# VEKTÖRLER ve GEOMETRİK UYGULAMALARI

Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

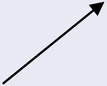
# Yönlü Doğru Parçası ve Vektör

## Tanım

Uç noktalarından birisi başlangıç, diğeri bitiş noktası olarak seçilen doğru parçasına **yönlü doğru parçası** denir. Başlangıç noktası $A$ ve bitiş noktası $B$ olan yönlü doğru parçasını $\overrightarrow{AB}$ ile gösteririz. Bu yönlü doğru parçasının uzunluğunu da $|AB|$ ile gösteririz. Bir yönlü doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğruya o **yönlü doğru parçasının taşıyıcısı** denir.

## Tanım

Vektör en basit tanımıyla, **doğrultuları, yönleri ve uzunlukları aynı olan,** yönlü doğru parçalarını temsil eden bir yönlü doğru parçasına verilen isimdir.



.

## Tanım

**Teorik Matematikte bir vektör uzayının her elemanına bir vektör denir.** Bu tanımı daha iyi anlayabilmek için, **vektör uzayı** tanımına ihtiyacımız var. Bu tanımı Lineer Cebir dersine bırakıyoruz. Kısaca ifade edersek, bu tanıma göre bir matrise, hatta bir fonksiyona dahi bir vektör olarak bakılabilir. Bu kitapta, biz bu tanımı kullanmayacağız.

## Tanım

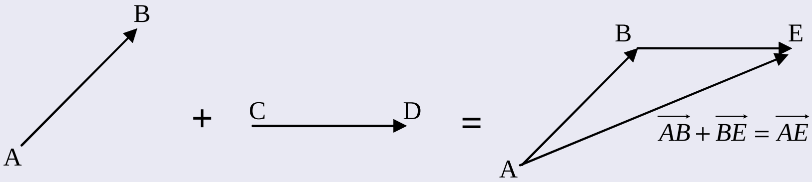
Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan yönlü doğru parçalarının denklik sınıfına **sıfır vektörü** denir ve $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ ile gösterilir. Vektörler, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ şeklinde başlangıç ve bitiş noktasını belirtilerek veya kısaca $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ şeklinde harflerle gösterilir.

## Tanım

Bir $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasını temsil eden vektör $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ise, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün uzunluğu $\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|$ ile gösterilir ve bu uzunluğa $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ **vektörünün normu** denilir. Vektörlerde uzunluk $\|...\|$ simgesiyle gösterilir.

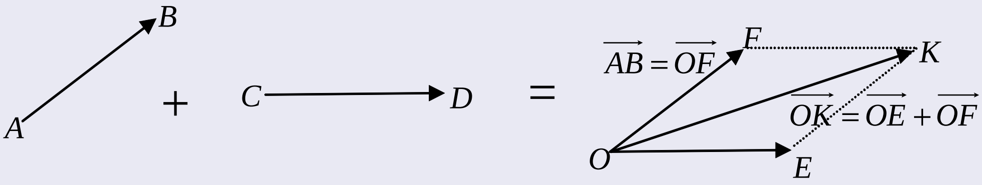
## Tanım

**i) İki vektörün toplanması :** İki $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörü verilsin. $\overrightarrow{CD}$ ye eş olan başlangıç noktası $B$ olan bir vektör $\overrightarrow{BE}$ ise, $\overrightarrow{AE}$ vektörüne $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörlerinin toplamı denir.



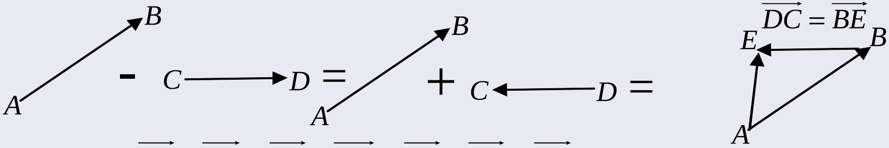
## Tanım

Verilen iki $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörünü, paralelkenar yöntemi olarak adlandırdığımız aşağıdaki yöntemle de toplayabiliriz. Bunun için, sabit bir $O$ noktası alıp, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörlerine eş olacak şekilde, başlangıç noktaları $O$ olan vektörler çizeriz. Bu iki vektörü, paralelkenara tamamlayarak, $O$ noktasından geçen köşegen vektörü çizererek, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörlerinin toplamını buluruz. Bu yönteme, **paralelkenar yöntemi** denir.



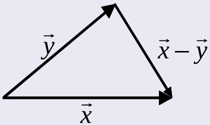
## Tanım

**ii) İki vektörün farkı :** $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörleri verilmiş olsun. $\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{CD})$ vektörüne $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörlerinin farkı denir.




$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$$

İki vektörün farkı kısaca,




biçiminde ifade edilebilir.

## Örnek

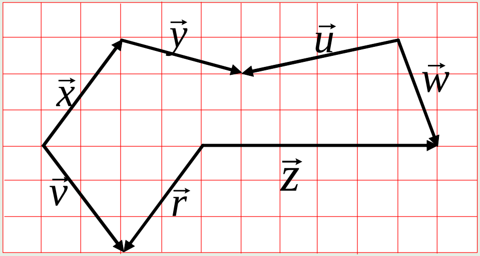
**Vektörlerde birleşme özelliğinin varlığını çizerek görünüz.**

## Çözüm

$(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$ *olduğu çizerek görelim.*

## Örnek

**Aşağıdaki şekilde 7 vektörün arasında bir işlem verilmiştir. Bu vektörler arasında nasıl bir ilişki vardır?**




## Çözüm

*Şekilden vektörlerin yönleri de dikkate alınarak,*

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{w}} - \overrightarrow{\mathbf{z}} + \vec{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$$

