VEKTÖREL ÇARPIM ve GEOMETRİK UYG.

Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Vektörel Çarpım

Tanım

Skaler çarpımın sonucu bir skaler değerdir. İki vektörün vektörel çarpımı ise bir vektördür. Uzayda $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ gibi iki vektörün vektörel çarpımı;

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre, iki vektörün vektörel çarpımının sonucunda yeni bir **vektör** elde edilir.

Örnek

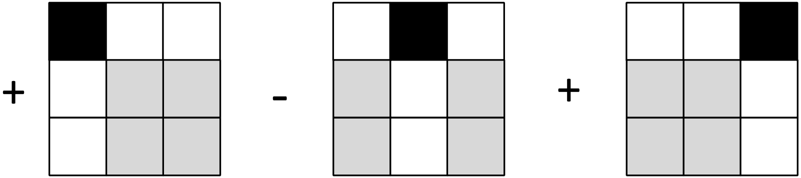
$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ **olduğuna göre,** $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ **vektörünü bulunuz.**

Çözüm

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \det \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (-4, -1, 2)$$

olur. Bu vektörün hem $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *hem de* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörüyle iç çarpımının sıfır olduğunu ve dolayısıyla* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörlerine dik olduğunu görünüz.*

Not : $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$ şeklinde hesaplanabilir.



Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 1, 2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1, 2, 1)$ *olduğuna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörünü bulunuz.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (-1, 2, 3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3, -2, 1)$ *olduğuna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörünü bulunuz.*

$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörel çarpımını, determinant yardımıyla tanımlamıştık. Determinantın özelliklerini kullanarak, vektörel çarpımın aşağıdaki özelliklerini kolayca yazabiliriz.

1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = -\overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (Vektörel çarpımın değişme özelliği yok)

Kanıt.

Vektörel çarpımın determinantlı tanımının doğrudan sonucudur. Determinantta iki satırın yeri değişirse, determinant işaret değiştirir. □

2. $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ (Bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı 0 vektörüdür.)

Kanıt.

Herhangi iki satırı aynı olan matrisin determinantının 0 olmasının sonucudur. □

3. $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $(\lambda \overrightarrow{\mathbf{x}}) \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \lambda (\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}})$

4. $\vec{\mathbf{0}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$

5. $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ için $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{y}}$. (Yani, $\overrightarrow{\mathbf{x}} \parallel \overrightarrow{\mathbf{y}}$ ise vektörel çarpım 0 vektörüdür.)

6. $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}}) = (\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}) + (\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}})$.

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1}, \mathbf{-2}, \mathbf{3})$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{-2}, \mathbf{4}, \mathbf{-6})$ **ise** $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = ?$

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{y}} = -2\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *olduğundan,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \parallel \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *olur ki,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}}$ *olur.*

Problem

Vektörel çarpımı $\vec{0}$ *olan iki vektör yazınız*.

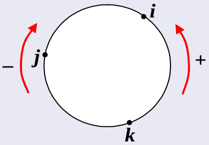
Örnek

$\mathbb{R}^3$ **uzayının $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ standart vektörleri için, $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{i}} = -\vec{\mathbf{k}}$ olduğunu gösteriniz.**

Çözüm

$\vec{\mathbf{i}} = (1,0,0)$, $\vec{\mathbf{j}} = (0,1,0)$ *ve* $\vec{\mathbf{k}} = (0,0,1)$ *olduğunu kullanacağız.*

$$\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\mathbf{i}}, \quad \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{i}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{\mathbf{k}}$$



biçiminde kolayca görülebilir. Standart birim vektörlerin vektörel çarpımında yandaki şekil kullanılabilir. $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}}$ *ve ters yönde* $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{i}} = -\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{j}} = -\vec{i}$ *ve* $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{k}} = -\vec{\mathbf{j}}$ *olur.*

Örnek

Vektörel çarpım işleminin birleşme özelliği var mıdır?

