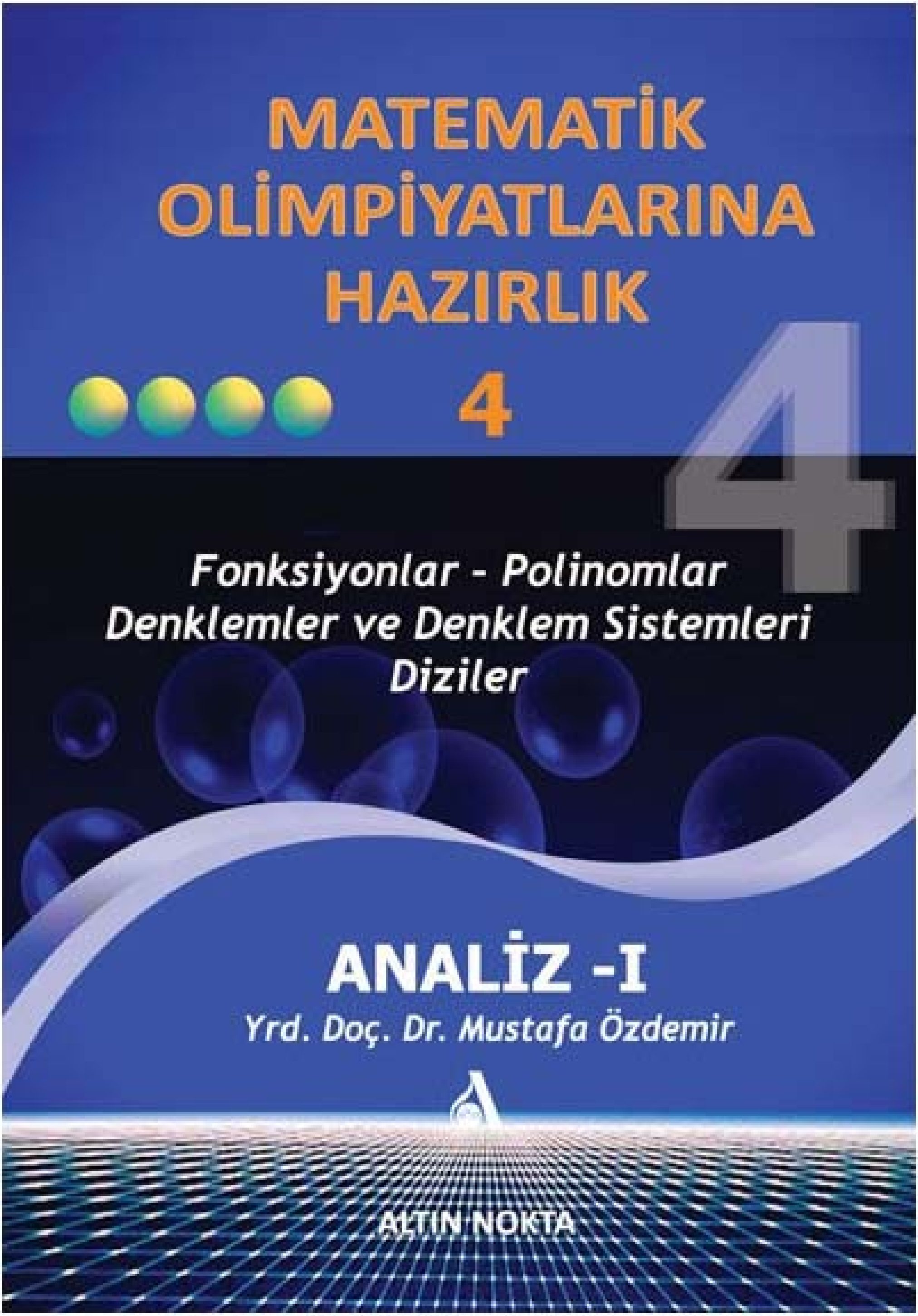
FULL SORU VERSİYONU

Çözümleri Kitapta Bulabilirsiniz.



MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (336 sayfa)
ANALİZ - CEBİR 1
TANITIM DÖKÜMANI

(Kitabın içeriği hakkında bir bilgi verilmesi amacıyla bu döküman hazırlanmıştır.)
KİTABIN ORJİNALİNDE BULUNAN, TEOREM İSPATLARI, KONU ANLATIMI ve ÇÖZÜMLERİN OLDUĞU KISIMLAR,
BU DÖKÜMANA KONULMAMIŞTIR.
Bu dökümanda,
KİTAPTA BULUNAN SORULAR BULUNMAKTADIR.
Konuların içeriğini ve soruların çözümlerini
MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1)
ALTIN NOKTA YAYINLARI
kitabında bulabilirsiniz.