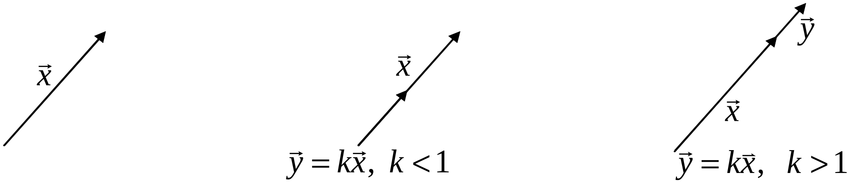
*yazılabilir. Buna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{z}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ *yazılabilir.*

# Bir vektörün bir reel sayı ile çarpılması

$\overrightarrow{\mathbf{u}}$ bir vektör ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. $k\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü, taşıyıcısı $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü ile aynı olan, yönü ise $k$ 'nın işaretine göre $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ile aynı veya zıt yönde olan bir vektör belirtir. $k\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün uzunluğu da $|k| \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|$ değerine eşittir. Bir $\overrightarrow{AB}$ vektörü için,

$$0 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{0}}, \qquad 1 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \quad \textit{ve} \quad (-1) \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

şeklindedir. Yani, herhangi bir $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünün ters vektörü, $-\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörüdür.



**Vektörlerde toplama işleminin aşağıdaki özellikleri vardır.**

**i)** Kapalılık özelliği vardır. (İki vektörün toplamı da bir vektördür.)

**ii)** Değişme özelliği vardır. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$.

**iii)** Birleşme özelliği vardır. $(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$.

**iv)** $\vec{\mathbf{0}}$ vektörü etkisiz elemandır. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} + \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$.

**v)** Her $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünün tersi vardır ve tersi $-\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörüdür.

Bu işlemlere göre, vektörler kümesi toplama işlemine göre bir değişmeli grup oluştururlar.

**Skalerle Çarmanın Özellikleri**

$\overrightarrow{\mathbf{x}}$ bir vektör ve $k, m \in \mathbb{R}$ olsun.

**i)** $k\overrightarrow{\mathbf{x}}$ bir vektördür. (Kapalılık)

**ii)** $k(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) = k\overrightarrow{\mathbf{x}} + k\overrightarrow{\mathbf{y}}$

**iii)** $(k+m)\overrightarrow{\mathbf{x}} = k\overrightarrow{\mathbf{x}} + m\overrightarrow{\mathbf{x}}$

**iv)** $k(m\overrightarrow{\mathbf{x}}) = (km)\overrightarrow{\mathbf{x}}$

**v)** $1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $k \cdot \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Vektör uzayı denilince, vektörlerde toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin tanımlandığı ve yukarıda verilen beşer özelliği sağlayan bir uzay kabul edilir.

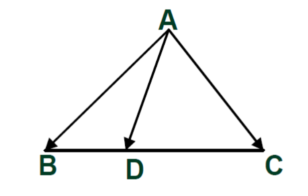
## Örnek

**Bir ABC üçgeninde, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$ ve $5\,|BD| = 4\,|DC|$ ise $\overrightarrow{AD}$ vektörünü $\overrightarrow{u}$ ve $\overrightarrow{v}$ cisinden bulunuz.**

## Çözüm

$\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *ve* $\overrightarrow{DC} = 5\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *diyelim.*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \quad ve \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$




*eşitliklerinden,*

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} + 4\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{u}} - 5\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{AD}$$

*olur ki, buradan* $\overrightarrow{AD} = \dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathbf{v}} + \dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *bulunur.*

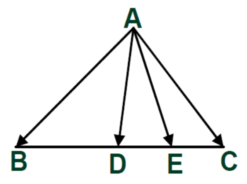
## Örnek

**Bir ABC üçgeninde, $|BD| = 2\,|DE| = 2\,|EC|$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{y}$ ise $\overrightarrow{BC}$ vektörünü $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ cinsinden bulunuz.**

## Çözüm

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{x} + \frac{\overrightarrow{BC}}{4} = \overrightarrow{y}$$

*eşitliğinden,* $\overrightarrow{BC} = 4\left(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\right)$ *bulunur.*




## Problem

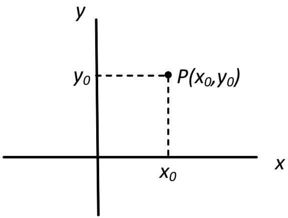
**Bir ABC üçgeninde, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{v}$, $5\,|BD| = 4\,|DC|$ *ve* $3\,|BE| = 2\,|EC|$ ise $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}$ vektörünü $\overrightarrow{u}$ ve $\overrightarrow{v}$ cisinden bulunuz.**

# Dik Koordinat Sistemi

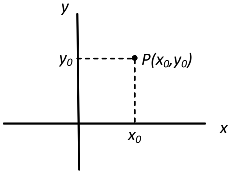
**Düzlemde dik koordinat sistemi**, yatay doğruya *x-ekseni* ve düşey doğruya da *y-ekseni* denilen iki dik doğrudan oluşur. Bu kesişen iki dik doğrunun kesişme noktasına **orjin** denir ve O ile gösterilir.

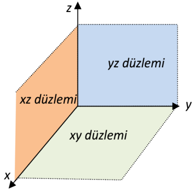
Örneğin, $x^2 + y^2 = 4$ denklemi, dik koordinat sisteminde yarıçapı 2 olan ve merkezi $(0, 0)$ olan bir çemberi ifade eder. Yani, $x^2 + y^2 = 4$ denklemi, dik koordinat sistemiyle anlam kazanır.

Bir geometrik şeklin denklemi, kartezyen koordinat sistemi kullanılarak yazılmış ise, bu denkleme bu şekilin **kartezyen denklemi** denir. Örneğin, $x^2 + y^2 = 4$, $(0, 0)$ merkezli, 2 yarıçaplı çemberin kartezyen denklemidir.