Çözüm

Vektörel çarpım işleminin birleşme özelliğinin olmadığını bir ters örnekle gösterebiliriz.
$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1,0)$ *vektörlerini alalım ve*
$(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}) \times \overrightarrow{\mathbf{z}} \neq \overrightarrow{\mathbf{x}} \times (\overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}})$ *olduğunu görelim.*

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,1) \quad \textit{ve} \quad \overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,-1)$$

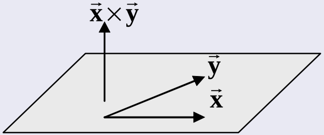
olduğundan,

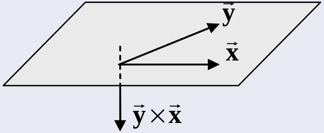
$$(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}) \times \overrightarrow{\mathbf{z}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,0), \ \overrightarrow{\mathbf{x}} \times (\overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}}) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,0,1)$$

elde edilir ki, $(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}) \times \overrightarrow{\mathbf{z}} \neq \overrightarrow{\mathbf{x}} \times (\overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}})$ *olduğundan, vektörel çarpımda birleşme özelliği yoktur.*

Teorem

Uzayda verilen iki vektörün vektörel çarpımı, çarpılan **her iki vektöre de dik** *olan yeni bir vektör verir.*





Kanıt.

$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \perp \overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \perp \overrightarrow{\mathbf{y}}$ olduğunu göstermek için,

$$\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için,
$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$ olduğundan,

$$\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle = x_2y_3x_1 - x_3y_2x_1 - x_1y_3x_2 + x_3y_1x_2 + x_1y_2x_3 - x_2y_1x_3 = 0,$$
$$\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = x_2y_3y_1 - x_3y_2y_1 - x_1y_3y_2 + x_3y_1y_2 + x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 = 0$$

bulunur. □

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{11})$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (-\mathbf{2}, \mathbf{7}, \mathbf{5})$ vektörlerinin her ikisine de dik olan bir vektör bulunuz.

Çözüm

Bu iki vektörün vektörel çarpımları, her ikisine de dik olan istenen vektörü verecektir.

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -62i - 32j + 20k$$

olduğundan, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (-62, -32, 20)$ *vektörü, hem* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *hem de* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörüne dik bir vektördür.*

NOT

Bir $\mathbb{V}$ vektör uzayının tabanındaki tüm vektörler birbirine dik ise, bu tabana $\mathbb{V}$ uzayının **ortogonal tabanı** *denir. Bu vektörlerin herbiri ayrıca birim vektör ise bu tabana* **ortonormal taban** *denir.*

Örneğin,

$$\left\{ \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = (1,2,2)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = (2,1,-2)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_3 = (2,-2,1) \right\}$$

tabanı bir ortogonal taban,

$$\left\{ \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{3}(2,1,-2)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1) \right\}$$

tabanı ise bir ortonormal tabandır.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayının $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,1)$ vektörünü içeren bir ortogonal tabanını bulunuz.

Çözüm

Önce, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,1)$ *vektörüne dik herhangi bir vektör alalım.* $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = 0$ *olacak şekilde,* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,-1,1)$ *vektörü alınabilir. Şimdi, ise, hem* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *hem de* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörüne dik bir vektör bulalım. Bu kez,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{z}}$ *alınabilir. Buradan,*

$$\overrightarrow{\mathbf{z}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3,0,-3)$$

olur ve $\left\{ \overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,1),\ \overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,-1,1),\ \overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,0,-1) \right\}$ *kümesi,* $\mathbb{R}^3$ *uzayının ortogonal bir tabanı olur. Ortonormal tabanı da her vektörü normuna bölerek*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \right\}$$

biçiminde elde edebiliriz. Siz de, farklı bir ortogonal taban bulunuz.

Örnek

$\overrightarrow{x} = (1,1,2)$ olmak üzere, $\overrightarrow{x}$ vektörüne dik ve birbirine dik olan, 2 br uzunluğunda iki vektör bulunuz.

Çözüm

$\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}$ *olacak şekilde,* $\overrightarrow{y} = (1,1,-1)$ *alınabilir. Hem* $\overrightarrow{x}$ *hem de* $\overrightarrow{y}$ *vektörüne dik vektör,*

$$\overrightarrow{z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3,0,3)$$

alınabilir. Fakat, uzunluklarının 2 br olmasını istiyoruz. Buna göre,

$$\overrightarrow{y}' = \frac{2\overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{y}\|} = \frac{2}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{z}' = \frac{2\overrightarrow{z}}{\|\overrightarrow{z}\|} = \frac{2}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$$

alınabilir.