Bu kitap,

Fonksiyonlar
Polinomlar
İkinci Dereceden Denklemler
Üçüncü Dereceden Denklemler
Denklem Sistemleri
Diziler, Artimetik Dizi, Geometrik Dizi

gibi konularda farklı, sıradışı ve kısmen zor problemler çözmek isteyen öğretmen ve öğrencilerimiz için, güzel bir kaynak olarak kullanılmaktadır.
Bu konulardaki lise Matematik yarışmalarında sorulan sorular, kitaba ilave edilmiştir.

Kitabın içeriğindeki konuları, Aşağıdaki İÇİNDEKİLER bölümünden inceleyebilirsiniz

Mustafa Özdemir
İrtibat İçin : mozdemir07@gmail.com
veya Altın Nokta Yayınevi

İçindekiler

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
Denklemler ve Denklem Sistemleri

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
Diziler

AŞAĞIDAKİ ÖRNEKLERİN ve PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

Fonksiyonlar

Örnek 1 *$\beta = \{(x, y) : |x| + |y| = 2,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ bağıntısının grafiğini çizelim.*

Örnek 2 *$[\![x]\!]$, x sayısından büyük olmayan en büyük tamsayıyı göstermek üzere,*

$$\beta = \{(x, y) : [\![x]\!]\ [\![y]\!] = 2,\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

bağıntısının grafiğini çizelim.

Örnek 3 *Aşağıdaki bağıntıların fonksiyon olup olmadıklarını olduğunu açıklayınız.*

$a)\ f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ f_1(x) = x - 1$

$b)\ f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f_2(x) = \dfrac{x(x+1)(2x+1)}{6}$

$c)\ f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \dfrac{1}{x} + x$

$d)\ f_4 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^+,\ f_4(x) = x^2$

Örnek 4 *$f(n) = n^3$ ve $g(n) = f(n+1) - f(n)$ olduğuna göre,*

$$g(0), g(1), ..., g(99)$$

sayılarının ortalaması kaçtır?

Örnek 5 *$f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ fonksiyonu $f(1/x) + (1/x) f(-x) = x/3$ koşulunu sağlıyorsa, $f(1/3) =?$*

Örnek 6 *Her $x \in \mathbb{R}$ için, $f(x)$ fonksiyonu $3f(x) + 2f(1-x) = 2x + 9$ eşitliğini sağlıyorsa, $f(2) =?$*

Örnek 7 *$x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ için, $f(x) + f(1/(1-x)) = x$ olduğuna göre, $f(2) =?$*

Örnek 8 *$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,*

$$f(x) + f(1-x) = 101 \ \text{ ve } \ f(1+x) - f(x) = 92$$

eşitliklerini sağladığına göre, $f(x) + f(-x) =?$

Örnek 9 *$f(-1) = f(1) = 1$ ve her $x, y \in \mathbb{Z}$ için,*

$$f(x) + f(y) = f(x + 2xy) + f(y - 2xy)$$

olduğuna göre, $f(101) =?$

Örnek 10 *$f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ için,*

$$f(x)+2f\left(\frac{x+2009}{x-1}\right)=2010-x$$

eşitliğini sağladığına göre, $f(2011)=?$

Örnek 11 $2f(x)+3f(1-x)=x^2$ *ise, $f(x)=?$*

Örnek 12 *$f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}$ fonksiyonu, $f(0)=0$, $f(5)=980$ ve*

$$f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+2$$

eşitliklerini sağlıyorsa $f(10)=?$

Örnek 13 *$f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}$ fonksiyonu, $f(0)=0$, $f(1)=1$ ve $n\geq 2$ için,*

$$f(n)-2f(n-1)+f(n-2)=(-1)^n(2n-4)$$

eşitliklerini sağladığına göre, $f(n)$ fonksiyonunu bulunuz.

★ *Fonksiyonel denklemler konusu beşinci ciltte ayrıntılı olarak ele alınacaktır.*

Örnek 14 *Negatif olmayan tamsayılarda tanımlı, f fonksiyonu, her x,y için,*

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f\left(x^2+y^2\right)$$

eşitliğini sağladığına ve $f(99)=5$ olduğuna göre, $f(100)=?$

Örnek 15 *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+5$ fonksiyonunun bire-bir olup olmadığını gösteriniz.*

Örnek 16 *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ fonksiyonun bire-bir olup olmadığını grafiğini çizerek gösteriniz.*