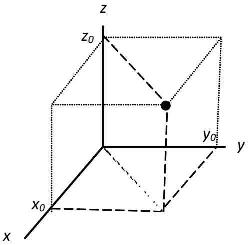


Dik koordinat sistemi, yani kartezyen koordinat sistemi, Descartes tarafından 1637 yılında geliştirilmiştir. Kartezyen koordinat sisteminde $x-$ *eksenine* **apsis**, ve $y-$ *eksenine* ise **ordinat** denir. Bu eksenler sayı doğrusu gibi düşünülerek herhangi bir noktanın koordinatları bulunur. Düzlemdeki bir $P$ noktasının koordinatı, $P$'den geçen ve bu eksenlere paralel olan doğruların, $x-$ *eksenini* ve $y-$ *eksenini* kestiği noktalara karşılık gelen sayılar sırasıyla $x_0$ ve $y_0$ olmak üzere, $P=(x_0,y_0)$ ikilisiyle gösterilir.




**Uzayda dik koordinat sistemi** için ise, üç boyutlu uzayda birbirine dik olan üç doğru alalım. Bu doğruların herbirini yine sayı doğrusu gibi düşünerek bir koordinat sistemi elde ederiz. Bu yönlü doğrulara $x,y,z$ eksenleri denilir. $x$ ve $y$ eksenlerinin bulunduğu düzleme $xoy-$ *düzlemi*, $x$ ve $z$ eksenlerinin bulunduğu düzleme $xoz-$ *düzlemi* ve $z$ ve $y$ eksenlerinin bulunduğu düzleme $yoz-$ *düzlemi* denir. Bu düzlemlere **koordinat düzlemleri** denilir. Genel olarak, üç boyutta dik koordinat sistemini şekildeki gibi gösteririz




Uzayda verilen bir $P$ noktasının koordinatlarını bulmak için, bu noktadan eksenlere paralel doğrular ve bu paralel doğruların koordinat düzlemlerini kestiği noktalardan da eksenlere dikmeler çizeriz. Bu dikmelerin belirttiği değerler sırayla $x_0, y_0$ ve $z_0$ olmak üzere, $P$ noktasının koordinatları, $(x_0, y_0, z_0)$ şeklinde ifade edilir. Buna göre, üç boyutlu uzayın noktaları ile,

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

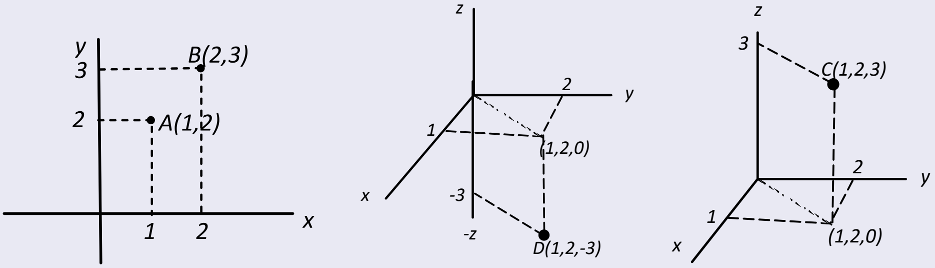
kümesinin elemanları arasında birebir, örten bir eşleme kurulmuş olur.

## Örnek

**A $(1,2)$ , B $(2,3)$ , C $(1,2,3)$ , D $(1,2,-3)$ noktalarını dik koordinat sisteminde gösteriniz.**

## Çözüm

*A ve B noktaları düzlemde, C ve D noktaları ise uzayda verilmiştir. Buna göre, şekillerdeki gibi gösterebiliriz.*



## Teorem

*$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık,,*

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

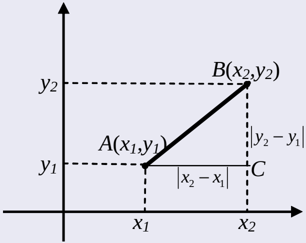
*ile bulunur.*

## Kanıt.

Şekile göre, $|AC| = |x_2 - x_1|$ ve $|CB| = |y_2 - y_1|$ dir. ABC dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

olacağından, $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ elde edilir.




. $\square$

### Örnek

**A $(1,2)$ ve B $(3,5)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.**

### Çözüm

$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{13}$ *elde edilir.*

### Teorem

*$A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık,*

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

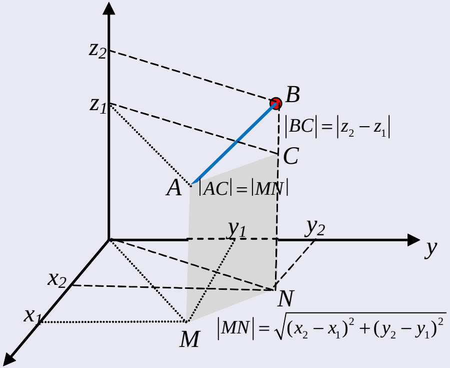
*ile bulunur.*

## Kanıt.

Şekilden izlenirse, *xoy* düzlemindeki $|MN|$ uzunluğunun, $|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ olduğu görülür. $|AC| = |MN|$ olduğu gözönüne alınırsa, Pisagor teoreminden,

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

elde edilir



## Örnek

**Uzayda A $(1,2,3)$ ve B $(-2,3,5)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.**

## Çözüm

$|AB| = \sqrt{(-2-1)^2+(3-2)^2+(5-3)^2} = \sqrt{14}$ *elde edilir.*

## Problem

*Uzayda,* $P(2,3,4)$ *ve* $Q(1,3,5)$ *noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.*

# n Boyutta İki Nokta Arasındaki Uzaklığın Hesaplanması

## Teorem

*$A\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ ve $B\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ noktaları arasındaki uzaklık,*

$$|AB| = \sqrt{\left(y_1 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - x_2\right)^2 + \cdots + \left(y_n - x_n\right)^2}$$

*ile bulunur.*

## Örnek

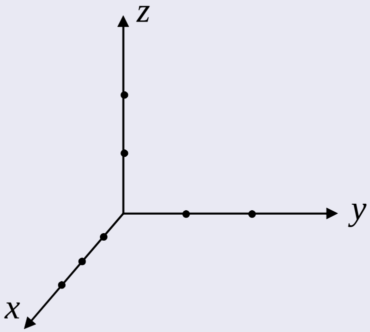
**$\mathbb{R}^5$ uzayında A $(1, 2, 3, 0, -1)$ ve B $(1, 2, -2, 3, 5)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.**