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, -2)$ *olmak üzere,* $\mathbb{R}^3$ *uzayının* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *vektörünü içeren bir ortogonal tabanını bulunuz.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ *olmak üzere,* $\mathbb{R}^3$ *uzayının* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *vektörünü içeren bir ortonormal tabanını bulunuz.*

Teorem

$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^3$ *vektörleri için,*

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) \times \overrightarrow{\mathbf{z}} = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{y}} - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{x}}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt.

Alıştırma olarak bırakılmıştır. $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (z_1, z_2, z_3)$ için,

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) \times \overrightarrow{\mathbf{z}} = \; & \left(y_1 \left(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3\right) - x_1 \left(y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3\right),\right. \\
& y_2 \left(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3\right) - x_2 \left(y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3\right), \\
& \left. y_3 \left(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3\right) - x_3 \left(y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3\right)\right) \\
= \; & \left((y_1, y_2, y_3) \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle - (x_1, x_2, x_3) \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle\right. \\
= \; & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{y}} - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. $\square$

Teorem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında* $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right)$ *eşitliği yazılabilir.*

Kanıt.

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (z_1, z_2, z_3)$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle &= \langle (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1), (z_1, z_2, z_3) \rangle \\
&= x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 + x_1y_2z_3 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

eşitliğinden, $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right)$ elde edilir. $\square$

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 3, 4)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 1, 3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1, 1, 1)$ *vektörleri için,*
$\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right)$ *eşitliğinin sağlandığını görünüz.*

Teorem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında* $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle$ *eşitliği sağlanır.*

Kanıt.

Önceki teoremden, $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \det(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})$ olduğunu görmüştük.
Determinant özelliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle &= \det(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) \\
&= -\det(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) \\
&= \det(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) \\
&= \langle \overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle
\end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayında, $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle &= \det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right) \\
&= -\det\left(\overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \\
&= \det\left(\overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) \\
&= \langle \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında,* $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle = \begin{vmatrix} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \\ \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \end{vmatrix}$ *eşitliği sağlanır.*

Kanıt.

Bir önceki teoremi kullanırsak,

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle = \left\langle \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right) \times \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle$$

yazılabilir. Şimdi de, $\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right) \times \overrightarrow{\mathbf{z}} = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{y}} - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{x}}$ eşitliğini kullanıp, iç çarpımın lineerliğini kulanırsak,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle &= \left\langle \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right) \times \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle = \left\langle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{y}} - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \\ &= \begin{vmatrix} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \\ \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \end{vmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem

$\mathbb{R}^3$ uzayında verilen $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı Alan $(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})$ ise,

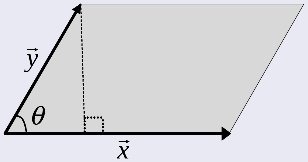
$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| \sin\theta = Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt.

$\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle$
şeklinde yazıp, Lagrange özdeşliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2 &= \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2 \\
&= \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2 - \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2 \cos^2\theta \\
&= \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right) = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2 \sin^2\theta
\end{aligned}$$



elde edilir. Paralelkenarın alanı : $Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| \sin\theta$ olduğundan, $\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| \sin\theta = Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$ bulunur. (Bunun sadece $\mathbb{R}^3$ de geçerli olduğunu unutmayınız!) $\square$

Örnek

$\mathbb{R}^3$ de verilen $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3,2,1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.

Çözüm

Yukarıdaki özellik kullanılarak,

$$Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\times\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| = \left\|\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right\| = \|(-4,8,-4)\| = 4\sqrt{6}$$

bulunur.

Örnek

$\mathbb{R}^4$ de verilen $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (0,1,2,3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3,2,1,0)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.

Çözüm

Uzayımız $\mathbb{R}^4$ olduğu için, vektörel çarpımlı alan formülü kullanılamaz. Bu kez,

$$Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2}$$

olduğunu kullanacağız. Buna göre,

$$Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \sqrt{14 \cdot 14 - 16} = 6\sqrt{5}$$

bulunur.

Örnek

Verilen iki $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörü için, $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|$ eşitlikleri sağlandığına göre, $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|$ değerini, $\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|$ ve $\left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|$ cinsinden belirleyiniz.