Örnek 17 *Aşağıdaki fonksiyonlardan hangilerinin tersi vardır?*

$a)$ $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=2x+3$
$b)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-1$
$c)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^2+1$
$d)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{2}}$
$e)$ $A=\{1,2,3\}$, $f:A\to A$ *ve* $f=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$
$f)$ $A=\{1,2\}$ *ve* $B=\{a,b,c\}$, $f:A\to B$, $f=\{(1,a),(2,b)\}$

Örnek 18 *$f(x)=x^3-6x^2+12x$ fonksiyonunun tersini bulunuz.*

Örnek 19 *$f(x)=x^3-x^2-3x+4$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)=f(x)$ denklemini sağlayan x değerlerini bulunuz.*

Örnek 20 *$f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu,*

$$f(f(x))\cdot(1+f(x))=3+f(x)$$

denklemini sağladığına göre, $f(11)=?$

Örnek 21 *$f(f(f(x)))=27x+11$ koşulunu sağlayan $f(x)$ doğrusal fonksiyonunu bulunuz.*

Örnek 22 *n sayısının rakamları toplamını $f(n)$ ile gösterelim. Buna göre, $f\left(f\left(f\left(f\left(1989^{1989}\right)\right)\right)\right)=?$ (KANADA M.O.- 1989)*

Örnek 23 *$f_0(x)=\dfrac{1}{1-x}$ ve $f_{n+1}(x)=f_0(f_n(x))$ olduğuna göre, $f_{2011}(2010)$ kaçtır?*

Örnek 24 *p ve q pozitif tamsayılar olmak üzere, $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu*

$$f(xf(y))=x^py^q$$

eşitliğini sağladığına göre, $q=p^2$ olduğunu gösteriniz. (İSRAİL M.O. 1994)

Örnek 25 *$f(x)=\dfrac{x}{1-2^x}-\dfrac{x}{2}$ fonksiyonunun çift fonksiyon olduğunu gösteriniz. (ÇİN ULUSAL M. O.)*

Örnek 26 *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir tek fonksiyon ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir periyodik fonksiyon olmak üzere, $h(x)=x^2$ fonksiyonunun $f(x)+g(x)$ şeklinde yazılamayacağını gösteriniz.*

Örnek 27 *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+5$ fonksiyonunun $(2,\infty)$ aralığında artan olduğunu gösteriniz.*

Örnek 28 *$f(x):(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu azalan bir fonksiyon olmak üzere,*

$$f\left(2a^2+a+1\right)<f\left(3a^2-4a+1\right)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa a hangi aralıkta olmalıdır? (ÇİN ULUSAL M.O. 2005)

Örnek 29 *$f(x)=14-\sqrt{x^2-6x+25}$ fonksiyonunun alabileceği maksimum değer kaçtır?*

Örnek 30 *Her $x,y\in\mathbb{R}$ için, $f(f(x)+y)=f(x+y)+f(0)$ eşitliğini sağlayan tüm monoton artan reel değerli fonksiyonları bulunuz. (Avusturya Polonya M.O. 1988)*

1.1 Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Örnek 31 $f(x,y) : (\mathbb{R}-\{0\}) \times (\mathbb{R}-\{0\}) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu için,*

$$f(x, f(y,z)) = f(x,y) \cdot z \text{ ve } f(x,x) = 1$$

olduğuna göre, $f(x,12) = 24$ *eşitliğini sağlayan* x *sayısını bulunuz.*

Örnek 32 *Reel sayılar kümesinde sıfırdan farklı* x, y *reel sayıları için tanımlanan* $f(7/x, y/5) = x + y + xy$ *fonksiyonu için,* $f(6/5, 2/3) = ?$

Örnek 33 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *fonksiyonu,*

i) $f(a+1,b) - f(a-1,b) = 2a$ *ii)* $f(b,a) = -f(a,b)$ *iii)* $f(0,1) = 1$

koşullarını sağladığına göre, $f(999, 1000) = ?$

Örnek 34 $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olmak üzere,*

$$f(x,y) + z = f(y+z, x+z)$$
$$f(0, x+y) = f(0,x) + f(0,y)$$

koşulları sağlanıyorsa, $f(2009, 2011) = ?$

Örnek 35 $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu,*

i) $f(x,x) = x$

ii) $f(x,y) = f(y,x)$

iii) $f(x, f(y,z)) = f(f(x,y), z)$

iv) $y < z$ *ve* $f(x,y) \neq x$ *ise* $f(x,y) < f(x,z)$

koşullarını sağladığına göre, $f(x,y) = x$ *veya* $f(x,y) = y$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 36 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *fonksiyonu,*

$$f(2x,x) = 2f(x,x)$$
$$f(x+1,y) = f(x,y) + f\left(y^2+1, 0\right)$$
$$f(1,0) = 1$$

koşullarını sağladığına göre, $f(10, 11) = ?$

1.2 Karışık Örnekler

Örnek 37 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $\{x\}$, x *sayısının kesir kısmını göstermek üzere, her* x *için,* $x = f(x) + f(\{x\})$ *eşitliği sağlanmaktadır. Buna göre,* $f(200{,}8) = ?$

