SİMETRİ - YANSIMA

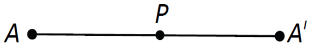
Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Bir noktanın, bir noktaya göre simetriği olan nokta

$\mathbb{R}^n$ uzayında bir A noktasının verilen bir P noktasına göre simetriği denilince, APA' doğrusal olmak üzere, $|AP| = |PA'|$ olacak şekildeki A' noktası anlaşılır.



A ve P noktası verilince, A' noktasının koordinatlarını bulabiliriz. $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $P(p_1, p_2, ..., p_n)$ olmak üzere,

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA'}$$

vektörel eşitliği bize P noktasını verir. Ya da, P noktası, A ve A' noktalarının orta noktası olduğundan,

$$\frac{A + A'}{2} = P$$

eşitliği kullanılarak da A' noktası bulunabilir.

Örnek

A $(1,2)$ noktasının P $(3,4)$ noktasına göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$A'(x,y)$ *olsun.*

$$\frac{A+A'}{2}=P\Rightarrow\frac{(1,2)+(x,y)}{2}=(3,4)$$

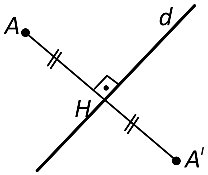
eşitliğinden, $x=5$ *ve* $y=6$ *bulunur.* $A'(5,6)$ *olur.*

Örnek

A $(1,1,2,2)$ noktasının P $(1,2,3,4)$ noktasına göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$A'(x,y,z,w)$ *olsun.* $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PA'}$ *ise,* $(0,1,1,2)=(x-1,y-2,z-3,w-4)$ *eşitliğinden,* $x=1,\ y=3,\ z=4$ *ve* $w=6$ *bulunur. O halde,* $A'(1,3,4,6)$ *olur.*



$\mathbb{R}^n$ uzayında verilen bir d doğrusunun doğrultu vektörü $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve A noktasının d doğrusuna göre simetriği de A' noktası olsun. Doğruya göre simetrinin sağlanabilmesi için, $\overrightarrow{AA'}$ vektörü, doğrunun doğrultusuna dik olmalı ve A ile A''nün orta noktası doğru üzerinde bulunmalıdır. Buna göre, $\overrightarrow{\mathbf{n}} = \overrightarrow{AA'}$ olmak üzere,

i) $\overrightarrow{\mathbf{n}} \perp \overrightarrow{\mathbf{u}} \Leftrightarrow < \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{n}} >= 0$ [1]

ii) $H = \dfrac{A + A'}{2}$

eşitlikleri kullanılarak elde edilen denklemlerin çözümü, bize A' noktasını verir.

Bu yöntemin yanında, izdüşüm vektörü kullanılarak da simetri noktası bulunabilir. Bununla ilgili Teorem 7.3 ve Teorem 7.4 aşağıda verilmiştir.

[1] Düzlemde, iç çarpımı kullanmak yerine, d doğrusunun eğimiyle, AA' doğrusunun eğiminin çarpımının -1 olması gerektiği kullanılabilir.

Örnek

A $(1,2,3)$ noktasının x $=$ y $=$ z doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz. (2013 - ÖABT)

Çözüm

Doğrunun doğrultmanı $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,1,1)$*'dir. A noktasının simetriği olan noktayı da* $A'(a,b,c)$ *ile gösterelim. Buna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{n}} = \overrightarrow{AA'} = (a-1, b-2, c-3)$ *olur.*

i) $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{n}} \rangle = 0$ *eşitliğinden,* $a+b+c=6$ *olur.*

ii) $H = \dfrac{A+A'}{2} = \left(\dfrac{a+1}{2}, \dfrac{b+2}{2}, \dfrac{c+3}{2}\right)$ *noktası* $x=y=z$ *doğru denklemini sağlamalıdır.*

$$\frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{2} = \frac{c+3}{2} = k$$

diyelim. $a = 2k-1$, $b = 2k-2$ *ve* $c = 2k-3$ *eşitlikleri,* $a+b+c=6$ *eşitliğinde yazılırsa,* $6k = 12$ *eşitliğinden* $k=2$ *olur ki, buradan* $A'(3,2,1)$ *elde edilir.*

Örnek

A $(1,2)$ noktasının $y = 3x - 2$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Doğrunun doğrultusunun $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,3)$ *olduğu kolayca görülebilir.* $A'(a,b)$ *olsun.*
$\overrightarrow{\mathbf{n}} = \overrightarrow{AA'} = (a-1, b-2)$ *olur. Buna göre,*
i) $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{n}} \rangle = 0$ *eşitliğinden,* $a - 1 + 3b - 6 = 0 \Rightarrow a + 3b = 7$ *olur.*
ii) $H = \dfrac{A + A'}{2} = \left(\dfrac{a+1}{2}, \dfrac{b+2}{2}\right)$ *noktası* $y = 3x - 2$ *doğru denklemini sağlamalıdır.*
Buradan, $b = 3a - 3$ *elde edilir. Sonuç olarak,*

$$a + 3b = 7 \quad \text{ve} \quad b = 3a - 3$$

eşitliklerinden $a = \dfrac{8}{5}$, $b = \dfrac{9}{5}$ *olur. Yani,* $A'(8/5, 9/5)$*'tir.*

Problem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında* $A(1,1,1)$ *noktasının* $\dfrac{x-1}{2} = y = z$ *doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.*

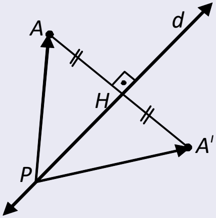
Teorem

Herhangi bir A noktasının, doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olan ve P noktasından geçen bir doğruya göre simetriği olan noktanın koordinatları

$$A' = 2\frac{\left\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle}\overrightarrow{\mathbf{u}} + 2P - A$$

ile bulunur.