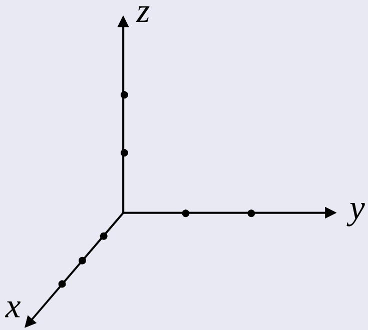
## Çözüm

$$|AB| = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2 + (-2-3)^2 + (3-0)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{70}.$$

## Problem

*Uzayda,* $P\,(3,2,1)$ , $P\,(1,-2,2)$ *noktalarının koordinatlarını çizerek gösteriniz.*



## Örnek

**Düzlemde $y = 2x - 3$ doğrusu üzerindeki hangi noktaların orjine uzaklığı $3\sqrt{2}$ birimdir?**

## Çözüm

*Doğru üzerindeki herhangi bir noktayı,* $(x, 2x-3)$ *ile ifade edebiliriz.*

$$\sqrt{(x-0)^2 + (2x-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

*eşitliğinden,* $x = 3$ *ve* $x = -3/5$ *olur. İstenen noktalar :* $A(3,3)$ *ve* $B(-3/5, -21/5)$ *noktalarıdır.*

# Çember - Küre - Hiperküre Denklemi

### Tanım

Düzlemde sabit bir noktadan sabit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **çember**,

### Tanım

uzayda sabit bir noktadan sabit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **küre**,

### Tanım

$n > 3$ boyutlu uzaylarda ise sabit bir noktadan, sabit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **hiperküre** denir.

**Denklemleri :** Sabit noktayı $M$ ile gösterelim. Bu noktaya **merkez** denir. Değişken nokta ise $P$ olsun. Buna göre, iki nokta arasındaki uzaklık formülünü kullanarak, çember, küre ve hiperküre denklemini

$$|PM| = r$$

ile ifade edebiliriz. Buradaki $r$ değeri sabit sayıdır ve yarıçap olarak adlandırılır.

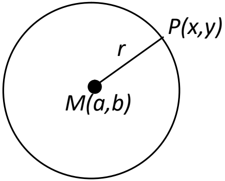
# Çember - Küre - Hiperküre Denklemi

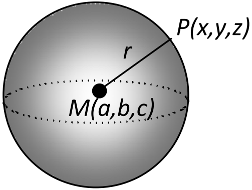
$\mathbb{R}^2$ uzayında, değişken nokta $P(x, y)$, merkez $M(a, b)$ ve yarıçap $r$ ise çember denklemi,

$$|PM| = r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2;$$

$\mathbb{R}^3$ uzayında değişken nokta $P(x, y, z)$, merkez $M(a, b, c)$ ve yarıçap $r$ ise küre denklemi,

$$|PM| = r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2;$$



# Konum Vektörü

## Tanım

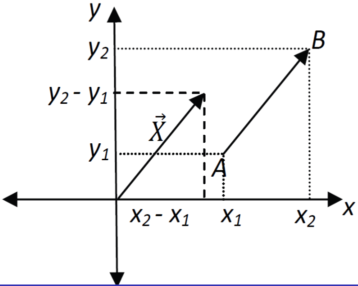
Verilen bir $\overrightarrow{AB}$ vektörüne eş olup, başlangıç noktası orjin olan sadece bir $\overrightarrow{OX}$ vektörü çizilebilir ve bu vektör kısaca $\vec{\mathbf{X}}$ ile gösterilir. Bu vektöre, $\overrightarrow{AB}$ vektörünün **konum vektörü** denir. Konum vektörü yardımıyla vektörlerde işlemler daha kolay hale gelir. Bir $\vec{\mathbf{X}}$ konum vektörünü, uzayın boyutuna göre bileşenleriyle göstermek mümkündür. Böylece, vektörlerle yapılan işlemlerde şekillerle uğraşma yerine, koordinatları kullanırız. Örneğin, düzlemde dik koordinat sisteminde, bir konum vektörünü $\vec{\mathbf{X}} = (x, y)$ şeklinde göstermek mümkündür.

**i)** Düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarını birleştiren $\overrightarrow{AB}$ vektörünü, konum vektörü ile

$$\vec{\mathbf{X}} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

şeklinde gösterebiliriz.

**ii)** Uzayda dik koordinat sisteminde ise, $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktalarını birleştiren $\overrightarrow{AB}$ vektörünü, konum vektörü ile $\vec{\mathbf{X}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ şeklinde gösterebiliriz.

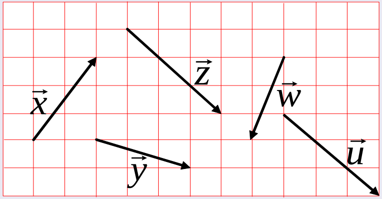


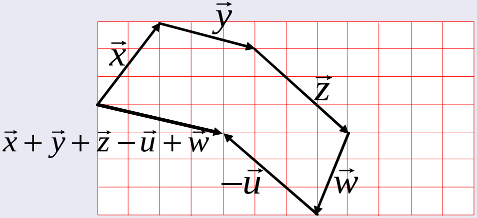
## Örnek

**Yandaki kareli düzlemde $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{u}$ ve $\overrightarrow{w}$ vektörleri verilmiştir. Buna göre, $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}-\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$ vektörünün konum vektörünü bulunuz.**

