

(A) (B) (C) (D)

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ BİTİRME SINAVI

Adı Soyadı :

Numara

- 1 (A)(B)(C)(D)(E) 9 (A)(B)(C)(D)(E) 17 (A)(B)(C)(D)(E) 25 (A)(B)(C)(D)(E) 33 (A)(B)(C)(D)(E)
2 (A)(B)(C)(D)(E) 10 (A)(B)(C)(D)(E) 18 (A)(B)(C)(D)(E) 26 (A)(B)(C)(D)(E) 34 (A)(B)(C)(D)(E)
3 (A)(B)(C)(D)(E) 11 (A)(B)(C)(D)(E) 19 (A)(B)(C)(D)(E) 27 (A)(B)(C)(D)(E) 35 (A)(B)(C)(D)(E)
4 (A)(B)(C)(D)(E) 12 (A)(B)(C)(D)(E) 20 (A)(B)(C)(D)(E) 28 (A)(B)(C)(D)(E) 36 (A)(B)(C)(D)(E)
5 (A)(B)(C)(D)(E) 13 (A)(B)(C)(D)(E) 21 (A)(B)(C)(D)(E) 29 (A)(B)(C)(D)(E) 37 (A)(B)(C)(D)(E)
6 (A)(B)(C)(D)(E) 14 (A)(B)(C)(D)(E) 22 (A)(B)(C)(D)(E) 30 (A)(B)(C)(D)(E) 38 (A)(B)(C)(D)(E)
7 (A)(B)(C)(D)(E) 15 (A)(B)(C)(D)(E) 23 (A)(B)(C)(D)(E) 31 (A)(B)(C)(D)(E) 39 (A)(B)(C)(D)(E)
8 (A)(B)(C)(D)(E) 16 (A)(B)(C)(D)(E) 24 (A)(B)(C)(D)(E) 32 (A)(B)(C)(D)(E) 40 (A)(B)(C)(D)(E)

1. $2x - 3y = 5$ doğrusunun doğrultmanı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-2, 3)$ B) $(2, 3)$ C) $(2, -\frac{3}{5})$ D) $(3, 2)$ E) $(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5})$

Çözüm : $2x - 3y = 5$ denklemini düzenleyelim.

$$2x = 3y + 5 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} + \frac{5}{6}$$

eşitliğine göre, doğrultman vektörü $\mathbf{u} = (3, 2)$ vektörü alınabilir.

Not : $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ doğrusunun doğrultmanı $\mathbf{u} = (a, b, c)$ vektörüdür.

2. $\vec{x} = (1, 1, 0)$ ve $\vec{y} = (2, 3, 2)$ vektörlerinin içinde bulunduğu düzlem, aşağıdaki doğruların hangisine diktir?

- A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2}, z=1$ B) $\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{2} = z-1$
C) $\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{2}, z=1$ D) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{4}$
E) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$

Çözüm : \vec{x} ve \vec{y} vektörlerinin içinde bulunduğu düzlemin normali :

$$\mathbf{N} = \vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, 1)$$

bulunur. Bu düzleme dik olan doğrunun doğrultmanı, düzlemin normaline paralel olmalıdır. $\mathbf{u} // \mathbf{N}$ koşulunu sağlayan tek seçenek B seçeneğidir.

3. $P(1, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{n} = (2, 3)$ vektörüne dik olan doğru, y eksenini hangi noktada keser?

- A) $\frac{11}{2}$ B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{-2}{3}$ D) $\frac{-9}{2}$ E) $\frac{11}{3}$

Çözüm : İstenen doğrunun doğrultmanı $\vec{n} = (2, 3)$ vektörüne dik olduğundan, $\vec{u} = (-3, 2)$ alınabilir. Buna göre, $P(1, 3)$ noktasından geçen doğrunun denklemi :

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{2}$$

olur. $x = 0$ olduğunda y eksenini keser. O halde, $\frac{1}{3} = \frac{y-3}{2}$

eşitliğinden $y = \frac{11}{3}$ bulunur.

4. $\alpha(t) = (t-1, 2t-2, 2t)$ doğrusuyla $x+2y-2z=2$ düzleminin arasındaki açının kosinüsü nedir?

- A) $\frac{3\sqrt{5}}{9}$ B) $\frac{8}{9}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ E) $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

Çözüm : Doğrunun doğrultmanı $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ ve düzlemin normali $\mathbf{N} = (1, 2, -2)$ olduğundan, doğru ve düzlemin arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\sin \theta = \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{N} \rangle|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{N}\|} = \frac{1}{9}$$

elde edilir. O halde, $\cos \theta = \frac{\sqrt{80}}{9} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ olur.

