac{1}{(s+1)2^{s-1}}\right) \\ &\leq 2\beta(s+1,s+1) + \frac{1}{2s+1} \\ &\quad + \frac{1}{3^s}\left(2^{2s+1}\beta_{\frac{1}{2}}(s+1,s+1) - 2^{2s+1}\beta(s+1,s+1)\right) \end{aligned}$$

olur. Eşitsizlik

$$\begin{aligned} \left(2^{s-1}\frac{3^s-1}{3^s} - 2 + \frac{2^{2s+1}}{3^s}\right)&\beta(s+1,s+1) + \frac{3^s-1}{3^s(s+1)} \\ &\leq \frac{1}{2s+1} + \frac{2^{2s+1}}{3^s}\beta_{\frac{1}{2}}(s+1,s+1) \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenir ve 3^s ile çarpılırsa

$$\left(2^{s-1}\left(3^s-1\right) - 2\times 3^s + 2^{2s+1}\right)\beta(s+1,s+1) + \frac{3^s-1}{(s+1)2^{s-1}} \leq \frac{1}{2s+1} + 2^{2s+1}\beta_{\frac{1}{2}}(s+1,s+1)$$

elde edilir. Burada $x = s+1$ dönüşümü yapılırsa istenen eşitlik elde edilmiş olur. □

Teorem 4.24'da eşitsizliğin sol tarafının $(1,2)$ aralığında artan olduğu dikkate alınırsa eşitsizlik aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\frac{1}{2} < 2^{2x-1}\beta_{\frac{1}{2}}(x,x) - \left(3^{x-1}\left(2^{x-2}-2\right) + 2^{2x-1} - 1\right)\beta(x,x)$$

olur.

Teorem 4.25. $x \in (0,1)$ *ise*

$$\frac{x}{2^x}\,{}_2F_1(\frac{1}{2},-x;\frac{3}{2};-x^2)+\frac{x^{x+1}}{x+1}\,{}_2F_1(-x,x+1;x+2;-\frac{x}{2})$$
$$\leq \frac{3^x}{2^{x-1}\left(3^x-1\right)}\left(x+\frac{2^x x^{x+1}}{x+1}+\frac{x^{2x+1}}{2x+1}-\frac{(x+1)^{2x+1}-1}{3^x(2x+1)}\right)-\frac{(2x+1)^{x+1}-1}{2^{x+1}(x+1)}$$

olur.

İspat $t>0$ olmak üzere Teorem 2.20'de $f(x)=x^s$ ve $x_1=1$, $x_2=2t$ ve $x_3=t^2$ düşünülürse

$$2^{s-1}\frac{3^s-1}{3^s}\left[\left(\frac{1+2t}{2}\right)^s+\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^s+\left(\frac{2t+t^2}{2}\right)^s\right]\leq 1+2^s t^s+t^{2s}-\left(\frac{1+2t+t^2}{3}\right)^s.$$

Eşitsizliğin her iki tarafının $[0,s]$ aralığında integrali alınır

$$\int_0^s (1+t^2)^s = s\,{}_2F_1(\frac{1}{2},-s;\frac{3}{2};-s^2)$$

ve

$$\int_0^s (2t+t^2)^s=\frac{2^s s^{s+1}}{s+1}\,{}_2F_1(-s,s+1;s+2;-\frac{s}{2})$$

$$\int_0^s (1+2t)^s=\frac{(2s+1)^{s+1}-1}{2(s+1)} \quad \text{ve} \quad \int_0^s (1+t)^{2s}=\frac{(s+1)^{2s+1}-1}{2s+1}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$2^{s-1}\frac{3^s-1}{3^s}\left[\frac{(2s+1)^{s+1}-1}{2^{s+1}(s+1)}+\frac{s}{2^s}\,{}_2F_1(\frac{1}{2},-s;\frac{3}{2};-s^2)+\frac{s^{s+1}}{s+1}\,{}_2F_1(-s,s+1;s+2;-\frac{s}{2})\right]$$
$$\leq s+\frac{2^s s^{s+1}}{s+1}+\frac{s^{2s+1}}{2s+1}-\frac{(s+1)^{2s+1}-1}{3^s(2s+1)}$$

elde edilir. Eşitsizlik

$$\frac{s}{2^s}\,{}_2F_1(\frac{1}{2},-s;\frac{3}{2};-s^2)+\frac{s^{s+1}}{s+1}\,{}_2F_1(-s,s+1;s+2;-\frac{s}{2})$$
$$\leq \frac{3^s}{2^{s-1}\left(3^s-1\right)}\left(s+\frac{2^s s^{s+1}}{s+1}+\frac{s^{2s+1}}{2s+1}-\frac{(s+1)^{2s+1}-1}{3^s(2s+1)}\right)-\frac{(2s+1)^{s+1}-1}{2^{s+1}(s+1)}$$

şeklinde düzenlenir ve $x=s$ yazılırsa istenen elde edilir. □

Teorem 4.26. $0<c<a$ *ve* $x\in(0,1)$ *ise*

$$(c-a)\zeta(2)\zeta^x(6)+\frac{5ax}{6}\zeta(4)\zeta^x(6)\leq c\zeta(4x+2)$$

olur.