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ eşitliği, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörünün $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörüne dik olduğunu gösterir. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ birbirine dik değilse, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü için bir çözüm yoktur. O halde, $\overrightarrow{\mathbf{x}} \perp \overrightarrow{\mathbf{y}}$ için denklemin çözümünü yapalım. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ile $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ arasındaki açı θ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| &= \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \sin\theta \Rightarrow \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| = \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \sin\theta \\ \left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle &= \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \cos\theta \Rightarrow \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| = \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \cos\theta \end{aligned}$$

eşitliklerinin kareleri toplamından,

$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|^2 \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

olur. Buradan, $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = \sqrt{1 + \frac{\left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2}}$ *elde edilir.*

Karma Çarpım

Tanım

$\mathbb{R}^3$ uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörel çarpımıyla, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörünün iç çarpımına, $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörlerinin **karma çarpımı** denir. Yani, $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle$ değerine $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörlerinin karma çarpımı denir ve $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right]$ ile gösterilir. Yukarıda,

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle = \det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right)$$

olduğu göstermiştik. O halde, $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörlerinin karma çarpımı,

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right] = \det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle$ eşitliğine göre, bir karma çarpımda önemli olan vektörlerin sırasıdır. Vektörel çarpım işlemi, ilk iki veya son iki vektör arasında olabilir ve her iki değer de bu üç vektörün karma çarpımını verir.

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{4})$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ **olduğuna göre** $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = ?$

Çözüm

$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = \det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right)$ *tanımı kullanılarak*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7$$

elde edilir.

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}}=(1,0,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}=(0,2,1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}}=(1,2,0)$ *olduğuna göre* $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right]=?$

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}}=(1,k,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}=(3,2,1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}}=(1,2,0)$ *vektörlerinin karma çarpımı 0 ise* $k=?$

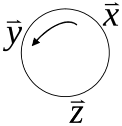
Aşağıdaki özellikler determinantın özelliklerinden kolayca görülebilir.

1. Vektörlerden ikisi eşit olan üç vektörün karma çarpımı 0'dır.

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right] = 0, \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right] = 0, \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right] = 0$$

2. $\lambda, k, m \in \mathbb{R}$ için, $\left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{x}}, k \overrightarrow{\mathbf{y}}, m \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = \lambda k m \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right]$

3. $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} + \lambda \overrightarrow{\mathbf{w}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] + \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right]$



4. $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right] = -\left[\overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right].$

Örnek

$\left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right] = 3$ **olduğuna göre,** $\left[\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y}, 3\overrightarrow{x} + 4\overrightarrow{z}\right]$ **karma çarpımını hesaplayınız.**

Çözüm

Determinant özelliklerini kulanırsak,

$$\left[\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y}, 3\overrightarrow{x} + 4\overrightarrow{z}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \\ 3\overrightarrow{x} + 4\overrightarrow{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{z} \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{z} \end{vmatrix} = 30$$

elde edilir.

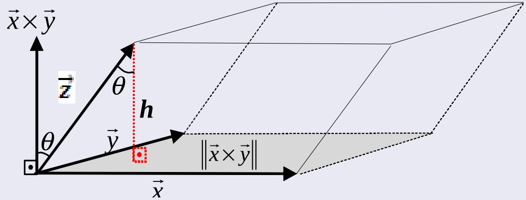
Problem

$\left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right] = 3$ *olduğuna göre,* $\left[3\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{z} - \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} + 3\overrightarrow{z}\right] = ?$

Teorem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında,* $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ *vektörlerinin karma çarpımının mutlak değeri,* $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ *vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlünün hacmini verir.*

Kanıt.



$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlüyü şekildeki gibi çizelim. Kanıtımızda vektörlerdeki üç önemli özelliğini kullanacağız.

i) $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$,
hem $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ hem $\overrightarrow{\mathbf{y}}$'ye diktir. O halde, $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ paralelyüzlünün yüksekliği doğrultusundadır.

ii) $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ile oluşturulan taban alanı $\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|$'dir.

iii) $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ ile $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ arasındaki açı θ ise, $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{z}}\right\| \cos\theta$ 'dır.

Buna göre, V hacimi göstermek üzere,

$$V = \text{Taban Alanı} \cdot \text{Yükseklik} = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| \cdot h = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{z}}\right\| \cos\theta = \left|\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle\right|$$

olur. □

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4})$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$ **vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlünün hacmini bulunuz.**

Çözüm

Karma çarpımın geometrik yorumu kullanılırsa,

$$Hacim\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right) = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right]\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

olur.