Örnek 38 *$f(n)$ fonksiyonu*

$$a_n = \begin{cases} n/2 & n \text{ çift} \\ (n-1)/2 & n \text{ tek} \end{cases}$$

olmak üzere, $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., a_n, ...$ *sayı dizisinin ilk* n *teriminin toplamını göstersin. Buna göre,* $x > y$ *ve* x, y *pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$f(x+y) - f(x-y)$$

ifadesini x *ve* y *cinsinden bulunuz.*

Örnek 39 *Her* $x \in \mathbb{R}$ *için,* $f(0) \neq 0$ *ve* $f(100x - f(0)) = 100x^2$ *olduğuna göre,* $f(100) = ?$

Örnek 40 n *ve* m *negatif olmayan tamsayıları için*

i) $f(0, n) = n + 1$

ii) $f(m, 0) = f(m-1, 1)$

iii) $f(m+1, n+1) = f(m, f(m+1, n))$ *olduğuna göre,*

$a)$ $f(1, 2008) = ?$ $b)$ $f(2, 2008) = ?$

Örnek 41 *Her* n *tamsayısı için,*

$$f(n) = \begin{cases} n-3 & n \geq 2008 \\ f(f(n+5)) & n < 2008 \end{cases}$$

olarak tanımlanıyor.

$a)$ $f(1000) = ?$

$b)$ $f(n) = 2005$ *olacak şekilde kaç* n *pozitif tamsayı değeri vardır?*

Örnek 42 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu,* $f(1) = 1$ *ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için,*

$$f(x+5) \geq f(x) + 5,$$
$$f(x+1) \leq f(x) + 1$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır. $g(x) = f(x) + 1 - x$ *ise* $g(2002) = ?$ (*ÇİN M.O.*- 2002)

Örnek 43 *Pozitif tamsayı ikililerinden tanımlanan* $f(x, y) : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu*

i) $f(1, 1) = 2,$

ii) $f(x+1, y) = 2(x+y) + f(x, y)$

iii) $f(x, y+1) = 2(x+y-1) + f(x, y)$

özelliklerini sağladığına göre $f(m, n) = 402$ *olacak şekilde* m *ve* n *tamsayılarını bulunuz.*

Örnek 44 $f_1(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ *olmak üzere,* $k = 1, 2, 3, ...$ *için*

$$f_{k+1}(x) = f_1(f_k(x))$$

şeklinde tanımlanıyor. $f_{35}(x)$ *ve* $f_5(x)$ *aynı olduğuna göre* $f_{28}\left(\sqrt{2}\right) = ?$ (*HONG KONG Pre. Contests*)

Örnek 45 *Her* x, y *reel sayısı için,* $f(x)+f(y) = f(x+y) - x \cdot y - 1$ *ve* $f(1) = 1$ *olduğuna göre,* $f(n) = n$ *olan negatif* n *tamsayısını bulunuz.*

Örnek 46 $f_0, f_1, ..., f_n, ...$ *fonksiyon dizisi, her* $x \in \mathbb{R}$ *ve* $n = 0,\ 1, 2, ...$ *için*

$$f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_n(x)}$$

eşitliğini sağlıyorsa, her n *pozitif tamsayısı için,* $f_n(x) = 2x$ *denklemini sağlayan* x *sayısı kaç olabilir?*

Örnek 47 $f(x) : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$ *fonksiyonu,*

$i)$ $f(mn) = f(m) + f(n)$

$ii)$ n*'nin son rakamı* 3 *ise,* $f(n) = 0$

$iii)$ $f(10) = 0$

eşitliklerini sağladığına göre, $f(1985) = ?$ (*Iberoamerikan M.O.* 1985)

Örnek 48 $\mathbb{Z}$ *tamsayılar kümesinin belirtmek üzere,* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, *fonksiyonu*

$$f(n) = \begin{cases} n-3, & n > 999 \\ f(f(n+5)), & n < 1000 \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığına göre $f(84)$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?* (*AIME*)

Örnek 49 $x \neq 0$ *ve* $x \neq \pm 1$ *olmak üzere,*

$$f(x)^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$$

olduğuna göre, $f(x) = ?$ (*Iberoamerikan M.O.* 1987)