Kanıt.



Vektörlerde toplama işlemine göre, $\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{PH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ şeklinde ifade edebiliriz. $\overrightarrow{PH}$ vektörü, $\overrightarrow{PA}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü üzerine dik izdüşümü olduğundan,

$$\overrightarrow{PH} = \frac{\left\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle}\overrightarrow{\mathbf{u}}$$

yazılabilir. □

Kanıt.

Böylece,

$$A' - P = \frac{\left\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}\left(A' - A\right),$$

$$A' = 2\frac{\left\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}} + 2P - A$$

elde edilir. □

Örnek

A $(1,2,3)$ noktasının $x=y=z$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{u}}=(1,1,1)$, $P(0,0,0)$ *olduundan,*

$$\begin{aligned} A' &= 2\frac{\left\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle}\overrightarrow{\mathbf{u}} + 2P - A \\ &= 2\frac{\langle (1,2,3),(1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle}(1,1,1) + 2(0,0,0) - (1,2,3) \\ &= (3,2,1) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek

$\mathbb{R}^4$ uzayında $\mathbf{A}\left(\mathbf{1,1,1,3}\right)$ noktasının

$$\mathbf{\frac{x-1}{2}=y=z=\frac{w-1}{2}}$$

doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{u}}=(2,1,1,2)\,,\ P\,(1,0,0,1)$ *olduundan,*

$$\begin{aligned} A' &= 2\frac{\langle(0,1,1,2)\,,(2,1,1,2)\rangle}{\langle(2,1,1,2)\,,(2,1,1,2)\rangle}(2,1,1,2)+2\,(1,0,0,1)-(1,1,1,3) \\ &= \left(\frac{17}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Problem

$\mathbb{R}^4$ *uzayında* $A(1,0,1,0)$ *noktasının* $\dfrac{x-1}{2} = y = z = \dfrac{w-1}{2}$ *doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.*

Problem

$A(1,2)$ noktasının $y=3x-2$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

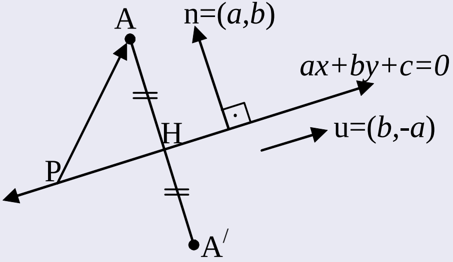
Düzlemde Bir Noktanın Bir Doğruya Göre Simetriği

Teorem

Düzlemde bir $A(x_0, y_0)$ noktasının, $ax+by+c=0$ doğrusuna göre, simetriği :

$$A' = (x_0, y_0) - \frac{2(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}(a, b)$$

ile bulunur.



Kanıt.

$ax + by + c = 0$ doğrusunun doğrultman vektörü : $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (b, -a)$ vektörüdür. Bu vektöre dik olan vektörü $\overrightarrow{\mathbf{n}} = (a, b)$ ile gösterelim. P noktası, $ax + by + c = 0$ doğrusu üzerinde bir nokta olmak üzere, $\overrightarrow{HA}$ vektörü, $\overrightarrow{PA}$ vektörünün $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ vektörü üzerine dik izdüşüm vektörüdür.

Buna göre, $\overrightarrow{HA} = \dfrac{\left\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{\mathbf{n}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{n}}$ yazılabilir. $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AH}$ olduğundan,

$$A' - A = -2\frac{\left\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{\mathbf{n}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{n}} \Rightarrow A' = A - 2\frac{\left\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{\mathbf{n}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathbf{n}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{n}}$$

elde edilir. $ax + by + c = 0$ üzerindeki P noktası, $P(x_1, y_1)$ olsun.
$\overrightarrow{PA} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ *ve* $ax_1 + by_1 + c = 0$ olduğundan,

$$A' = (x_0, y_0) - 2\frac{ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1)}{a^2 + b^2}(a, b) = (x_0, y_0) - \frac{2(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}(a, b)$$

bulunur. $\square$

Örnek

A $(1,2)$ noktasının $y = 3x - 2$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$3x - y - 2 = 0$ *doğru denkleminde,* $a = 3$ *ve* $b = -1$*'dir. Buna göre,*

$$A' = (1,2) - \frac{2\,(3\cdot 1 - 2 - 2)}{10}\,(3,-1) = \left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

elde edilir. **Not :** $A' = (x_0, y_0) - \dfrac{2\,(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}\,(a, b)$

Örnek

Düzlemde herhangi bir $A(x_0, y_0)$ noktasının, $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın, $A'(y_0, x_0)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Teorem kullanılırsa,

$$A' = (x_0, y_0) - \frac{2(x_0 - y_0)}{2}(1, -1) = (y_0, x_0)$$

elde edilir.