5. Aşağıdaki doğruların hangisi $2x + y - z = 3$ düzlemine paraleldir?

- A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = 1-z$ B) $\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{1} = z-1$
C) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$ D) $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{1-z}{2}$
E) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{6}$

Çözüm : Doğrunun düzleme paralel olması için, doğrultman ve düzlemin normali birbirine dik olmalıdır. $\mathbf{N} = (2, 1, -1)$ olduğundan, \mathbf{N} vektörüne dik olan doğrultmana sahip tek doğru denklemi, E seçeneğindedir.

$$u = (2, 2, 6) \text{ için, } 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) = 0$$

olduğu kolayca görülebilir.

6. $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, 2\mathbf{u} + \mathbf{v})$ düzlemi aşağıdaki vektörlerden hangisine diktir?

- A) $(1, -2, 3)$ B) $(1, 1, -1)$ C) $(1, 2, -3)$
D) $(1, 2, -3)$ E) $(1, -1, 3)$

Çözüm : $\varphi_u = (1, 1, 2)$ ve $\varphi_v = (0, 1, 1)$ olduğundan,

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1)$$

istenen düzleme dik olan doğrultmayı verir.

2. Yol : $x = u, y = u + v$ ve $z = 2u + v$ ise,

$$v = y - x \text{ ve } z = 2x + (y - x)$$

eşitliğinden, düzlemin denklemi $x + y - z = 0$ bulunur. Bu düzlemin normali ise B seçeneğindedir.

7. $P(1, 1, 1)$ ve $Q(4, 2, k)$ noktalarından geçen doğru-
nun, x eksenini kestiği bilindiğine göre, k kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

Çözüm : P ve Q noktalarından geçen doğru :

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{2-1} = \frac{z-1}{k-1}$$

dir. x eksenini kestiği noktada $y = z = 0$ omalıdır.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{k-1}$$

eşitliğinden $k-1 = 1 \Rightarrow k = 2$ olur. Doğru x eksenini $x = -2$ noktasında keser.

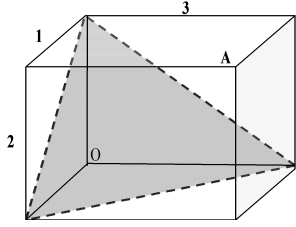
8. $y = 2x - 3$ doğrusu, x ekseninde 3 br sağa doğru ve y ekseninde k br yukarı doğru ötelenildiğinde, doğrunun denklemini değişmiyorsa k kaçtır?

- A) 1 B) 6 * C) 3 D) 5 E) 4

Çözüm : $x' = x + 3$ ve $y' = y + k$ ötelemesi yapıldığından, öteleme sonunda doğrunun denklemini

$$y = 2x - 3 \Rightarrow (y' - k) = 2(x' - 3) - 3 \Rightarrow y' = 2x' + (k - 9)$$

olur ki, denklemin değişmemesi için, $k - 9 = -3$ eşitliğinden $k = 6$ bulunur.



9. $1 \times 3 \times 2$ boyutlarında dikdörtgenler prizması şeklinde bir odanın üç köşesi birleştirilerek bir üçgen duvar yapılıyor. Bu üçgen duvarın alanı kaç br^2 dir?

- A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\sqrt{13}$ D) $\frac{\sqrt{37}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{41}}{2}$

Çözüm : O noktası orjin kabul edilirse, üçgenin koordinatları $P(1, 0, 0)$, $R(0, 3, 0)$ ve $Q(0, 0, 2)$ olacaktır. Buna göre, bu üçgen duvarın alanı :

$$\text{Alan} = \frac{1}{2} \left\| \vec{PR} \times \vec{PQ} \right\|$$

formülüyle elde edilebilir. Buradan,

$$\vec{PR} \times \vec{PQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (6, 3, 2)$$

olduğundan, $\text{Alan} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 9 + 4} = \frac{7}{2}$ olur.

10. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ küresi ve $x + 2y - 2z = 5$ düzleminin kesişmesiyle oluşan çemberin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) π B) 6π C) 3π D) 4π E) 5π *

Çözüm : Kürenin merkezi $M(1, 0, 1)$ 'in düzleme uzaklığı :

$$\ell = \frac{|1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$$

olduğundan, arakesit çemberinin yarıçapı : $r^2 + \ell^2 = R^2 = 9$ eşitliğinden, $r^2 = 5$ elde edilir. Bu çemberin alanı ise $\pi r^2 = 5\pi$ olur.