Örnek 50 a, b, c *ve* d *sıfırdan farklı reel sayıları için,*

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

olarak tanımlanıyor. $f(19) = 19$ *ve* $f(97) = 97$ *olmak üzere* $-d/c$ *haricindeki tüm* x *değerleri için,* $f(f(x)) = x$ *eşitliği sağlanıyorsa,* f *fonksiyonunun tanım kümesinde yer almayan tek sayı nedir?* (*AIME*)

Örnek 51 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu*

$$\begin{aligned} f(x+19) &\leq f(x) + 19 \\ f(x+94) &\geq f(x) + 94 \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlıyorsa $f(x+1) = f(x) + 1$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 52 $\{a\}$, *a sayısının kesir kısmını göstermek üzere,* $f(x) = \{5x/2\}$ *fonksiyonu için,* $0 \leq x < 1$ *aralığında* $f(f(f(x))) = 0$ *olacak şekilde kaç tane* x *sayısı vardır?*

Örnek 53 $f(n)$, $\sqrt[4]{n}$ *sayısına en yakın tamsayıyı gösterdiğine göre,* $\sum_{k=1}^{2008} \frac{1}{f(k)} = ?$

Örnek 54 *Her* $x \in \mathbb{R}$ *için,* $f(x+19) \leq f(x) + 19$ *ve* $f(x+94) \geq f(x) + 94$ *eşitsizliklerini sağlayan reel değerli* f *fonksiyonunun her* $x \in \mathbb{R}$ *için,*

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

eşitliğini sağladığını gösteriniz. (*Avusturya Polonya M.O.* 1994)

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

1.3 Çözümlü Test

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, fonksiyonu için, $f(0)=1$ ve

$$f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$$

eşitlikleri sağlandığına göre, $f(100)=?$

A) 100 B) 101 C) 99 D) 200 E) Hiçbiri

2. n sayısının rakamlarının toplamı n_1, n_1 sayısının rakamlarının toplamı n_2 ve bu şekilde her defasında elde edilen sayının rakamların toplamı hesaplanarak, en sonunda bir rakam elde edilecektir. Bu rakamı $f(n)$ ile gösterelim. $f(n)=5$ olacak şekilde, 2010'dan küçük kaç pozitif tamsayı vardır?

A) 100 B) 222 C) 221 D) 223 E) Hiçbiri

3. $f(x)=\dfrac{9^x}{3+9^x}$ olduğuna göre,

$$f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{2}{1996}\right)+f\left(\frac{3}{1996}\right)+\cdots+f\left(\frac{1995}{1996}\right)$$

toplamını hesaplayınız. (KANADA 1995)

A) $1996/2$ B) $1997/2$ C) 1996 D) $1995/2$ E) Hiçbiri

4. Herhangi k pozitif tamsayısı için, $f_1(k)$ fonksiyonu k sayısının rakamlarının kareleri toplamını göstermektedir.

$$f_n(k)=f_1(f_{n-1}(k))$$

olduğuna göre, $f_{2009}(2010)=?$

A) 89 B) 37 C) 42 D) 29 E) Hiçbiri

5. Her x,y reel sayısı için, $f(x)f(y)-f(x\cdot y)=x+y$ olduğuna göre, $f(100)=?$

A) 100 B) 101 C) 99 D) 200 E) 199

6. Reel sayılarda tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonu her $x,y\in R$ için,

$$f(x+y)=f(x\cdot y)\ \text{ ve }\ f(-1/2)=-1/2$$

olduğuna göre, $f(100)=?$

A) 100 B) 101 C) 99 D) 50 E) Hiçbiri

7. $f(x) = ax^2 - c$ fonksiyonu için, $-4 \leq f(1) \leq -1$ ve $-1 \leq f(2) \leq 5$ olduğuna göre, $f(3)$ için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $0 < f(3) < 21$ B) $-2 < f(3) < 10$ C) $-2 < f(3) < 20$
D) $-1 < f(3) < 20$ E) Hiçbiri

8. Her x, y reel sayısı için, $f(x + y^2) = f(x) + 2(f(y))^2$ ve $f(1) \neq 0$ olduğuna göre, $f(100) =$?

A) 100 B) 101 C) 99 D) 50 E) Hiçbiri

9. $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu için,

$$f(x, y+z) = f(x, y) f(x, z)$$
$$f(x+y, 1) = f(x, 1) + f(y, 1)$$
$$f(x+y, 2) = f(x, 2) + 4f(xy, 1) + f(y, 2)$$

olduğuna göre, $f(5, 100)$ sayısı kaç basamaklıdır?

A) 100 B) 101 C) 99 D) 50 E) Hiçbiri

10. $f(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(x, 0) = x$, $f(x, y) = f(y, x)$ ve $f(x+1, y) = f(x, y) + y + 1$ koşullarını sağladığına göre, $f(13, 6) =$?