Problem

$A(1,1)$ noktasının, $y = x + 2$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Problem

Düzlemde herhangi bir $A(x_0, y_0)$ *noktasının,* $y = mx + n$ *doğrusuna göre simetriği olan noktanın, koordinatlarını bulunuz.*

Örnek

$\mathbf{A\left(t, t-1\right)}$ noktasının $\mathbf{y = 2x + 1}$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$2x - y + 1 = 0$ *doğru denkleminde,* $a = 2$ *ve* $b = -1$*'dir. Buna göre,*

$$A' = \left(t, t-1\right) - \frac{2\left(2\cdot t - \left(t-1\right) + 1\right)}{5}\left(2, -1\right) = \left(\frac{t-8}{5}, \frac{7t-1}{5}\right)$$

elde edilir. Buradan, A noktası aslında, $y = x - 1$ *doğrusunu ifade etmektedir.* A' *noktası ise,*

$$t = 5x + 8 = \frac{5y+1}{7} \Rightarrow 7x - y + 11 = 0$$

doğrusunu ifade etmektedir. Bu soruda, aslında $y = x - 1$ *doğrusunun,* $y = 2x + 1$ *doğrusuna göre simetriği bulunmuş oldu.*

Bir Doğrunun Bir Doğruya Göre Simetriği

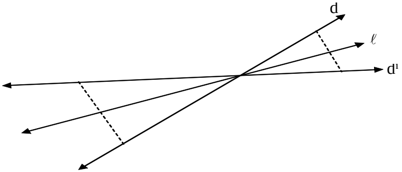
Bir d doğrusunun, bir ℓ doğrusuna göre simetriği d' doğrusu olsun. d' doğrusunun denklemini bulmak için, d doğrusu üzerindeki herhangi bir nokta parametrik olarak yazılır. Bu noktanın, ℓ doğrusuna göre simetriği bulunarak, d' doğrusu üzerindeki bu noktayı ifade eden doğru, parametre yok edilerek bulunur. Ayrıca, bir doğrunun simetriği olan bir doğru için, aşağıdakilere de dikkat ediniz.

1. d doğrusu, ℓ doğrusu ile bir K noktasında kesişiyorsa, d' doğrusu da bu kesişme noktasından geçmesi gerekir.

2. d doğrusu üzerindeki, herhangi bir P noktasının, ℓ doğrusuna göre simetriği P' noktası ise, P' noktası da d' doğrusunun denklemini sağlamalıdır.

3. ℓ doğrusu, d ve d' doğrusunun açıortay doğrusudur.

4. Düzlemde, d' doğrusunun denklemi : $d + k\ell = 0$ doğru ailelerinin içinden bir doğrudur.



Örnek

$y = 2x - 1$ doğrusunun, $y = x + 1$ doğrusuna göre simetriğini bulunuz.

Çözüm

$y = 2x - 1$ doğrusu üzerindeki bir nokta, parametrik olarak $A(t, 2t-1)$ şeklinde yazılabilir. Şimdi, $A'(a, b)$ noktasının koordinatlarını bulalım. $y = x + 1$ doğrusunun doğrultmanı $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 1)$ olduğundan,

i) $\overrightarrow{AA'} \perp (1,1) \Leftrightarrow (a - t, b - 2t + 1) \perp (1,1) \Leftrightarrow a + b = 3t - 1 \qquad (*)$

olacaktır. Diğer yandan, $(A + A')/2$ noktası, $y = x + 1$ doğrusu üzerinde olacağından,

ii) $\dfrac{b + 2t - 1}{2} = \dfrac{a + t}{2} + 1 \Rightarrow a - b = t - 3 \qquad (**)$

olacaktır. Buna göre, $(*)$ ve $(**)$ eşitliklerinden, $a = 2t - 2$ ve $b = t + 1$ elde edilir. A' noktasının parametrik koordinatını $x = 2t - 2$, $y = t + 1$ bulduk. Bu iki denkleme göre doğrunun denklemi : $t = (x + 2)/2 = y - 1$ veya $x - 2y + 4 = 0$ şeklinde buluruz.

Örnek

Uzayda $\mathbf{\frac{x-1}{2} = y = z}$ doğrusunun, $\mathbf{x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}}$ doğrusuna göre simetriğini bulunuz.