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (0, 2, 1)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (5, 3, 4)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1, 3, 1)$ *vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlünün hacmini bulunuz.*

Karma Çarpımın Geometrik Yorumunun Bazı Sonuçları

- ★ Üç vektörün karma çarpımının sıfır olması demek, hacim oluşmaması demektir. Yani, üç vektörün aynı düzlemde olması demektir.
- ★ Üç vektörün karma çarpımının sıfır olması demek, bu üç vektörün lineer bağımlı olması demektir.
- ★ Üç vektörün karma çarpımı sıfır ise, bu üç vektörün gerdiği uzayın boyutu 3'den kesinlikle küçüktür.
- ★ Üç vektörün karma çarpımı sıfır ise, bu üç vektörün oluşturduğu matrisin rankı 3'den kesinlikle küçüktür.
- ★ Üç vektörün karma çarpımı sıfırdan farklı ise, bu vektörler lineer bağımsızdır.
- ★ Karma çarpımı sıfırdan farklı olan üç vektör, $\mathbb{R}^3$ uzayını gererler.
- ★ Karma çarpımı sıfırdan farklı olan üç vektör, $\mathbb{R}^3$ uzayı için bir tabandır.

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{2})$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3})$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{k})$ **vektörleri lineer bağımlı ise k =?**

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ *vektörleri lineer bağımlı ise,* $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = 0$ *olmalıdır.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & k \end{vmatrix} = k - 5 = 0$$

eşitliğinden, $k = 5$ *bulunur.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (k,1,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,0,3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (2,1,k)$ *vektörleri lineer bağımlı ise* $k =$?

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ **vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.**

Çözüm

$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] \neq 0$ *ise* $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ *lineer bağımsız olur.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

olduğundan, $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ *vektörleri lineer bağımsızdırlar.*

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{k})$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ **vektörleri aynı düzlemde ise k =?**

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ *aynı düzlemde ise,* $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = 0$ *olmalıdır.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4k = 0$$

eşitliğinden, $k = 0$ *olur.*

Örnek

$\mathbf{A}\left(\mathbf{1,1,1}\right)$, $\mathbf{B}\left(\mathbf{1,2,3}\right)$, $\mathbf{C}\left(\mathbf{2,3,4}\right)$, $\mathbf{D}\left(\mathbf{1,4,k}\right)$ **noktaları aynı düzlemde ise** $\mathbf{k} =$**?**

Çözüm

Önce noktadan vektöre geçelim. $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{AD}$ *denilirse,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (0,1,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,2,3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (0,3,k-1)$ *olur.* $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ *aynı düzlemde ise,* $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = 0$ *olmalıdır.*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & k-1 \end{vmatrix} = 7 - k = 0$$

eşitliğinden, $k = 7$ *bulunur.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,k)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,3,1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (k,1,3)$ *vektörleri aynı düzlemde ise* $k =$?

Problem

$A(k,1,2)$, $B(1,0,3)$, $C(2,1,k)$ *ve* $D(1,1,1)$ *noktaları aynı düzlemde ise* $k =$?

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{0}, \mathbf{k}, \mathbf{3})$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ **vektörleri** $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ **uzayının bir tabanı ise k =?**

Çözüm

$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = 0$ *ise,* $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ *lineer bağımlı olur.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - k = 0$$

olursa, $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ *lineer bağımlı olur ve* $\mathbb{R}^3$ *için taban olamazlar. Yani,* $k \neq 3$ *için taban olurlar.*

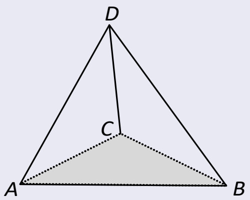
Teorem

Köşeleri A, B, C, D olan, $ABCD$ üçgensel piramidinin hacmi :

$$V = Hacim\,(ABCD) = \left|\frac{1}{6}\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$$

değerine eşittir.

Kanıt.