A) 100 B) 98 C) 99 D) 50 E) Hiçbiri

11. Her x reel sayısı için, $f(x+1) = \dfrac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$ olarak tanımlanıyor. $f(1) = 2$ olduğuna göre, $f(100) =$?

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{-1}{2}$ C) -3 D) 2 E) Hiçbiri

12. $x \neq 0$ ve $x \neq \pm 1$ olmak üzere, $f(x)^2 f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = 64x$ olduğuna göre, $f(4) =$?

A) $-2^3 \sqrt[3]{10/3}$ B) $-2^6 \sqrt[3]{10/3}$ C) $-2^4 \sqrt[3]{10/3}$ D) $-2^5 \sqrt[3]{10/3}$ E) Hiçbiri

13. f fonksiyonu, $f(100) = 0$ ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(f(x) + y) = f(x+y) + f(0)$ eşitliklerini sağlayan artan bir fonksiyon olduğuna göre $f(1000) =$?

A) 1000 B) 998 C) 999 D) 900 E) Hiçbiri

14. $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonu için, $f(1,1)=1$ olmak üzere,

$$f(x,y+z)=f(x,y)-z \quad \text{ve} \quad f(y+z,x)=f(y,x)+2z$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, $f(101,100)=?$

A) 100 B) 102 C) 99 D) 101 E) Hiçbiri

15. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ olmak üzere, $f(1)=1$ ve $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ olduğuna göre, $f(100)=?$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) Hiçbiri

16. Pozitif tamsayı ikililerinde tanımlanan $f(x,y)$ fonksiyonu

i) $f(x,x)=x+2$ ii) $f(x,y)=f(y,x)$ iii) $(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$

özelliklerini sağladığına göre $f(9,7)=?$

A) 100 B) 198 C) 199 D) 200 E) Hiçbiri

17. $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$, $f(x)=x^2+x+1$ ise,

$$(f(x))^{2008}+(f(x+1))^{2008}+\cdots+(f(x+n))^{2008}$$

ifadesinin 10 ile tam bölünebilmesi için n pozitif tamsayısı en küçük kaç olabilir?

A) 10 B) 11 C) 9 D) 12 E) 13

18. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ fonksiyonu

i) $\forall x,y\in N$ için $f(xy)=f(x)+f(y)-1$

ii) $f(x)=1$ eşitliğini sonlu sayıda x sağlar.

iii) $f(30)=4$

özelliklerini sağladığına göre, $f(400)=?$

A) 1 B) 7 C) 6 D) 5 E) Hiçbiri

19. $f(x)$ fonksiyonu her $x\in\mathbb{R}$ için, $f(x)+f(x-1)=x^2$ koşulunu sağlamaktadır. $f(19)=94$ ise, $f(94)$ değerinin son üç rakamı kaçtır? (AIME)

A) 861 B) 761 C) 561 D) 461 E) Hiçbiri

20. $f : R \to R$, fonksiyonu her x reel sayısı için, $f(0) = 0$, $f(2+x) = f(2-x)$ ve $f(7+x) = f(7-x)$ eşitliklerini sağladığına göre $|x| \leq 1000$ ve $f(x) = 0$ olacak şekildeki x sayılarının mümkün olan en küçük değeri kaçtır? (AIME)

A) 129 B) 400 C) 399 D) 402 E) Hiçbiri

21. a, b ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, $a + b = 2^n$ ve $f(a) + f(b) = n^2$ eşitlikleri sağlanıyorsa, $f(2002) = ?$ (Harvard MIT Math. Tournament)

A) 92 B) 96 C) 90 D) 88 E) Hiçbiri

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

1.4 Tübitak Matematik Olimpiyat Soruları

1. Negatif olmayan x, y tamsayıları için tanımlanan $F(x, y)$ fonksiyonunda,

i) Her x, y için, $F(x+1, y) + F(x, y+1) = F(x, y) + F(x+1, y+1)$

ii) Her x için, $F(x, 0) = x$

iii) Her $y > 0$ için, $F(0, y) = 1$

ise, $F(1000, 993)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1993 B) 1001 C) 999 D) 7 E) 994

UMO - 1993

2. Rasyonel sayılardan rasyonel sayılara tanımlı bir f fonksiyonu tüm a, b rasyonel sayıları için, $f(a+b) = f(a) + f(b)$ denklemini sağlasın. $f(2) = 3$ olduğuna göre, $f(5/2)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{5}{2}$ B) 3 C) $15/4$ D) $11/2$ E) $15/2$

UMO - 1994

3. $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonskiyonu, her x, y pozitif tamsayıları için, $f(x, x) = x$, $f(x, y) = f(y, x)$ ve $f(x, y) = f(x, x+y)$ koşullarını sağlıyorsa, $f(91, 143)$ kaçtır?