Çözüm

$\frac{x-1}{2} = y = z$ *doğrusu üzerindeki bir noktayı parametrik olarak,* $A\left(2t+1, t, t\right)$ *şeklinde yazabiliriz. Bu noktanın,* $x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ *doğrusuna göre simetriğini parametrik olarak bulacağız.* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \left(1, 2, 2\right)$*'dir. Simetrik nokta* $A'\left(a, b, c\right)$ *olmak üzere,*

i) $\overrightarrow{AA'} \perp (1,2,2) \Leftrightarrow (a-2t-1, b-t, c-t) \perp (1,2,2) \Leftrightarrow a + 2b + 2c = 6t + 1 \ (*)$

olacaktır. Diğer yandan, $\frac{A+A'}{2}$ *noktası,* $x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ *doğrusu üzerinde olacağından,*

ii) $\frac{a+2t+1}{2} - 1 = \frac{b+t}{4} = \frac{c+t}{4} = k \qquad (**)$

olacaktır. $(*)$ *ve* $(**)$ *eşitliklerinden,*

$2\left(k+1\right) - 2t - 1 + 2\left(4k - t\right) + 2\left(4k - t\right) = 6t + 1 \Rightarrow k = 2t/3$ *olur. Yani,*

$A'\left(\frac{3-2t}{3}, \frac{5t}{3}, \frac{5t}{3}\right)$ *olur ki, simetri doğrusunun denklemi :* $\frac{3-3x}{2} = \frac{3y}{5} = \frac{3z}{5}$ *bulunur.*

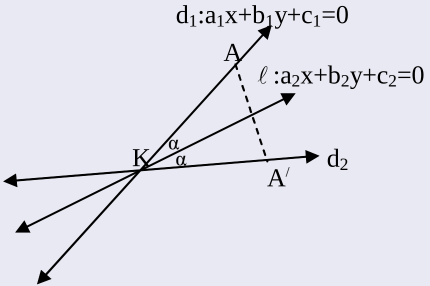
Düzlemde Bir Doğrunun Bir Doğruya Göre Simetriği

Teorem

Düzlemde, $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ *doğrusunun,* $\ell : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ *doğrusuna göre simetriği,*

$$a_1x + b_1y + c_1 = 2\frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}(a_2x + b_2y + c_2)$$

doğrusudur.



Kanıt.

Simetri doğrusu, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğrularının arakesitinden geçen, $(a_1x + b_1y + c_1) + k\,(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ formunda bir doğrudur. Bu doğrunun eğiminin,

$$m_2 = -\frac{a_1 + a_2k}{b_1 + b_2k} \qquad (*)$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan, simetri doğrusu açıortay doğrusu olduğundan,

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_\ell}{1 + m_1m_\ell} = \frac{\dfrac{-a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2}}{1 + \dfrac{a_1a_2}{b_1b_2}} = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1b_2 + a_1a_2},$$

$$\tan\alpha = \frac{m_\ell - m_2}{1 + m_2m_\ell} = \frac{\dfrac{-a_2}{b_2} - m_2}{1 - m_2\dfrac{a_2}{b_2}} = \frac{-a_2 - m_2b_2}{b_2 - m_2a_2}$$

açılarının eşitliğinden, □

Kanıt.

$$\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_1 a_2} = \frac{-a_2 - m_2 b_2}{b_2 - m_2 a_2}$$

olur ki, buradan,

$$m_2 = \frac{a_1 a_2^2 - a_1 b_2^2 + 2a_2 b_1 b_2}{a_2^2 b_1 - 2a_1 a_2 b_2 - b_1 b_2^2}$$

elde edilir. Buradan, $(*)$ eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\frac{-a_1 - a_2 k}{b_1 + b_2 k} = \frac{a_1 a_2^2 - a_1 b_2^2 + 2a_2 b_1 b_2}{a_2^2 b_1 - 2a_1 a_2 b_2 - b_1 b_2^2}$$

eşitliğinden,

$$k = \frac{-2\left(a_1 a_2 + b_1 b_2\right)}{\left(a_2^2 + b_2^2\right)}$$

bulunur. □

Örnek

$3x + 2y = 5$ doğrusunun $y - x = 2$ doğrusuna göre simetriğinin denklemini bulunuz. (ÖABT 2016)

Çözüm

1. Yol. $3x + 2y - 5 = 0$ *ve* $x - y + 2 = 0$ *doğrularına göre,* $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $a_2 = 1$ *ve* $b_2 = -1$*'dir. O halde,*

$$(a_1x + b_1y + c_1) = 2\frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}(a_2x + b_2y + c_2)$$

formülü kullanılırsa,

$$3x + 2y - 5 = 2 \cdot \frac{3-2}{1+1} \cdot (x - y + 2) = x - y + 2$$

eşitliğinden, simetri doğrusu : $2x + 3y - 7 = 0$ *elde edilir.*

Çözüm

2. Yol. *Simetri doğrusunun denklemi :*

$$(3x+2y-5)+k\,(y-x-2)=0 \qquad (*)$$

formundadır. k'yı bulmak için, simetri doğrusu üzerinde, kesişim noktasından farklı bir nokta bulmak yeterlidir. $3x+2y=5$ *doğrusu üzerindeki bir nokta alalım. Kolaylık için,* $P\,(1,1)$ *noktası alınabilir. Bu noktanın* $y=x+2$ *doğrusuna göre simetriği olan* $P'\,(a,b)$ *noktasını bulalım.*

i) $\dfrac{(1,1)+(a,b)}{2}=\left(\dfrac{a+1}{2},\dfrac{b+1}{2}\right)$ *noktası,* $y=x+2$ *denklemini sağlar. Buradan,* $b-a=4$ *elde edilir.*

ii) $\overrightarrow{PP'}$ *vektörü,* $y=x+2$ *doğrusuna dik olmalıdır.* $\overrightarrow{\mathbf{u}}=(1,1)$ *olduğundan,*

$$\overrightarrow{PP'}\perp\overrightarrow{\mathbf{u}}\Leftrightarrow(a-1)+(b-1)=0\Rightarrow a+b=2$$

olacaktır. Bu iki denklemden, $b=3$ *ve* $a=-1$*, yani* $P\,(-1,3)$ *bulunur. Bu nokta* $(*)$ *eşitliğini sağlamalıdır. Buna göre,* $(-3+6-5)+k\,(3+1-2)=0$ *eşitliğinden,* $k=1$ *ve* $(3x+2y-5)+(y-x-2)=2x+3y-7=0$ *elde edilir.*