Üçgensel piramidin hacminin, $V = \dfrac{1}{3}\,(Taban\ Alanı)\cdot(Yükseklik)$ olduğunu hatırlayınız. Üçgensel piramidin taban alanı : $\dfrac{1}{2}\parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \parallel$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan, θ açısı, $\overrightarrow{AD}$ vektörüyle $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ arasındaki açı olmak üzere, yükseklik $\parallel \overrightarrow{AD} \parallel \cos\theta$ olduğundan, istenen hacim :

$$V = \frac{1}{3}\frac{1}{2} \parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \parallel \parallel \overrightarrow{AD} \parallel \cos\theta = \frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$$

elde edilir. $\square$

Örnek

Köşelerinin koordinatları A $(1,1,1)$,B $(1,2,3)$,C $(2,3,4)$,D $(1,4,2)$ olan üçgensel piramidin hacmini bulunuz.

Çözüm

$\overrightarrow{AB} = (0,1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{AD} = (0,3,1)$ *olduğundan,*

$$V = Hacim\,(ABCD) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{6}$$

elde edilir.

Problem

Köşelerinin koordinatları $A\,(0,0,0)$, $B\,(1,2,3)$, $C\,(3,0,0)$, $D\,(0,0,5)$ *olan üçgensel piramidin hacmini bulunuz.*

Teorem

$\mathbb{R}^3$ uzayında, tepe noktası E ve tabanının köşeleri A, B, C, D olan, $ABCDE$ dörtgensel piramidinin hacmi :

$$V = Hacim\,(ABCDE) = \left| \frac{1}{6} \left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) + \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}) \right) \right|$$

değerine eşittir.

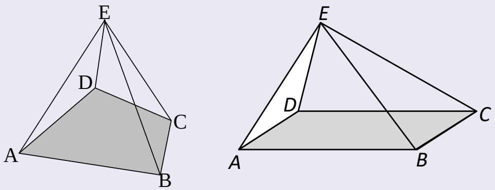
Kanıt.

Dörtgensel piramitin hacmini, iki üçgensel piramidin hacminin toplamı olarak yazıp sonuca ulaşacağız. Buna göre,

$$\begin{aligned} V\,(ABCDE) &= V\,(ABDE) + V\,(BCDE) \\ &= \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right] + \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}\right] \\ &= \frac{1}{6}\left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) + \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE})\right) \end{aligned}$$

değeri bize istenen hacmi verecektir. □

Kanıt.



Eğer özel olarak, piramidimizin alanı bir paralelkenar ise, iki üçgensel piramidin hacimleri aynı olacağından,

$$V\left(ABCDE\right)=\frac{1}{3}\left(\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})\right)$$

olur. □

Örnek

Tepe noktası E $(3,4,5)$ olan ve tabanının koordinatları A $(1,1,1)$, B $(1,2,3)$, C $(2,4,1)$, D $(3,2,k)$ olan dörtgensel piramidin hacmini bulunuz.

Çözüm

Öncelikle, A, B, C ve D noktalarının aynı düzlemde olması için k'nın değerini bulalım. Bunun için, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$ *olması gerektiğini kullanabiliriz. Buradan,*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & k-1 \end{vmatrix} = -k - 9 = 0$$

eşitliğinden, $k = -9$ *olur. Buna göre, dörtgensel piramidin hacmi:*

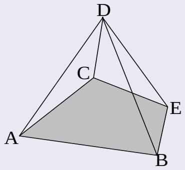
$$V = \frac{1}{6}\left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) + \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE})\right) = \frac{1}{6}\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -10 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -12 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right) = \frac{28}{3}$$

Örnek

Köşelerinin koordinatları A $(1,2,1)$, B $(3,5,1)$, C $(0,2,7)$, D $(1,1,1)$ ve E $(4,5,-4)$ olan dörtgensel piramidin hacmini bulunuz.

Çözüm

Öncelikle, hangi noktaların aynı düzlemde olduğu bulunmalıdır. Bir kaç denemeden sonra, A, B, C, E'nin düzlemsel ve dolayısıyla tabandaki dört nokta olduğu, D noktasının ise tepe noktası olduğu görülebilir. Buna göre istenen hacim :



.

$$V=\frac{1}{6}\left(\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})+\det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD})\right)=\frac{1}{6}\left(\begin{vmatrix}2&3&0\\-1&0&6\\0&-1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-3&-3&6\\1&0&-5\\-2&-4&0\end{vmatrix}\right)$$

eşitliğinden, $V=\dfrac{1}{6}(12+6)=3$ *elde edilir.*

KAYNAK

Mustafa Özdemir, Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınları, 4. Baskı, İzmir, 2019.