11. Dayanak eğrisi, $\alpha(t) = (\cos t, 0, 2 \sin t)$ olan ve tepe noktası $T(1, 1, 1)$ olan koninin kartezyen denklemi hangisidir?

- A) $(x-y)^2 + (z-y)^2 = 4(1-y)^2$
B) $(x-y)^2 + 4(z-y)^2 = 4(1-y)^2$
C) $4(x-y)^2 + (z-y)^2 = 4(1-y)^2$
D) $(x-y)^2 + 4(z-y)^2 = (1-y)^2$
E) $(x-y)^2 + (z-y)^2 = 4(1-y)$

Çözüm :1. Yol : $S = \alpha(t)$ ve $P(x, y, z)$ olmak üzere, $\vec{TP} = \lambda \vec{TS}$ eşitliğinden,

$$(x-1, y-1, z-1) = \lambda (\cos t - 1, -1, 2 \sin t - 1)$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\lambda = 1 - y, \cos t = \frac{x-1}{1-y} + 1 = \frac{x-y}{1-y} \text{ ve}$$

$$2 \sin t = \frac{z-1}{1-y} + 1 = \frac{z-y}{1-z}$$

eşitliklerinden,

$$\left(\frac{x-y}{1-y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{z-y}{1-z} \right)^2 = 1$$

olur ki, düzenlenirse, $4(x-y)^2 + (z-y)^2 = 4(1-z)^2$ elde edilir.

2. Yol : Dayanak eğrisi $y = 0$ düzlemindeki $x^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ elipsidir. Seçeneklerde, $y = 0$ yazıldığında, bu elipsi veren tek seçenek C) seçeneğidir.

12. $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ elipsoidine $T(2, 2, 1)$ noktasında teğet olan düzlem, aşağıdaki vektörlerin hangisine diktir?

- A) $(1, 1, 2)$ B) $(1, 1, 1)$ C) $(1, 1, -1)$
D) $(1, 1, -2)$ E) $(1, -1, 1)$

Çözüm :1.Yol : Teğet düzlemin denklemi $2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot 1 \cdot z = 10$ eşitliğinden $x + y + z = 5$ elde edilir. Normali $N = (1, 1, 1)$ 'dir. Yanıt B.

2. Yol : $F = x^2 + y^2 + 2z^2 - 10$ için, $\nabla F = (2x, 2y, 4z)$ 'dir. T noktasındaki değeri, normal doğrultusundaki bir vektör verir. Buna göre, $\nabla F(T) = (4, 4, 4)$ olur.

13. Aşağıdakilerin düzlemlerin kaç tanesinin, $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ küresiyle kesişimi bir çemberektir?

- I) $x - 2y + 2z = 3$
II) $x - 2y + 2z = 1923$
III) $x - 2y + 2z = -2016$
IV) $x - 2y + 2z = 6$
V) $x - 2y + 2z = 0$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm : Düzlemlerin tamamı $x - 2y + 2z = d$ formundadır. Düzlemin küreyle kesişiminin bir çember olması için, kürenin merkezinin düzlemden ℓ uzaklığı, kürenin R yarıçapından küçük olması gerekir. Buna göre,

$$\ell = \frac{|2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - d|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|d|}{3} < 2 \Rightarrow -6 < d < 6$$

bulunur. Yani IV teğettir. Sadece I ve V küreyi keser. Yanıt 2.

14. $r = 2 \sin \theta + 4 \cos \theta$ çemberi aşağıdaki çemberlerin hangisine diktir?

- A) $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ B) $x^2 + (y + 1)^2 = 3$
 C) $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ D) $x^2 + (y + 1)^2 = 6$
 E) $x^2 + (y + 1)^2 = 5$

Çözüm : Çemberlerin tamamı $x^2 + (y + 1)^2 = r^2$ formundadır. $r = 2 \sin \theta + 4 \cos \theta$ çemberinin denklemini ise,

$$r^2 = 2r \sin \theta + 4r \cos \theta \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 4x = 0$$

eşitliğinden, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ olur. M_1 ve M_2 merkezli iki çemberin dik oması için,

$$|M_1 M_2|^2 = r_1^2 + r_2^2$$

olmalıdır. Buradan, $r^2 + 5 = 8$ eşitliğinden $r^2 = 3$ olur. Yanıt B.