Çözüm

3. Yol. *Doğrunun parametrik denklemi* $x = 2t$ *ve* $y = -3t + \dfrac{5}{2}$ *alınabilir. Bu noktanın, simetriğini*

$$A' = (x_0, y_0) - \frac{2(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}(a, b)$$

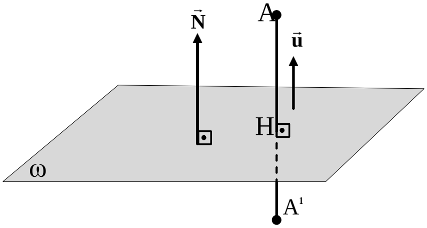
eşitliğinden,

$$\begin{aligned} A' &= \left(2t, -3t + \frac{5}{2}\right) - \frac{2(2t - (-3t + 5/2) + +2)}{2}(1, -1) \\ &= \left(\frac{1}{2} - 3t, 2t + 2\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $t = \dfrac{x - 1/2}{-3} = \dfrac{y - 2}{2}$ *eşitliğinden,* $2x + 3y - 7 = 0$ *doğrusu elde edilir.*

Problem

$x + 2y = 1$ doğrusunun $x + y = 1$ doğrusuna göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz.



Bir A noktasının bir ω düzlemine göre simetriği denilince, iki koşul sağlanmalıdır.

1. $\dfrac{A+A'}{2} = H$ noktası düzlem denklemini sağlamalıdır.

2. $\overrightarrow{AA'} \; // \; \overrightarrow{\mathbf{N}}$ paralelliği vardır. $\overrightarrow{AA'}$ vektörü düzleme dik olmalıdır. Yani, $\overrightarrow{AA'} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{N}}$ sağlanmalıdır.

Örnek

A $(1, 2, 3)$ noktasının $x + y + z = 0$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz. (2013 ÖABT)

Çözüm

$A'(a, b, c)$ olduğunu kabul edelim.

i) $H = \dfrac{A + A'}{2} = \left(\dfrac{a+1}{2}, \dfrac{b+2}{2}, \dfrac{c+3}{2}\right)$ *noktası $x + y + z = 0$ denklemini sağlar. O halde,*

$$\frac{a+1}{2} + \frac{b+2}{2} + \frac{c+3}{2} = 0 \Rightarrow a + b + c = -6$$

olur.

ii) $\overrightarrow{AA'} \,//\, \overrightarrow{\mathbf{N}}$ *olmalıdır. Buna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (1, 1, 1)$ *olduğundan,*

$$\frac{a-1}{1} = \frac{b-2}{1} = \frac{c-3}{1} = k$$

olmalıdır. Buna göre, $(k+1) + (k+2) + (k+3) = -6$ eşitliğinden, $k = -4$ olur. Buna göre, $A'(-3, -2, -1)$ bulunur.

Örnek

$A(1,2,3)$ noktasının $x+y+z=5$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

A'nın simetriği olan noktanın koordinatları $A'(a,b,c)$ olsun.

i) $\dfrac{A+A'}{2}$ *düzlem denklemini sağlar.* $\dfrac{a+1}{2}+\dfrac{b+2}{2}+\dfrac{c+3}{2}=5$ *ise* $a+b+c=4$ *olur.*

ii) $\overrightarrow{AA'} \,//\, \overrightarrow{\mathbf{N}}=(1,1,1)$ *ise* $\dfrac{a-1}{1}=\dfrac{b-2}{1}=\dfrac{c-3}{1}=k$ *olur. Buradan,*

$$(k+1)+(k+2)+(k+3)=4 \Rightarrow k=-2/3 \Rightarrow A'\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$$

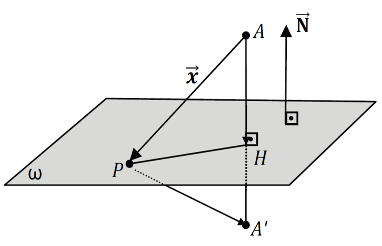
bulunur.

Teorem

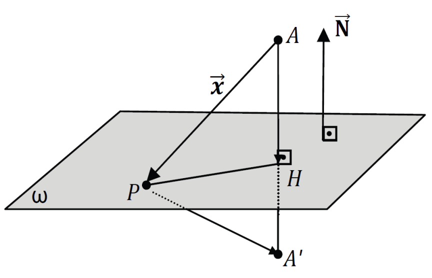
Bir A noktasının, normali $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ olan ve P noktasından geçen bir ω düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatları

$$A' = A + 2\frac{\left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}\overrightarrow{\mathbf{N}}$$

ile bulunur.