İspat (2.1) ile verilen fonksiyon $\mathbb{R}_+$ aralığında s-konvekstir. Teorem 2.21'de $f(x)$, $x_i = \frac{1}{i^4}$ ve $p_i = \frac{1}{i^2}$ olarak alınırsa herhangi bir $i \in \{1, 2, ..., n\}$ değeri için $\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^6} \geq \frac{1}{i^2} = x_i$ olacaktır. Dolayısıyla seçilen x_i ve p_i değerleri istenen koşulu sağlar. f'yi teoremdeki eşitsizlikte yazılır

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left(b x_i^s + c\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{x_i^s}{\bar{x}_n^s} \left(b \bar{x}_n^s + c\right) + \sum_{i=1}^{n} p_i \left(1 - \frac{x_i}{\bar{x}_n}\right)^s a$$

ve düzenlenirse

$$c \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \frac{1}{\bar{x}_n^s} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^s \right) \leq a \sum_{i=1}^{n} p_i \left(1 - \frac{x_i}{\bar{x}_n}\right)^s$$

elde edilir. Burada p_i ve x_i yi yerine koyarsak

$$c \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} - \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^6}\right)^s} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \frac{1}{i^{4s}} \right) \leq a \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \left(1 - \frac{\frac{1}{i^4}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^6}}\right)^s \tag{4.4}$$

bulunur. Burada integraller için Riemann toplamı kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^6} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^6} dx = \frac{1}{5} \left(6 - \frac{1}{n^5}\right)$$

ve

$$\frac{\frac{1}{i^4}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^6}} > \frac{5}{i^4} \left(\frac{n^5}{6n^5 - 1}\right)$$

olur. Buradan

$$\left(1 - \frac{\frac{1}{i^4}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^6}}\right)^s < \left(1 - \frac{5}{i^4} \left(\frac{n^5}{6n^5 - 1}\right)\right)^s$$

elde edilir. $-\frac{5}{i^4} \left(\frac{n^5}{6n^5 - 1}\right) \geq -1$ olduğundan Bernoulli eşitliği kullanılırsa

$$\left(1 - \frac{5}{i^4} \left(\frac{n^5}{6n^5 - 1}\right)\right)^s < 1 - \frac{5s}{i^4} \left(\frac{n^5}{6n^5 - 1}\right)$$

yazılabilir. Bunu (4.4)'de kullanırsak

$$c \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} - \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^6}\right)^s} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{4s+2}} \right) \leq a \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \left(1 - \frac{5s}{i^4} \left(\frac{n^5}{6n^5 - 1}\right)\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$c \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} - \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^6}\right)^s} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{4s+2}} \right) \leq a \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} - \left(\frac{n^5}{6n^5 - 1}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{5s}{i^4} \right)$$

elde edilir. $n \to \infty$ iken limit alınır ve Riemann-zeta fonskiyonunun tanımı dikkate alınırsa

$$c\left(\zeta(2) - \frac{1}{\zeta^s(6)}\zeta(4s+2)\right) \leq a\left(\zeta(2) - \frac{5s}{6}\zeta(4)\right)$$

bulunmuş olur. $x = s$ yazılır ve eşitlik düzenlenirse istenen elde edilir. □

5. SONUÇLAR

Çalışmada s-konveks fonksiyonların ilgili özellikleri kullanılarak yeni s- konveks fonksiyon örnekleri elde edilmiş ve bu örneklerin literatürde yer alan Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerde kullanılması ile genellikle integralle ifade edilebilen özel fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilmiştir. Örneklerin Hermite-Hadamard tipi olmayan eşitsizliklerle de integralle elde edilemeyen bazı özel fonksiyonlarla ilgili sonuçlar elde edilebileceği gösterilmiştir.

Literatür incelemeleri, s-konveks fonksiyonlar için daha önce bu yönde bir araştırma yapılmadığını göstermektedir. Diğer taraftan fen bilimlerinde neredeyse çok geniş bir şekilde kullanılan özel fonksiyonların eşitsizlikle ifade edilen özelliklerini açığa çıkarmaktadır. Bu yöndeki kaynak incelemeleri özel fonksiyonlarla ilgili bu özelliklerin daha önce elde edilmediğini göstermektedir. Çalışma bu yönüyle özgün sonuçlar içermektedir.

Gerek yeni örneklerin sunulması gerek özel fonksiyonlar için yeni sonuçların elde edilmesi s-konveks fonksiyon sınıfını çalışan araştırmacıların ve özel fonksiyonlarla ilgilenenlerin çalışmalarına katkıda bunulucağını muhtemel kılmaktadır. Çalışmanın bazı sonuçlarının bir makale olarak uluslararası bir dergide sunuluması planlanmaktadır.