15. Aşağıdakilerden kaç tanesi \mathbb{R}^3 uzayının iki boyutlu bir alt uzayıdır?

- I. $\mathbb{V} = \{(x, y, z) : x = y = z\}$
 II. $\mathbb{V} = \{(x, y, z) : y = x\}$
 III. $\mathbb{V} = \{(x, y, z) : y = x + 1\}$
 IV. $\mathbb{V} = \{(x, y, z) : x = y + z\}$
 V. $\mathbb{V} = \{(x, y, z) : y = 0\}$
 VI. $\mathbb{V} = \text{Sp} \{(0, 1, 0); (1, 0, 0); (1, 1, 0)\}$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm : I. Alt uzaydır, doğru denklemdir. Boyutu 1'dir.
 II. Alt uzaydır, düzlem denklemdir. Boyutu 2'dir.
 III. Alt uzay değildir.
 IV. Alt uzaydır, düzlem denklemdir. Boyutu 2'dir.
 V. Alt uzaydır, düzlem denklemdir. Boyutu 2'dir.
 VI. Alt uzaydır, $(0, 1, 0)$ ve $(1, 0, 0)$ ile gerilen düzlem denklemdir. Boyutu 2'dir. Yanıt 4.

16. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin bir λ özdeğerine karşılık gelen özvektör $(1, 0, 1)$ ise λ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) -1 C) -2 D) 2 E) 0

Çözüm : $Au = \lambda u$ eşitliği sağlanmalı.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

eşitliğine göre, $\lambda = 2$ istenen özdeğerdir.

17. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi aşağıdaki polinomların hangisinin bir köküdür?

- A) $X^2 - 4X + I$ B) $X^2 - 4X + 2I$ C) $X^2 - 2X + 4I$
 D) $X^2 - 4X - 2I$ E) $X^2 + 2X + 4I$

Çözüm : Her matris kendi karakteristik polinomunu sağlar. Buna göre,

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 2$$

istenen polinomdur. Yanıt B.

18. $\det A = 12$ olan $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ matrisinin önce tersi alınıyor, sonra tersi 2 ile çarpılıyor ve devriği alınıyor. Elde edilen son matrisin üçüncü satırı 12 ile çarpılarak bir B matrisi elde ediliyor. B matrisinin determinanı kaçtır?

- A) 16 B) 8 C) 12 D) 6 E) 2

Çözüm : $\det A = 12$ ise,

Tersinin determinanı : $\frac{1}{12}$;

Tersinin 2 katının determinanı : $2^4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{4}{3}$;

Devriğinin Determinanı : $\frac{4}{3}$;

Üçüncü satırın 3 katı alınırsa, $\det B = 12 \cdot \frac{4}{3} = 16$ olur.

19. $L(x, y, z) = (x + z, z - y, z)$ şeklinde tanımlanan $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümünün tersi hangisidir?

- A) $L^{-1}(x, y, z) = (x - y, y - z, z)$
 B) $L^{-1}(x, y, z) = (x - y + z, y - z, z)$
 C) $L^{-1}(x, y, z) = (z, x, y)$
 D) $L^{-1}(x, y, z) = (x - z, z - y, z)$
 E) $L^{-1}(x, y, z) = (0, x, y + z)$

Çözüm : Bu lineer dönüşümün matrisi : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Tersini bulalım.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} S_1 \rightarrow S_1 - S_3 \\ S_2 \rightarrow S_3 - S_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] i$$

olduğundan, $L^{-1}(x, y, z) = (x - z, -y + z, z)$ olur. Yanıt D.

20. Aşağıdaki lineer denklem sisteminin çözümünün olması için a, b, c arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ -3x - 2y - z = b \\ -2x + 2z = c \end{cases}$$

- A) $a + b + c = 0$ B) $a - b + c = 0$ C) $-a + b + c = 0$
 D) $a - b + c = 0$ E) $-a - b + c = 0$

Çözüm : $Ax = B$ denklem sisteminde, A katsayılar matrisinin determinanı sıfırdan farklı ise, sistemin her zaman çözümü olur. Sorunun tutarlı olabilmesi için, katsayılar matrisinin determinanı sıfır olması gerekir. Sorunun zaten buna uygun verildiği görülebilir. Ama bunu kontrol etmeye gerek yok. Çözümün olması için $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ determinantları da sıfır olmalıdır. Buna göre, $\Delta_3 = 0$ eşitliğinden,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ -3 & -2 & b \\ -2 & 0 & c \end{vmatrix} = 4c - 4b - 4a = 0 \Rightarrow a + b - c = 0$$

elde edilir. (Δ_3 , katsayılar matrisinde z 'nin katsayılarının yerine B matrisinin yazılmasıyla elde edilen matrisin determinantını ifade eder.)

21. 144'den küçük olan ve 6 ile aralarında asal olan kaç pozitif tamsayı vardır?