Kanıt.



Vektörlerde toplama işlemine göre,

$$\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{AH}$$

şeklinde ifade edebiliriz. $\overrightarrow{AH}$ vektörü, $\overrightarrow{AP}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ vektörü üzerine dik izdüşümü olduğundan, $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{N}}$ yazılabilir. Buradan,

$$A' - P = A - P + 2\frac{\left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{N}} \Rightarrow A' = A + 2\frac{\left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{N}}$$

elde edilir. □

Örnek

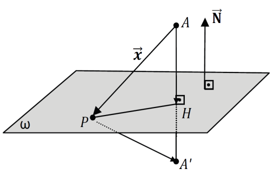
A $(1,2,3)$ noktasının $x+y+z=5$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Düzlemin normali $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (1,1,1)$ *vektörüdür. Düzlem üzerindeki bir nokta* $P(1,2,2)$ *alınabilir. Buna göre,* $\overrightarrow{AP} = (0,0,-1)$ *olduğundan,*

$$A' = A + 2\frac{\left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}\overrightarrow{\mathbf{N}} = (1,2,3) + 2\frac{\langle (0,0,-1),(1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$$

bulunur.



Problem

$A(1,2,3)$ noktasının $x+2y-z=5$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Problem

$A(1,2,3)$ noktasının $x+3y+2z=5$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Örnek

Uzayda $\frac{x-1}{2} = y = z$ doğrusunun, $x + z = 1$ düzlemine göre simetriğini bulunuz.

Çözüm

Doğru üzerindeki herhangi bir noktayı parametrik olarak, $A(2t+1, t, t)$ *biçiminde yazabiliriz. Şimdi,* A' *simetri noktasını belirleyelim. Klasik yolla belirleyebiliriz. Fakat, Teorem 7.6'yı kullanalım.* $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (1,0,1)$ *ve* $P(1,0,0)$ *alalım.* $\overrightarrow{AP} = (-2t, -t, -t)$ *olduğundan,*

$$A' = A + 2\frac{\left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}\overrightarrow{\mathbf{N}} = (2t+1, t, t) + 2\frac{-3t}{2}(1,0,1) = (1-t, t, -2t)$$

elde edilir. O halde simetri doğrusu : $t = 1 - x = y = \frac{z}{-2}$ *olarak bulunur.*

Problem

Uzayda $\dfrac{x}{2} = y = z$ *doğrusunun,* $x + y + z = 0$ *düzlemine göre simetriğini bulunuz.*

Problem

Uzayda $\dfrac{x-1}{2} = y = z$ *doğrusunun,* xoy *düzlemine göre simetriğini bulunuz.*

Çözümlü Problemler

Problem

$\mathbf{A}\,(1,2,3)$ noktasının $\mathbf{x+y+z=5}$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

P noktası, A noktasının düzleme göre simetriğ ise, $\dfrac{A+P}{2}$ düzlem denklemini sağlar.

$$\frac{a+1+b+2+c+3}{2}=5\Rightarrow a+b+c=4 \qquad (*)$$

$\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{\mathbf{N}}=(1,1,1)$ eşitliğinden, $\dfrac{a-1}{1}=\dfrac{b-2}{1}=\dfrac{c-3}{1}=\lambda$ olmalıdır. $(*)$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\lambda+1+\lambda+2+\lambda+3=4\Rightarrow\lambda=\frac{-2}{3}$$

olur ve $P\,(a,b,c)=P\,(1/3,4/3,7/3)$ elde edilir.

Problem

$(\mathbf{x}-1)^2+(\mathbf{y}-2)^2=4$ **çemberinin,** $\mathbf{y}=2\mathbf{x}-1$ **doğrusuna göre simetriği nedir?**

Çözüm

Çemberin merkezinin, yani $M(1,2)$ *noktasının simetriğini bulmak yeterlidir.* $\overrightarrow{\mathbf{u}}=(1,2)$ *dir.* $M'(a,b)$ *olsun.* $\overrightarrow{MM'}=(a-1,b-2)$ *olur. Buna göre,*

i) $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{MM'} \right\rangle = 0$ *eşitliğinden,* $a-1+2b-4=0 \Rightarrow a+2b=5$ *olur.*

ii) $H=\dfrac{M+M'}{2}=\left(\dfrac{a+1}{2},\dfrac{b+2}{2}\right)$ *ise* $b+2=2(a+1)-2 \Rightarrow b-2a=-2$ *olur.*

Buradan, $5b=8 \Rightarrow b=8/5$ *ve* $a=9/5$ *olacağından, simetri çemberi,*

$$\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{8}{5}\right)^2=4$$

bulunur.

Problem

A $(1,2,3)$ noktası, $\frac{x}{2} = y$, $z = 1$ doğrusu üzerindeki hangi noktaya en yakındır?

Çözüm

İstenen nokta doğru üzerinde olduğundan, $\frac{x}{2} = y = \lambda$, $z = 1$ *ise, en yakın noktanın koordinatları* $H(2\lambda, \lambda, 1)$ *formundadır.* $\overrightarrow{AH} = (2\lambda - 1, \lambda - 2, 1 - 3)$ *vektörü* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (2,1,0)$ *doğrultmanına dik olduğundan,*

$$2(2\lambda - 1) + (\lambda - 2) = 0$$

eşitliğinden $\lambda = 4/5$ *olur. Buradan, en yakın nokta*

$$H\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$$

elde edilir.