6. KAYNAKLAR

Alomari, M., Darus, M. 2008. The Hadamard's Inequality for s – Convex Function of 2 -Variables on the Co-ordinates. 2(13), 629–638.

Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S. S., and Cerone, P. 2010. Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense. Applied Mathematics Letters, 23,(9), 1071–1076. https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.04.038

Alomari, M., Darus, M., and Kirmaci, U. S. 2011. Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions. Acta Mathematica Scientia, 31(4), 1643–1652. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(11)60350-0

Breckner, W. W. 1978. Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. Publ. Inst. Math.(Beograd)(NS), 23(37), 13-20.

Chen, D., Abuzaid, D., Rehman, A. U., and Rani, A. 2022. Giaccardi Inequality for s -Convex Functions in the Second Sense for Isotonic Linear Functionals and Associated Results. Journal of Mathematics. https://doi.org/10.1155/2022/4145336

Dragomir, S. S., Fitzpatrick, S. 1999a. The hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense. Demonstratio Mathematica, 32(4), 687–696. https://doi.org/10.1515/dema-1999-0403

Dragomir, S. S., Agarwal, R. P., and Barnett, N. S. 1999b. Inequalities for beta and gamma functions via some classical and new integral inequalities. RGMIA research report collection, 2(3).

Eken, Z., Sezer, S., Tınaztepe, G., and Adilov, G. 2021. s-Convex functions in the fourth sense and some of their properties. Konuralp Journal of Mathematics, 9(2), 260-267.

Hudzik, H., and Maligranda, L. 1994. Some remarks on s-convex functions. Aequationes Mathematicae, 48(1), 100–111. https://doi.org/10.1007/BF01837981

Hussain, S., Bhatti, M. I., and Iqbal, M. 2009. Hadamard-Type Inequalities for s-Convex Functions I. Punjab University Journal of Mathematics, 41, 51–60.

Kemali, S., Yesilce, I., and Adilov, G. 2015. B-Convexity, B^{-1}-Convexity, and Their Comparison. Numerical Functional Analysis and Optimization, 36(2), 133-146.

Kemali, S., Sezer, S., Tinaztepe, G., and Adilov, G. 2021. s-Convex functions in the third sense. Korean Journal of Mathematics, 29(3), 593-602.

Khan, M. A., Chu, Y., Khan, T. U., Khan, J. 2017. Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions with applications. Open Mathematics, 15(1), 1414–1430. https://doi.org/10.1515/math-2017-0121

Kirmaci, U. S., Klaričić Bakula, M., Özdemir, M. E., Pečarić, J. 2007. Hadamard-type inequalities for s-convex functions. Applied Mathematics and Computation, 193(1), 26–35. https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.03.030

Orlicz, W. 1961. A Note on Modular Spaces I. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys, 9(3), 157–162. https://www.fuw.edu.pl/~kostecki/scans/orlicz1961.pdf

Özcan, S., İşcan, İ. 2019. Some new Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex functions and their applications. J Inequal Appl. https://doi.org/10.1186/s13660-019-2151-2

Özdemir, M. E., Yıldız, Ç., Akdemir, A. O., Set, E. 2013. On some inequalities for s-convex functions and applications. In Journal of Inequalities and Applications.

Pinheiro, I. M. R. 2008. Lazhar's inequalities and the s-convex phenomenon. New Zealand Journal of Mathematics, 38, 57–62.

Sarikaya, M. Z., Set, E., and Ozdemir,M. E. 2010. On new inequalities of Simpson's type for s-convex functions. Comput. Math. with Appl., vol. 60, no. 8, pp. 2191–2199. doi: 10.1016/j.camwa.2010.07.033.

Sarikaya, M. Z., and Kiris, M. E. 2015. Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions. Miskolc Mathematical Notes, 16(1), 491–501. https://doi.org/10.18514/MMN.2015.1099

Sarikaya, M. Z., Çelik, B., Set, E., Azaklı, H. 2022. Generalizations Of Different Type Inequalities For s-convex , Quasi-convex And P-function. Konuralp Journal of Mathematics, 10(2), 341–354.

Sezer, S., Eken, Z., Tınaztepe, G., and Adilov, G. 2021. p-Convex functions and some of their properties. Numerical Functional Analysis and Optimization, 42(4), 443-459.

Yıldız, Ç. 2016. Some New Inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer Type For s-convex Functions. Konuralp Journal of Mathematics, 4(2), 70–78.

Wolfram Alpha LLC. 2024. Wolfram|Alpha https://www.wolframalpha.com/

ÖZGEÇMİŞ

Yasemin PRISTUPA

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans: 2022-2025	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans: 2017-2019	Alanya Alaaddin Keykubat Üniversitesi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü, Antalya
Lisans: 2009-2013	Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Konya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen: 2019-devam	Milli Eğitim Bakanlığı Kocabelen Ortaokulu, İlköğretim Matematik Öğretmeni, Antalya