- A) 36 B) 48 C) 32 D) 72 E) 64

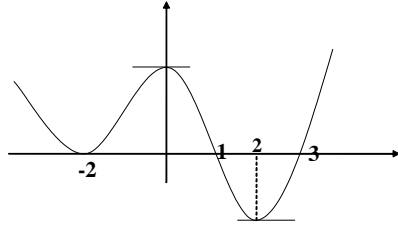
Çözüm : $144 = 2^4 \cdot 3^2$ olduğundan, 144'den küçük olan ve 144 ile aralarında asal olan tüm pozitif sayılar koşulu sağlar. Yani bizden istenen $\varphi(144)$ değeridir.
 $\varphi(144) = (2^4 - 2^3)(3^2 - 3^1) = 48$ olur.

22. Aşağıdaki limitlerden kaç doğrudur?

- I. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ II. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$
 III. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 1$ IV. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$
 V. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
 A) 5 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm : I. Yanlıştır. $x \rightarrow 0$ olsaydı, doğru olurdu. $x \rightarrow \infty$ iken $\sin x$ sınırlı olduğundan limit 0 olur.
 II. Doğrudur.
 III. Yanlıştır. x parantezine alınırsa, verilen limit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-1)x}{(1+1)x} = 0$ olur.
 IV. Doğrudur. Eşlenik alınırsa, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$ olur.
 V. Doğrudur. Yanıt 3.

23. Yandaki grafikte $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?



- I) $f'(-1) \cdot f'(1) < 0$
 II) $f'(-1) \cdot f'(2) = 0$
 III) $f'(1) \cdot f'(3) < 0$
 IV) $f''(-3) > 0$
 V) $f'(0) = 0$
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

Çözüm : Fonksiyon azalan iken türev negatif, artan iken türev pozitiftir. Maksimum ve minimum noktalarda türev sıfırdır. Ayrıca, fonksiyon konveks (∪) iken, ikinci türev pozitiftir. Buna göre, $f'(-1) < 0$, $f'(1) < 0$, $f'(2) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(-3) > 0$ olduğundan, I haricindekilerin tamamı doğrudur. Yanıt A.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}$ serisinin değeri hangisidir?

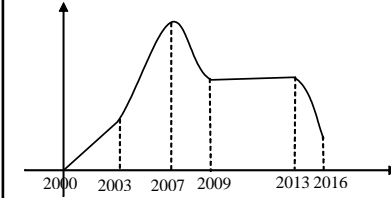
- A) $\sqrt{e} + 1$ B) $\frac{1}{2}$ C) \sqrt{e} D) e^2 E) $\sqrt{e} - 1$

Çözüm :
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ($x = \frac{1}{2}$) değerini arıyoruz. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ olduğundan, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n!} = \sqrt{e}$ olur.
 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n!} = \sqrt{e}$ eşitliğinden, yanıt $\sqrt{e} - 1$ bulunur.

25. C eğrisi, $r(t) = (t, t, 1)$, $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $\int_C (x + y^2 + 2z) ds$ integralini hesaplayınız.

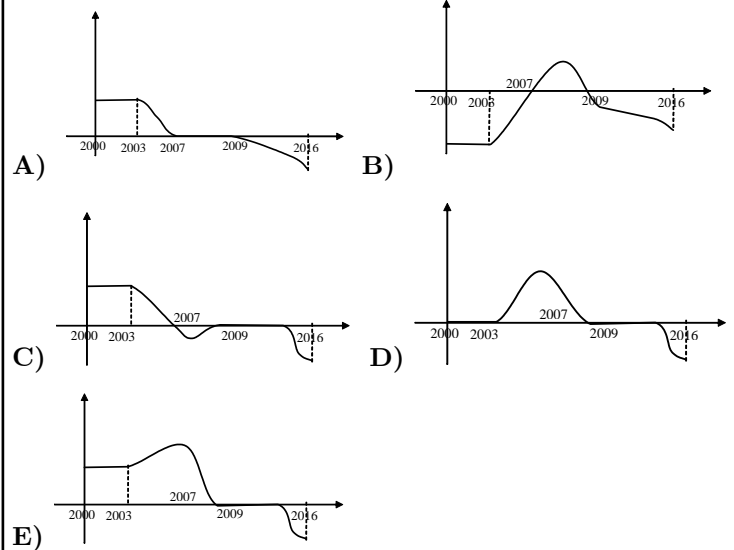
- A) $\frac{1}{6}$ B) 0 C) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ D) $\frac{17\sqrt{2}}{6}$ E) $\sqrt{2}$

Çözüm : $r(t) = (t, t, 1)$, $r'(t) = (1, 1, 0)$ ve $|r'(t)| = \sqrt{2}$ ve $ds = \|r'(t)\| dt$ olduğu kullanılırsa, $\int_C (x + y^2 + 2z) ds = \int_0^1 (t + t^2 + 2) \sqrt{2} dt = \frac{17\sqrt{2}}{6}$ elde edilir.