Problem

$\mathbb{R}^4$ uzayında $\mathbf{A}\,(1,1,1,3)$ noktasının $\dfrac{x-1}{2}=y=z=\dfrac{w-1}{2}$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Doğrunun doğrultmanı $\overrightarrow{\mathbf{u}}=(2,1,1,2)$*'dir. A noktasının simetriği olan nokta* $A'\,(a,b,c,d)$ *ise,*

$$\overrightarrow{\mathbf{n}}=\overrightarrow{AA'}=(a-1,b-1,c-1,d-3)$$

olur. Buna göre

$$\mathbf{i)}\quad \left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{n}}\right\rangle=0 \quad \textit{ise} \quad 2a+b+c+2d=10$$

olur.

Çözüm

ii) $H = \dfrac{A+A'}{2} = \left(\dfrac{a+1}{2}, \dfrac{b+1}{2}, \dfrac{c+1}{2}, \dfrac{d+3}{2}\right)$ *noktası doğrunun üzerinde olmalı. Buradan,*

$$\frac{\dfrac{a+1}{2}-1}{2} = \frac{b+1}{2} = \frac{c+1}{2} = \frac{\dfrac{d+3}{2}-1}{2} = \lambda$$

diyelim.

$$a = 4\lambda + 1, \qquad b = c = 2\lambda - 1 \qquad \textit{ve} \qquad d = 4\lambda - 1$$

olur. Bu eşitlikleri, $2a + b + c + 2d = 10$ *denkleminde yazarsak,* $20\lambda = 12$ *ve* $\lambda = 3/5$ *olur. Buna göre* A' *noktası :*

$$A'\left(\frac{17}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

elde edilir.

Problem

$\mathbb{R}^4$ *uzayında* $A(1,1,1,1)$ *noktasının* $\dfrac{x-1}{2} = y = z = \dfrac{w-1}{2}$ *doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.*

Problem

$x = y$, $z = 1$ doğrusunun, $x + y + z = 1$ düzlemine göre simetriği nedir?

Çözüm

Doğru üzerindeki herhangi bir noktayı parametrik olarak, $A(t, t, 1)$ *biçiminde yazabiliriz. Şimdi,* $A'(a, b, c)$ *simetri noktasını belirleyelim.*

i) $\dfrac{A + A'}{2}$ *düzlem denklemini sağlar.* $\dfrac{a + t + b + t + c + 1}{2} = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 - 2t$

ii) $\overrightarrow{\mathbf{N}} \parallel \overrightarrow{AA'}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (1, 1, 1)$ *olduğundan,* $\dfrac{a - t}{1} = \dfrac{b - t}{1} = \dfrac{c - 1}{1} = \lambda$ *olmalıdır. Buna göre,* $(\lambda + t) + (\lambda + t) + (\lambda + 1) = 1 - 2t \Rightarrow \lambda = -4t/3$ *bulunur. O halde,* $A'(-t/3, -t/3, (3 - 4t)/3)$ *elde edilir. Yani, simetri doğrusu :*

$t = -3x = -3y = \dfrac{3z - 3}{-4}$ *veya* $x = y = \dfrac{z - 1}{4}$ *elde edilir.*

Problem

$(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ **küresinin yoz düzlemine göre simetriği nedir?**

Çözüm

Kürenin merkezi, $M(1,0,2)$ *'dir ve yoz düzlemine göre simetriği :*

$$M'(-1,0,2)$$

olduğundan, kürenin simetriği : $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ *olur.*

Problem

$\mathbf{x = y = z}$ doğrusunun, $\mathbf{x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}}$ doğrusuna göre simetriği nedir?

Çözüm

Doğru üzerindeki herhangi bir nokta $A(t,t,t)$'dır. Simetri noktası $A'(x,y,z)$ olmak üzere, $AA' \perp \overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,2,3)$ olması gerektiğinden,

$$(x-t) + 2(y-t) + 3(z-t) = x + 2y + 3z = 6t \qquad (*)$$

elde edilir. Diğer yandan, $\dfrac{A+A'}{2}$ noktası $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ denklemini sağlamalıdır. Yani,

$$\frac{x+t}{2} = \frac{y+t}{4} = \frac{z+t}{6} = k$$

eşitliğinden, $(*)$ gözönüne alınırsa, $(2k-t) + 2(4k-t) + 3(6k-t) = 6t$ ise $k = \dfrac{3}{7}t$ bulunur. Buradan, $x = -\dfrac{1}{7}t, \quad y = \dfrac{5}{7}t, \quad z = \dfrac{11}{7}t$ olacağından, simetri doğrusu

$$t = \frac{x}{} = \frac{y}{} = \frac{z}{} \text{ veya } x = \frac{y}{} = \frac{z}{}$$

Problem

Düzlemde denklemleri k : y = 2x + 4 ve d : y = x olan doğrular veriliyor. k doğrusunun d doğrusuna göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz. *(ÖABT İÖ - 2013)*