## Çözüm

*Uç uca ekleme yöntemiyle kolayca bulunabilir.*

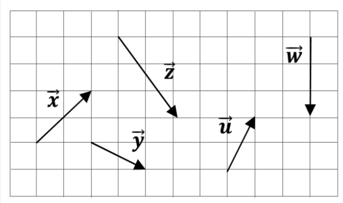



*Şekilden de, görüldüğü gibi* $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}-\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$ *vektörünün konum vektörü* $(4,-1)$ *vektörüdür.*

## Problem

*Aşağıdaki vektörler için,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} + 2\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}} - \overrightarrow{\mathbf{w}} - 2\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *vektörünün konum vektörünü bulunuz.*




## Örnek

**$\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{AC}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{CD}} - \overrightarrow{\mathbf{AD}}$ toplamını hesaplayabilmek için hangi iki noktanın koordinatının verilmesi yeterlidir.**

## Çözüm

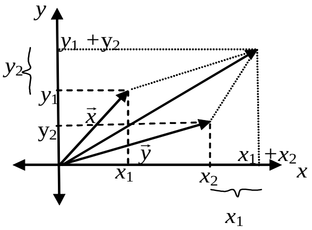
*Verilen ifadeyi* $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) - \overrightarrow{AD} + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} = D - A$ *şeklinde yazabiliriz. Buna göre, A ve D noktalarının koordinatlarının verilmesi yeterlidir.*

# Dik Koordinatlarla Vektörlerde İşlemlerin Yapılması

$\mathbb{V}$ kümesi $n$ boyutlu vektörlerin kümesi olsun. $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ ise, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ şeklinde olacaktır. Buna göre,

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

şeklinde tanımlanır. Bu toplamı daha somut olarak görmek için, örneğin düzlemdeki iki $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, y_1)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (x_2, y_2)$ vektörlerini alalım. paralelkenar yöntemiyle şekildeki gibi bu iki vektörün toplamı bulunabilir.




Bulunan bu vektörün bileşenleri $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ şeklinde olacaktır.

Bir vektörün skalerle çarpımı da, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\lambda \overrightarrow{\mathbf{x}} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \in \mathbb{V}$$

şeklinde tanımlanır. Daha önce verilen vektörlerin toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin özelikleri, konum vektörleri üzerinde tanımlanan bu toplama ve skalerle çarpma işlemi kullanılarak kolayca görülebilir.
Örneğin, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere, $k(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) = k\overrightarrow{\mathbf{x}} + k\overrightarrow{\mathbf{y}}$ özeliğini gösterelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} k\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) &= k\left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n\right) = \left(k\left(x_1 + y_1\right), k\left(x_2 + y_2\right), ..., k\left(x_n + y_n\right)\right) \\ &= \left(kx_1 + ky_1, kx_2 + ky_2, ..., kx_n + ky_n\right) = \left(kx_1, kx_2, ..., kx_n\right) + \left(ky_1, ky_2, ..., ky_n\right) \\ &= k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) + k\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = k\overrightarrow{\mathbf{x}} + k\overrightarrow{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

elde edilir.

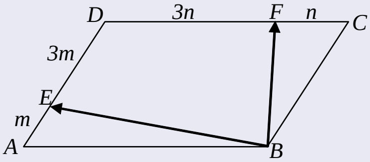
## Örnek

**Bir ABCD paralelkenarında, $[AD]$ üzerinde, $|ED| = 3\,|AE|$ olacak şekilde bir E noktası, $[CD]$ üzerinde de $|DF| = 3\,|CF|$ olacak şekilde bir F noktası alınıyor. $B(2,3,4,5)$ ve $D(6,7,4,13)$ olduğuna göre, $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}$ vektörlerinin toplamını bulunuz.**

## Çözüm

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$




*olduğundan,*

$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} = \frac{5}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{5}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{5}{4}\overrightarrow{BD} = \frac{5}{4}(D - B)$$

*olur ki, buradan* $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} = (5,5,0,10)$ *elde edilir.*

## Problem

*Bir ABCD paralel kenarında,* $[AD]$ *üzerinde,* $|ED| = 2|AE|$ *olacak şekilde bir* $E$ *noktası,* $[CD]$ *üzerinde de* $|DF| = 2|CF|$ *olacak şekilde bir* $F$ *noktası alınıyor.* $B(1,2,3,4,1)$ *ve* $D(4,2,9,4,4)$ *olduğuna göre,* $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}$ *vektörlerinin toplamını bulunuz.*

# Vektörün Normu ve Birim Vektör

## Tanım

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ vektörünün uzunluğu, $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|$ ile gösterilir ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ **vektörünün normu** denir

$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$$

şeklinde tanımlanır. Uzunluğu 1 br olan vektöre **birim vektör** denir. Sıfır vektöründen farklı her vektör, uzunluğuna bölünerek aynı yönde bir birim vektör elde edilebilir. $\overrightarrow{\mathbf{u}} \neq \vec{0}$ için,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_b = \frac{\overrightarrow{\mathbf{u}}}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|}$$

vektörü daima birim vektördür. $\mathbb{R}^2$ deki $\vec{\mathbf{e}}_1 = (1, 0)$ ve $\vec{\mathbf{e}}_2 = (0, 1)$ vektörlerine **standart birim vektörler** denir. $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 1)$ bir birim vektör değildir. Çünkü, $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = 2$'dir. Fakat,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_b = \frac{\overrightarrow{\mathbf{u}}}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

vektörü bir birim vektördür.

Örneğin, düzlemde bir $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ konum vektörünün uzunluğunun,

$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2},$$

ve $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bir $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ konum vektörünün uzunluğunun ise,

$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

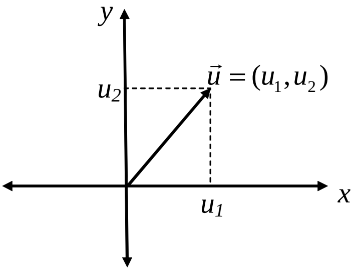
şeklinde olduğu Pisagor teoreminden kolayca görülebilir.
Başlangıç noktası $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ ve bitiş noktası $B(b_1, b_2, ..., b_n)$ olan bir $\overrightarrow{AB}$ vektörünün konum vektörü,

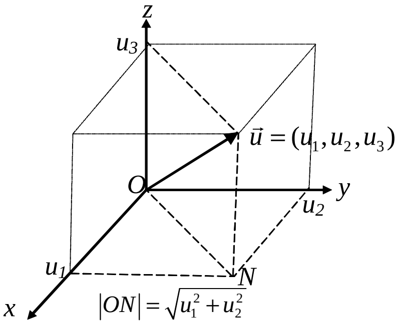
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n)$$

olduğundan, $\overrightarrow{AB}$ vektörünün normu

$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + ... + (b_n - a_n)^2}$$

şeklinde olacaktır.