26. 2000 yılında kurulan bir fabrikanın, yıllara göre üretimi şekilindeki gibidir. 2000 ile 2003 yılları arasında üretim doğrusal olarak

artmış, 2003 yılında artış hızlandıktan sonra, 2007 yılında maksimum seviyeye ulaşmıştır. Bu yıldan sonra azalan üretim, 2009 ve 2013 arasında sabitlenmiş, 2013'den sonra hızla azalmıştır. Buna göre, bu fabrikanın yıllara göre üretim fonksiyonunun türevinin grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



Çözüm : Yanıt C. (2007'de maksimum olabilmesi için, türevinin 2007'den önce pozitif, 2007'den sonra negatif olması gerekir.)

27. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ olmak üzere, $\iint_B dx dy$ integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) π B) 2π C) 3π D) $\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{15\pi}{2}$

Çözüm : $\iint_B dx dy$ integrali bize doğrudan B bölgesinin alanını verir. Buna göre, istenen alan, $x^2 + y^2 = 1$ ve $x^2 + y^2 = 4$ çemberleri arasında kalan alan olduğundan, $\iint_B dx dy = 4\pi - \pi = 3\pi$ olur.

28. B bölgesi $x^2 + y^2 \leq 1$ ve $y \geq 0$ ile verilen bölge ise $\int \int_B \frac{2xdy}{x^2 + y^2 + 1}$ integralinin değeri aşağıdakilerden

hangisidir? (Kutupsal koordinatları kullanınız.)
A) π B) $\pi \ln 2$ C) $\frac{\pi}{2} \ln 2$ D) $\ln 2$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm : Verilen bölge göz önüne alırsa, $x = r \cos \theta$,
 $y = r \sin \theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ kutupsal koordinatlar dönüşümü ile

$$\int \int_R \frac{2xdy}{x^2 + y^2 + 1} = \int_0^\pi \int_0^1 \frac{2r \cos \theta}{r^2 + 1} dr d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left(\ln(r^2 + 1) \Big|_0^1 \right) d\theta = \int_0^\pi \ln 2 d\theta = \pi \ln 2$$

elde edilir.

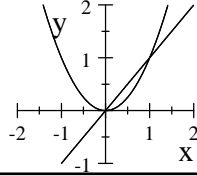
29. $y = x$ doğrusu ve $y = x^2$ parabolü ile sınırlanan bölge, B ise, $\int \int_B 3y^2 dy dx$ integralinin değeri aşağıdaki-
lerden hangisidir?

A) $\frac{3}{14}$ B) $\frac{3}{28}$ * C) $\frac{5}{14}$ D) $\frac{5}{28}$ E) $\frac{1}{14}$

Çözüm :

$y = x$ ve $y = x^2$ ile sınırlanan bölge için, $x^2 = x \Rightarrow x = 0$ ve $x = 1$ olduğundan, istenen integral :

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x 3y^2 dy dx = \frac{3}{28} \text{ elde edilir.}$$



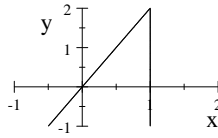
30. $\int_0^2 \left(\int_{y/2}^1 e^{x^2} dx \right) dy$ integralinin değeri nedir? (İpucu: İntegralleme sırasını değiştirin)

A) 1 B) $e - 1$ C) e D) $e + 1$ E) 4

Çözüm :

$$\int_0^2 \left(\int_{y/2}^1 e^{x^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} e^{x^2} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 2xe^{x^2} dx = e - 1 \text{ olur.}$$



31. X kesikli olasılık yoğunluk fonksiyonu

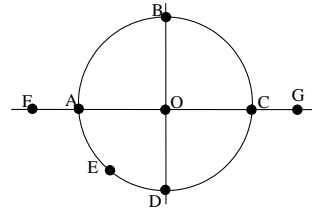
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{3^x}, & x = 1, 2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde verilmiştir. Buna göre X 'in beklenen değeri $E(X)$ kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm :

$$E(X) = \sum_{k=1}^2 kf(x) = 1f(1) + 2f(2) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{3} \text{ olur.}$$



A) $\frac{43}{56}$ B) $\frac{47}{56}$ C) $\frac{45}{56}$ D) $\frac{23}{28}$ E) $\frac{25}{28}$

Çözüm : Noktaların herhangi üçünü $\binom{8}{3} = 56$ farklı şekilde seçebiliriz. Aynı doğru üzerinde olan herhangi üçü nokta üçgen oluşturmaz. O halde, $56 - \binom{5}{3} - \binom{3}{3} = 56 - 10 - 1 = 45$ tanesi üçgen oluşturur. İstenen olasılık : $\frac{45}{56}$ olur.