Çözüm

$2x - y + 4 = 0$ *ve* $x - y = 0$ *doğrularına göre,*

$$a_1 = 2, \quad b_1 = -1, \quad a_2 = 1 \quad \text{ve} \quad b_2 = -1$$

olacaktır. O halde,

$$(a_1 x + b_1 y + c_1) = 2\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}(a_2 x + b_2 y + c_2)$$

formülü kullanılırsa,

$$(2x - y + 4) = 2 \cdot \frac{2+1}{1+1} \cdot (x - y) = 3x - 3y$$

eşitliğinden, simetri doğrusu : $-x + 2y + 4 = 0$ *elde edilir.*

SORU

$\dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-1}{2}$ doğrusu üzerindeki hangi nokta, dışındaki $A(1,1,1)$ noktasına en yakın noktadır?

A) $\left(\dfrac{9}{7}, \dfrac{1}{7}, \dfrac{9}{7}\right)$ **B)** $\left(\dfrac{11}{9}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{11}{9}\right)$ **C)** $\left(\dfrac{10}{9}, \dfrac{1}{18}, \dfrac{10}{9}\right)$ **D)** $\left(\dfrac{7}{9}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{7}{9}\right)$ **E)** $\left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{7}, 3\right)$

SORU

$x + y + 2z = 5$ düzleminin, $A\left(1,1,1\right)$ noktasına en yakın olduğu koordinatları bulunuz.

A) $\left(\frac{7}{6},\frac{7}{6},\frac{4}{3}\right)$ **B)** $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{4}{3}\right)$ **C)** $\left(\frac{19}{14},\frac{19}{14},\frac{1}{7}\right)$ **D)** $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{6}\right)$ **E)** $\left(2,0,1\right)$

SORU

$A(1,1,1)$ noktasının $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{2}$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

A) $\left(\frac{11}{9}, \frac{1}{9}, \frac{11}{9}\right)$ **B)** $\left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, 3\right)$ **C)** $\left(\frac{7}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$ **D)** $\left(\frac{10}{9}, \frac{1}{18}, \frac{10}{9}\right)$ **E)** $\left(\frac{13}{9}, \frac{6}{9}, \frac{13}{9}\right)$

SORU

$A\,(1,1,1)$ noktasının $x+3y+2z=5$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

A) $\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{5}{7}\right)$ **B)** $\left(\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{2}{7}\right)$ **C)** $\left(\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{5}{7}\right)$ **D)** $\left(\frac{7}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right)$ **E)** $\left(\frac{6}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7}\right)$

SORU

Uzayda $A(-2,3,3)$ noktasının xy düzlemine göre simetriği B noktası ve B noktasının orjine göre simetriği C noktası olarak belirleniyor. C noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir? (ÖABT İÖ - 2013)

A) $(2,-3,3)$ **B)** $(-2,-3,3)$ **C)** $(2,3,-3)$ **D)** $(-2,-3,-3)$ **E)** $(2,3,3)$

SORU

Uzayda $A(1,2,3)$ noktasının, $x=y=z$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatları aşağıdakilerden hangisidir? (ÖABT - 2013)

A) $(3,2,1)$ **B)** $(1,2,4)$ **C)** $(3,5,2)$ **D)** $(2,4,3)$ **E)** $(5,4,3)$

SORU

$x + 2y = 1$ doğrusunun $x + y = 1$ doğrusuna göre simetriği olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir? (ÖABT - 2014)

A) $y = 2 + 2x$ **B)** $y = 2 - 2x$ **C)** $y = 1 - 2x$ **D)** $y = 2x + 1$ **E)** $y = 2x - 1$

SORU

Uzayda, $A(1,2,0)$ noktası ve $x+y=2$ düzlemi veriliyor. A noktasının bu düzleme göre simetriği olan noktanın orjine uzaklığı kaç birimdir? (ÖABT - 2015)

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** **E)** $\sqrt{3}$

SORU

Düzlemde, $x - y = 1$ doğrusuna göre yansımayı veren dönüşüm aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x' = 2x + y + 1,\ y\prime = x - 1$ **B)** $x' = 2x - y + 1,\ \ y' = -x + 1$

C) $x' = -2x + y - 1,\ \ y\prime = x - 1$ **D)** $x' = 2x + y - 1,\ \ y' = -x + 1$

E) $x' = y + 1,\ \ y\prime = x - 1$

SORU

$y = x^2 - 1$ eğrisinin $x + y = 1$ doğrusuna göre simetriği hangisidir?

A) $x = -y^2 + 2y + 1$ **B)** $x = -y^2 - 2y + 1$ **C)** $x = -y^2 + 2y - 1$

D) $x = y^2 + 2y + 1$ **E)** $x = y^2 - 2y - 1$

SORU

$\dfrac{x-1}{2} = y,\ \ z+2=0$ doğrusunun $x+y-2z=8$ düzlemi üzerindeki dik izdüşüm doğrusu, aşağıdaki vektörlerden hangisine paraleldir?

A) $(3,-2,-4)$ **B)** $(4,2,-1)$ **C)** $(1,3,-5)$ **D)** $(3,1,2)$ **E)** $(4,-2,3)$