## Problem

$\mathbb{R}^5$ *'de* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (2,3,4,1,2)$ *vektörünün uzunluğunu bulunuz.*

## Problem

$\mathbb{R}^5$ *'de uzunluğu tamsayı olan, tamsayılardan oluşan bir vektör bulunuz.*

## Örnek

**$\mathbb{R}^4$ uzayında tüm bileşenleri aynı olan bir birim vektör yazınız.**

## Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{u}}=(1,1,1,1)$ *vektörünü alalım.* $\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| = 2$ *olduğundan birim vektör değildir. Fakat,*

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_b = \frac{\overrightarrow{\mathbf{u}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

*tüm bileşenleri aynı olan, bir birim vektördür.*

## Örnek

**$\mathbb{R}^5$ uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},k,\frac{2}{5}\right)$ vektörü birim vektör ise k kaçtır?**

## Çözüm

$\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+k^2+\frac{4}{25}} = \sqrt{k^2+\frac{91}{100}} = 1$ *eşitliğinden,* $k = -3/10$ *ve* $k = 3/10$.

Bir uzayda sadece bir bileşenin 1 ve diğer bileşenlerin 0 alınmasıyla elde edilen tüm birim vektörlere **standart birim vektörler** denir. Bu vektörleri genel olarak $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, ..., \vec{\mathbf{e}}_n$ ($\mathbb{R}^n$ uzayında) veya $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ ($\mathbb{R}^3$ uzayında) şeklinde gösteririz.$\mathbb{R}^n$ uzayında, $\vec{\mathbf{e}}_s$ standart birim vektöründe, $s - inci$ bileşen 1 diğer bileşenler ise 0'dır. Buna göre,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \text{ olmak üzere, } \vec{\mathbf{e}}_s = (\delta_{s1}, \delta_{s2}, ..., \delta_{sn})$$

şeklinde yazılabilir. Örneğin, düzlemde standart birim vektörler, $\vec{\mathbf{e}}_1=(1,0)$ ve $\vec{\mathbf{e}}_2=(0,1)$ şeklindedir. Yine üç boyutlu uzayda standart birim vektörler,

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{i}} = (1,0,0)\,,\ \vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{j}} = (0,1,0) \text{ ve } \vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\mathbf{k}} = (0,0,1)$$

vektörleridir.

## Teorem

*A ve B noktalarını birleştiren $[AB]$ doğru parçasını alalım. $C \in [AB]$ olmak üzere, C noktasının koordinatları*

$$C, \quad [AB] \text{ 'nin içinde ve } \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{m}{n} \text{ ise, } C = \frac{nA + mB}{n+m},$$

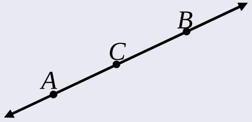
$$C, \quad [AB] \text{ 'nin dışında ve } \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{m}{n} \text{ ise, } C = \frac{nA - mB}{n-m},$$

*ile bulunur.*

## Kanıt.

$C$, $[AB]$'nin içindeyse, $n\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{CB}$ eşitliğini kullanacağız.

$$n\,(C - A) = m\,(B - C)$$




eşitliğinden, $C = \dfrac{nA + mB}{n+m}$ bulunur. Benzer şekilde, $C$, $[AB]$'nin dışındaysa, $n\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{BC}$ eşitliğinden, $C = \dfrac{nA - mB}{n-m}$ olur. $\square$

## Sonuç

*$\mathbb{R}^n$ uzayında verilen bir $[AB]$ doğru parçasının orta noktasının koordinatları*

$$\frac{A+B}{2}$$

*olur. Örneğin, uzayda $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere, $[AB]$ doğru parçasının orta noktası*

$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

*biçimindedir.*

## Teorem

*$\mathbb{R}^3$ uzayında köşelerinin koordinatları $A(x_1, x_2, x_3)$, $B(y_1, y_2, y_3)$ ve $C(z_1, z_2, z_3)$ olan üçgenin ağırlık merkezinin koordinatları*

$$G\left(\frac{x_1+y_1+z_1}{3}, \frac{x_2+y_2+z_2}{3}, \frac{x_3+y_3+z_3}{3}\right)$$

*ile bulunur.*

## Kanıt.

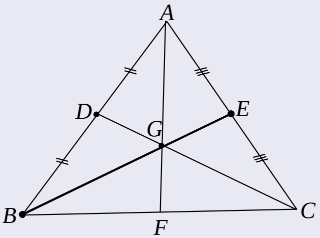
$F$ noktası, $[BC]$'nin orta noktası olduğundan,

$F\left(\frac{y_1+z_1}{2}, \frac{y_2+z_2}{2}, \frac{y_3+z_3}{2}\right)$

olur. $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GF}$ vektör eşitliğinden,

$$G - A = 2(F - G) \Rightarrow G = \frac{A+2F}{3},$$

$$G\left(\frac{x_1+y_1+z_1}{3}, \frac{x_2+y_2+z_2}{3}, \frac{x_3+y_3+z_3}{3}\right).$$