33. X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$f(x) = \frac{k}{3^x}$, $x = 0, 1, 2, \dots$ şeklinde veriliyor. Buna göre k kaçtır?

A) 2 B) $\frac{2}{3}$ C) 3 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

Çözüm : Olasılık fonksiyonunun tanımı gereği :

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{k}{3^x} = 1$$

olmalıdır. Buna göre,

$$k \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^x = k \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3k}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

olur.

BONUS SORU : $3y + x = 4$ doğrusu, $P(1, 1)$ noktası etrafında, $\arctan 2$ açısı kadar saat yönünün tersine döndürülürse, denklemi ne olur?

A) $y = x$ B) $y = -x$ C) $y = x + 1$
D) $y = -2x$ E) $y + x = 1$

Çözüm : $\theta = \arctan 2$ ise $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ tür.

Nokta dönmesi söz konusu olduğundan,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dönüşümü kullanılmalıdır. $3y + x = 4$ doğrusunun doğrultmanı $\vec{u} = (3, -1)$ olduğundan, doğrunun döndürüldükten sonraki doğrultmanı

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden, $\vec{u}' = (1, 1)$ alınabilir. O halde, döndürülen doğru $P(1, 1)$ noktasından geçeceğinden,

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1}$$

eşitliğinden, $y = x$ elde edilir.

34. Aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

- I. \mathbb{Z}_{13}^* çarpım grubunun mertebesi 12'dir.
II. \mathbb{Z}_{12} toplam grubunun mertebesi 12'dir.
III. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ toplam grubunun mertebesi 4'tür.
IV. \mathbb{Z}_{40} toplam grubunun üreteç sayısı 20'dir.
V. \mathbb{Z}_{40} toplam grubunun 8 altgrubu vardır.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm :

- I. Doğrudur.
II. Doğrudur.
III. Yanlış. Mertebesi 8'dir.
IV. $40 = 2^3 \cdot 5$ ve $\varphi(40) = (2^3 - 2^2)(5 - 1) = 16$ olduğundan yanlıştır.
V. Doğru, $(3 + 1)(1 + 1) = 8$ altgrubu vardır.

35. Aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

1. \mathbb{Z} kümesi \mathbb{Q} kümesinin bir idealidir.
2. \mathbb{Q} kümesi bir cisimdir.
3. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bir tamlık bölgesidir.
4. \mathbb{Z}_{12} bir tamlık bölgesidir.
5. $\mathbb{Z}_6[x]$ bir tamlık bölgesidir.
6. $\mathbb{Z}[x]$ bir tamlık bölgesidir.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm : İdeal : H bir halka ve $I \subseteq H$ altalkası olsun. Eğer, $r \in H$ ve $x \in I$ için, $rx \in I$ ise I 'ya H 'nin sol ideali, $xr \in I$ ise, I 'ya H 'nin sağ ideali denir. Eğer, I , H 'nin hem sağ hem de sol ideali ise I 'ya H 'nin bir ideali denir.

Tamlık bölgesi, halka ile cisim arasında yer alan bir cebirsel yapıdır. Sıfır bölüneni içermeyen bir halka, bir tamlık bölgesidir. Tamlık bölgesinde sıfırdan farklı iki elemanın çarpımı sıfırdan farklıdır. **Eğer bir halkada, çarpımları sıfır olan iki eleman bulunabiliyorsa, bu halka tamlık bölgesi olamaz.** \mathbb{Z} tamsayılar kümesinde sıfırdan farklı iki sayının çarpımı sıfırdan farklı olduğundan bir tamlık bölgesidir.

I. Yanlış. \mathbb{Z} kümesi \mathbb{Q} kümesinin bir ideali değildir.

Çünkü, $2 \in \mathbb{Z}$ ve $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ için, $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ 'dir.

II. Doğru. \mathbb{Q} kümesi bir cisimdir.

III. Yanlış. Çünkü, $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için, $(0, 1)(1, 0) = (0, 0) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olduğundan, $(1, 0)$ bir sıfır bölendirdir. Sıfır bölenden olduğundan, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tamlık bölgesi olamaz.