A) 1 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

UMO - 1994

4. $x > 0$ için, $f(x+1) = xf(x)$ ve $f(1) = 1$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $f(x)$'in en küçük değerini aldığı nokta $(1, 2)$ aralığındadır.

B) $f(x)$'in en küçük değerini aldığı nokta $(0, 1)$ aralığındadır.

C) $f(x)$ en küçük değeri $x = 1$ noktasında alır.

D) $f(x)$'in en büyük değerini aldığı nokta $(1, 2)$ aralığındadır.

E) $f(x)$'in en büyük değerini aldığı nokta $(2, \infty)$ aralığındadır.

UMO - 1995

5. $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu, her $x, y \in \mathbb{Z}$ için,

1) $f(x+1, y+1) + f(x, y) = f(x, y+1) + f(x+1, y)$

2) $f(x, 0) = x^2$ 3) $f(0, y) = -y^2$

koşullarını sağlıyor. $f(1000, 996)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7984 B) 1996 C) 16 D) 4 E) Hiçbiri

UMO - 1996

6. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için,

$$f(x) + f(y) = f(x) \cdot f(y) + 1 - \frac{1}{xy}$$

koşulunu sağlıyor ve $f(2) < 1$ ise, $f(3)$ değeri nedir?

A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{2}{3}$

D) Verilenlerden tek bir $f(3)$ değeri belirlenemez.

E) Verilen koşlulları sağlayan bir f fonksiyonu yoktur.

UMO - 1998

7. Pozitif gerçel sayılar üzerinde tanımlı, $f(1) = 1$ koşulu ile tüm x, y gerçel sayıları için $f\left(x^2 \cdot y^2\right) = f\left(x^4 + y^4\right)$ koşulunu sağlayan kaç tane f fonksiyonu vardır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) Sonsuz sayıda

UMO - 1999

8. Tüm x, y gerçel sayıları için,

$$f(x) f(y) - f(xy) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının alabileceği farklı $f(2)$ değerlerinin toplamı nedir?

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{-5}{4}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) Hiçbiri

UMO - 2000

9. f fonksiyonu her gerçel x değeri için, $f(x)+3f(1-x) = x^2$ eşitliğini sağlıyorsa, $S = \{x : f(x) = 0\}$ olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) S sonsuz bir kümedir B) $\{0, 1\} \subset S$ C) $S = \emptyset$

D) $S = \left\{\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right\}$ E) Hiçbiri

UMO - 2003

10. f fonksiyonu, her $x \neq 1$ gerçel sayısı için,

$$f(x) + f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right) = x^3$$

eşitliğini sağlıyorsa, $f(-1)$ nedir?

A) -1 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{4}$ E) Hiçbiri

UMO - 2004

11. Her n pozitif tamsayısı için, $f(2n+1) = 2f(2n)$ ve $f(2n) = f(2n-1)+1$ ve $f(1) = 0$ ise, $f(2005)$ sayısının 5'e bölümünden elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

UMO - 2005

12. $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu her $x, y \in (0,\infty)$ için

$$10 \cdot \frac{x+y}{xy} = f(x) \cdot f(y) - f(xy) - 90$$

denklemini sağlıyorsa $f(1/11)$ kaçtır?

A) 1 B) 11 C) 21 D) 31 E) Tek türlü bulunamaz

UMO - 2008

13. Herhangi bir $r > 0$ sayısı için, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve

$$|x-2| < r^2 \Rightarrow |f(x) - 3| < r, \quad |x-2| < r/10 \Rightarrow |g(x) - 4| < r$$

şartlarını sağlayan (f, g) fonksiyon çiftleri düşünülüyor. Aşağıdaki x değerlerinden hangileri,

$$|f(x) + g(x) - 7| < 1/2$$

eşitsizliğini bu tür (f, g) çiftlerinin tümü için sağlar?

(I) $x = 1,99$, (II) $x = 2,024$, (III) $x = 1,95$, (IV) $x = 1,9$

A) Hiçbiri için B) Sadece I için C) Sadece I ve II için

D) Sadece I, II ve III için E) Hepsi için

UMO - 1994

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

1.5 Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatı Soruları (Fonksiyonlar)

1. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ olmak üzere $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ fonksiyonu her $(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ için $f(0, y) = y + 1$, $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$ ve $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$ eşitliklerini sağlamaktadır. $f(1, 1998)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1998 B) 1999 C) 2000 D) 2002 E) Hiçbiri

Antalya M.O.- 1998

2. $F(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları tüm reel eksende verilmiş reel değerli fonksiyonlar olmak üzere, her x ve y için $F(x + f(y)) = 3x + y + 7$ eşitliği sağlanmaktadır. $f(2 + F(7))$ değerini bulunuz.