## Örnek

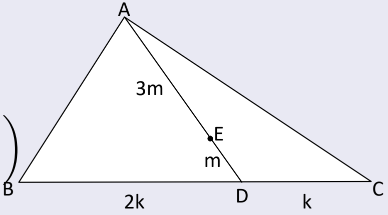
**Düzlemde dik koordinatlarda köşeleri $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan bir üçgen veriliyor. $D \in [BC]$ ve $|BC| = 3\,|DC|$ ve $E \in [AD]$ olmak üzere $|AD| = 4\,|ED|$ olsun. O halde, E noktasının koordinatlarını bulunuz.**

## Çözüm

*Verilenlere göre,*

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{2}{1} \Rightarrow D = \frac{B+2C}{3} = \left(\frac{2x_3+x_2}{3}, \frac{2y_3+y_2}{3}\right)$$

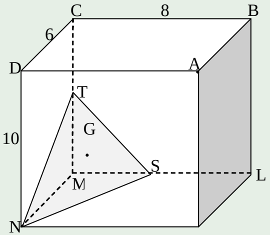
$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{3}{1} \Rightarrow E = \frac{A+3D}{4} = \left(\frac{x_1+2x_3+x_2}{4}, \frac{y_1+2y_3+y_2}{4}\right)$$




*elde edilir.*

## Örnek

**Yandaki şekilde dikdörtgenler prizması şeklindeki bir odanın bir köşesine üçgensel bir karton ile şekildeki gibi bir bölme oluşturulmuştur. T noktası $[CM]$'nin, S noktası da $[ML]$'nin orta noktasıdır. A köşesinin bu üçgensel kartonun ağırlık merkezine uzaklığını bulunuz.**




.

## Çözüm

*M noktasını orjin, MN'yi x ekseni, ML'yi y ekseni ve MC'yi de z ekseni kabul edersek, üçgenin köşelerinin koordinatları* $N(6,0,0)$ , $S(0,4,0)$ *ve* $T(0,0,5)$ *olacağından, NST üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatları da* $G(2,4/3,5/3)$ *olur. Diğer yandan, A noktasının koordinatları da* $A(6,8,10)$ *olduğundan,*

$$|GA| = \sqrt{(6-2)^2 + (8-4/3)^2 + (10-5/3)^2} = \sqrt{1169}/3$$

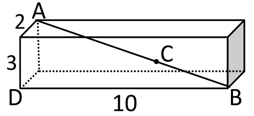
*elde edilir*

## Problem

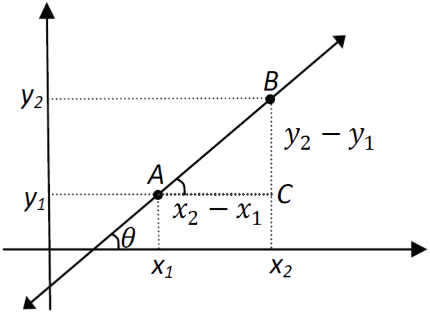
*Düzlemde köşelerini koordinatları* $A(3,0)$, $B(2,3)$ *ve* $C(7,8)$ *olan üçgenin,* $[BC]$ *kenarı üzerinde,* $2|BD| = 3|CD|$ *olacak şekilde bir* $D$ *noktası ve* $[AC]$ *kenarı üzerinde de,* $|AE| = 3|CE|$ *olacak şekilde bir* $E$ *noktası alınıyor.* $|ED|$ *kaçtır?*

## Problem

*Şekildeki dikdörtgenler prizmasının $A$ ve $B$ köşelerini birleştiren doğru parçası üzerinde, $|AC| = 3|CB|$ olacak şekilde bir $C$ noktası alınıyor. Buna göre $C$ noktasının, $D$ noktasına uzaklığını hesaplayınız.*



Düzlemde, bir doğrunun $x$ ekseniyle yaptığı açının tanjantına **doğrunun eğimi** denir. Düzlemde, **eğim** bize bir **doğrunun doğrultusunu** net olarak söyler. Fakat, daha büyük boyutlarda eğimden söz etmek anlamlı değildir. Dolayısıyla, doğrunun doğrultusunu ancak bir **vektör** yardımıyla belirtebiliriz. Kısaca hatırlamak gerekirse, düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi :




$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ile bulunabilir. Eğimi bilinen ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen bir doğrunun denkleminin $y - y_1 = m(x - x_1)$ biçiminde ifade edileceğini, lise bilgilerinden iyi biliyoruz. Bu bölümde, vektörlerin de doğrunun analitiğinde nasıl kullanıldığını göreceğiz.

## Teorem

*Düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi*

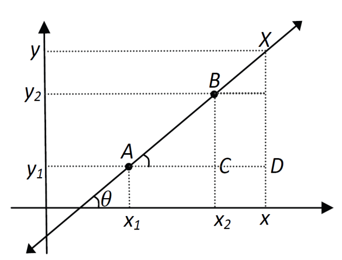
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

*ile bulunur.*

## Kanıt.

Doğru

üzerinde değişken bir $X(x, y)$ noktası alalım ve $ABC \sim AXD$ benzerliğini kullanalım. Buna göre, $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|XD|}{|BC|}$ eşitliğinden, doğru denklemi $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ olarak bulunabilir.




. □

# Vektörel Kanıt

**Kanıt.**

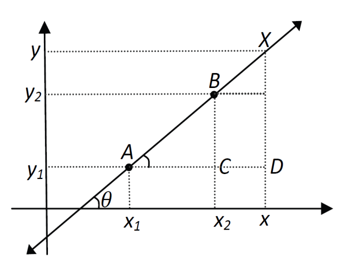
Bunun için, eğim yerine doğrunun doğrultusunu ifade eden bir $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü bulacağız. $A$ ve $B$ noktalarını bildiğimiz için, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{AB}$ alınabilir. Buna göre, $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$ eşitliğini kullanırsak,

$$(x - x_1, y - y_1) = \lambda\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

eşitliğinden $\lambda$ çekilirse,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \lambda$$

elde edilir. (Bu yöntemin tüm boyutlarda uygulanabileceğini fark ettiniz mi?) □



### Örnek

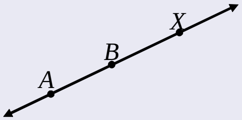
**A $(1,2)$ ve B $(2,5)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini vektörel yöntemi kullanarak bulunuz.**

### Çözüm

*$X(x,y)$ değişken noktası için, $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$ vektörel eşitliğinden,*

$$(x-1, y-2) = \lambda(2-1, 5-2)$$

*olur. Buradan,* $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \lambda$ *elde edilir.*




.