IV. Yanlış. \mathbb{Z}_{12} sıfır bölene sahiptir. \mathbb{Z}_{12} nin sıfır böleneri $\{2, 3, 4, 6, 8\}$. O halde, \mathbb{Z}_{12} tamlık bölgesi değildir.

V. Yanlış. $\mathbb{Z}_6[x]$, katsayıları \mathbb{Z}_6 'nın elemanı olan polinom halkasını ifade eder. $3 \in \mathbb{Z}_6[x]$ bir sıfır bölendirdir. $2 \cdot 3 = 0$ olduğundan açıktır. \mathbb{Z}_6 yerine bir cisim alınsaydı, tamlık bölgesi olurdu.

VI. Doğru. $\mathbb{Z}[x]$ bir tamlık bölgesidir.

36. $(\mathbb{Z}_{25}, +, \cdot)$ halkasının sıfır bölenerinin sayısı kaçtır?

- A) 10 B) 5 C) 11 D) 4 E) 8

Çözüm : \mathbb{Z}_n halkasının sıfır bölenerinin sayısı : $SB(n)$

$$SB(n) = n - \varphi(n) - 1$$

ile bulunabilir. Buna göre, $\varphi(25) = \varphi(5^2) = 5^2 - 5 = 20$ olduğundan,

$$SB(25) = 25 - 20 - 1 = 4$$

elde edilir. Bunlar, 5, 10, 15, 20'dir.

37. $y(x)$, bir böcek türünün x günü sonundaki sayısını göstermektedir. Bu böceğin, günlere göre sayısının değişimi $\frac{dy}{dx} = 1 + 2x$ ile veriliyor. Buna göre, başlangıçta 50 böcek var ise, 10 gün sonunda kaç böcek olacaktır?

- A) 150 B) 160 C) 140 D) 110 E) 71

Çözüm : $y = \int dy = \int (1 + 2x) dx = x(x + 1) + c$ olduğundan, $y(0) = 50$ ise $c = 50$ ve $y(10) = 10(10 + 1) + 50 = 160$ bulunur.

38. $(2x - y + 2) dx + (x + y - 5) dy = 0$ diferansiyel denklemini hangi dönüşümle homojen diferansiyel denkleme indirgenir?

- A) $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 4 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y - 1 \end{cases}$ C) $\begin{cases} x = X - 4 \\ y = Y - 1 \end{cases}$
D) $\begin{cases} x = X - 3 \\ y = Y + 4 \end{cases}$ E) $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 4 \end{cases}$

Çözüm : $x = X + h$ ve $y = Y + k$ dönüşümünü yapılarak homojen hale indirgenebilir. Buna göre,

$$\begin{cases} 2h - k + 2 = 0 \\ h + k - 5 = 0 \end{cases}$$

eşitliğinden, $h = 1, k = 4$ bulunur. Yanıt E.

39. $2x^2 + y^2 = c$ elips ailesinin dik yörünge ailesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y^2 = cx$ B) $y = cx$ C) $y = cx^2$ D) $yx = c$ E) $y^2x = c$

Çözüm : $2x^2 + y^2 = c$ elips ailesinin diferansiyel denklemini

$$4x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x}{y}$$

şeklinde dir. Dik yörüngelerini denklemini bulmak için,

$$y' \rightarrow \frac{-1}{y'}$$

yazalım. Buna göre,

$$\frac{-1}{y'} = \frac{-2x}{y} \Rightarrow \frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y^2 = \ln x + \ln c$$

eşitliğinden, $y^2 = cx$ elde edilir. Yanıt A.

40. $y'' - 4y' + 13y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü aşağıdakilerin hangisidir?

- A) $c_1 e^{-2t} \cos 3t + c_2 e^{-2t} \sin 3t$
B) $c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$
C) $c_1 e^{2t} \cos 3t + c_2 e^{2t} \sin 3t$
D) $c_1 e^t \cos 3t + c_2 e^t \sin 3t$
E) $c_1 e^{3t} \cos 2t + c_2 e^{3t} \sin 2t$

Çözüm : $m^2 - 4m + 13 = 0$ denkleminde,

$$(m - 2)^2 = -9 \Rightarrow m - 2 = \pm 3i \Rightarrow m = 2 \pm 3i$$

bulunur. O halde genel çözüm : $m = a \pm bi$ için,

$$c_1 e^{at} \cos bt + c_2 e^{at} \sin bt$$

olduğundan, $c_1 e^{2t} \cos 3t + c_2 e^{2t} \sin 3t$ bulunur. Yanıt C.