## Örnek

**A $(1,2,3)$ ve B $(2,5,7)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini vektörel yöntemi kullanarak bulunuz.**

## Çözüm

*Vektörel yöntemin tüm boyutlarda kullanılabileceğini belirtmiştik. Buna göre,* $X(x,y,z)$ *değişken noktası için,* $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$ *vektörel eşitliğinden,*

$$(x-1, y-2, z-3) = \lambda(2-1, 5-2, 7-3)$$

*olur. Buradan,* $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4} = \lambda$ *elde edilir.*

## Problem

*Düzlemde* $A\,(2,0)$ *ve* $B\,(5,3)$ *noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.*

## Problem

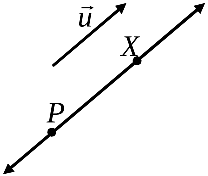
$\mathbb{R}^3$ *'de* $A\,(2,0,1)$ *ve* $B\,(4,3,4)$ *noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.*

## Problem

$\mathbb{R}^3$ *'de* $A\,(2,0,1)$ *ve* $B\,(4,3,1)$ *noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.*

# Kısaca Doğrultu Vektörü

Vektörel yöntemi kullanırken, doğrunun doğrultusunu gösteren bir vektör kullanmamız gerekir. Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi, doğrunun $A$ ve $B$ gibi iki noktası verilirse, doğrultu vektörünü $\overrightarrow{AB}$ ile ifade edebiliriz. Doğrunun doğrultusunu gösteren ve doğruya paralel olan vektöre, doğrunun **doğrultu vektörü** diyeceğiz. Bazen, doğrunun iki noktası verilmeden, bir $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ doğrultu vektörü verilebilir.




Vektörel yöntemi kullanarak, $\mathbb{R}^n$ uzayında, verilen herhangi bir $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörüne paralel olan ve verilen bir $P$ noktasından geçen doğru denklemini bulabilmek için, $X$ değişken noktayı göstermek üzere,

$$\overrightarrow{PX} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow X - P = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow X = P + \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}}$$

eşitliğini kullanmak yeterlidir. Aşağıda, $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$ de birer örnek verilmiştir. Bu konu daha sonra, özellikle $\mathbb{R}^3$ uzayında tekrar ele alınacaktır.

## Örnek

**Aşağıdaki doğruların denklemlerini bulunuz.**

**a) P $(1,2)$ noktasından geçen ve $\overrightarrow{u} = (3,4)$ vektörüne paralel olan doğru,.**

**b) P $(1,2,3)$ noktasından geçen ve $\overrightarrow{u} = (3,4,5)$ vektörüne paralel olan doğru,.**

**c) P $(1,2,3,4)$ noktasından geçen ve $\overrightarrow{u} = (3,4,5,6)$ vektörüne paralel olan doğru.**

## Çözüm

**a)** *Değişken nokta* $X(x,y)$ *'dir.* $\overrightarrow{PX} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow (x-1, y-2) = \lambda(3,4)$ *eşitliğinden,* $\lambda$ *çekilirse,* $\lambda = \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{4}$ *bulunur.*

**b)** *Değişken nokta* $X(x,y,z)$ *'dir.* $\overrightarrow{PX} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow (x-1, y-2, z-3) = \lambda(3,4,5)$ *eşitliğinden,* $\lambda$ *çekilirse,* $\lambda = \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{5}$ *bulunur.*

**c)** *Değişken nokta* $X(x,y,z,w)$ *'dur. Buradan,*

$$\overrightarrow{PX} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow (x-1, y-2, z-3, w-4) = \lambda(3,4,5,6)$$

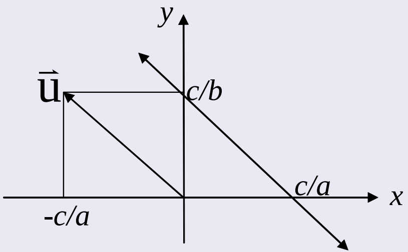
*eşitliğinden,* $\lambda$ *çekilirse,* $\lambda = \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{5} = \dfrac{w-4}{6}$ *bulunur.*

## Örnek

**Düzlemde verilen, $ax + by = c$ doğrusunun eğimini, doğrultu vektörünü ve eğimi ile doğrultu vektörü arasındaki bağıntıyı bulunuz.**

## Çözüm

**Çözüm :** *Doğrunun grafiğini çizerek görebiliriz.* $x = 0$ *iken* $y = c/b$ *ve* $y = 0$ *iken* $x = c/a$ *olduğundan, doğrunun grafiği şekildeki gibidir. Doğrunun, doğrultusunu ifade eden* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *vektörünü de şekildeki gibi çizelim.* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (-c/a, c/b)$ *olduğu kolayca görülür. O halde, düzlemde verilen* $ax + by = c$ *doğrusunun doğrultu vektörü* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (-c/a, c/b)$ *olur. Diğer yandan, bu doğrunun eğimi :* $m = -\dfrac{a}{b}$




*olduğundan, düzlemdeki bir doğrunun doğrultu vektörü* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (r, s)$ *ise, bu doğrunun eğimi,* $m = \dfrac{s}{r}$ *olacaktır.*

## Problem

$2x - 3y = 1$ *doğrusunun doğrultusunu gösteren bir birim vektör bulunuz.*

## Problem

*Doğrultusu* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (2, -5)$ *olan doğrunun eğimi nedir?*

# KAYNAK

Mustafa Özdemir, Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınları, 4. Baskı, İzmir, 2019.