A) 7 B) 9 C) 10 D)13 E) 14

Antalya M.O.- 1999

3. Bir f fonksiyonu her a ve b reel sayıları için $f(a+b) = f(ab)$ ve $f(1999) = 1999$ koşullarını sağlamaktadır. Buna göre, $f(1000)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1999 B) 2000 C) 1000 D) 999 E) hiçbiri

Antalya M.O.- 2000

4. Tüm pozitif tam sayılardan oluşan küme $\mathbb{N}$ ile gösterilmek üzere, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu,

i) m ve n aralarında asal olunca , $f(mn) = f(m)f(n)$;

ii) p ve q asal olunca, $f(p + q) = f(p) + f(q)$

özelliklerine sahipse, $f(100)$ kaçtır?

A) 29 B) 50 C) 70 D) 125 E) hiçbiri

Antalya M.O.- 2000

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için $(f(y))^2 = \frac{1}{2}[f(x + y^2) - f(x)]$ eşitliğini sağlamaktadır. $f(1) \neq 0$ olduğuna göre, $f(2002)$ sayısı kaçtır?

A) 1000 B) 2001 C) 1001 D) 2000 E) 2002

Antalya M.O.- 2002

6. f ve g fonksiyonları, her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$2f(x) + g(x) + 3f(\sqrt[3]{y}) - g(\sqrt[3]{y}) = \sqrt[3]{y^2} + 3\sqrt[3]{x}$$

eşitliğini sağlamaktadır. $f(8)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 12 B) 13 C) 10 D) 14 E) 15

Antalya M.O.- 2004

7. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu veriliyor. $f(1) = 1$ ve her n için $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ toplamı, n'den büyük olmayan bir doğal sayının küpü olduğuna göre, $f(5)$'in 7 ile bölümünden kalan nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Antalya M.O.- 2004

8. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{Z}$ için $f(f(n+1) - 7) = n - 1$ ve $f(f(n)) = n$ eşitliklerini sağlıyor. $f(0) = 1$ ise, $f(2005)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A)7014 B)7007 C)7021 D)7028 E)7070

Antalya M.O.- 2005

9. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi verilsin. $f : X \to X$ fonksiyonları içinde, $a, b, c \in X$ olmak üzere, $f(a) = f(b) = f(c)$ koşulunu sağlamayan kaç tane fonksiyon vardır?

A) 200 B) 202 C) 204 D) 208 E) 212

Antalya M.O.- 2005

10. $f(x) = \dfrac{1}{4^x + 2}$ fonksiyonu verilsin. 1111'den küçük ve 1111 ile aralarında asal olan pozitif k tamsayıları için,

$$a_k = f\left(\frac{k}{1111}\right) + f\left(\frac{1111 - k}{1111}\right)$$

sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 500 B) 800 C) 600 D) 400 E) 1000

Antalya M.O.- 2008

11. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi olmak üzere, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonu, her $x, y \in \mathbb{Q}$ için $f(x + y) - 10 = f(x) + f(y)$ ve $f(1) = 1$ eşitliklerini sağlasın. Buna göre, $f(10/11)$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Antalya M.O.- 2008

12. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $f(f(x) + y) - f(y + 7) = x$ eşitliğini ve $f(2) = 5$ koşulunu sağlasın. Bu durumda, $f(11)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4 B) -3 C) -2 D) 2 E) 7

Antalya M.O.- 2009

Polinomlar

Örnek 55 *$x^4+x^3-2x^2+x+1$ polinomunu, x^2-x+1 polinomuna bölünüz.*

Örnek 56 *$x^{1000}-2x^{999}-\frac{1}{2}x^{500}+x^{499}+\frac{3}{2}x^{6}-x^{5}+4$ polinomunun $(x-1)(x-2)$ ile bölümünden kalanı bulunuz.*

Örnek 57 *$P(x)$ ikinci dereceden polinomu her x reel sayısı için, $P(x)\geq 0$ eşitsizliğini sağlamaktadır. $P(2)=0$ ve $P(3)=2$ olduğuna göre, $P(1)+P(5)+P(-1)$ toplamını bulunuz.*

Örnek 58 *$P(x)$ dördüncü dereceden bir polinom olmak üzere,*

$$P(2)=P(-1)=P(-3)=-1 \text{ ve } P(1)=P(-2)=1$$

ise, $P(4)=?$

2.1 Polinomların Eşitliği

Örnek 59 *$x^6+1=\left(x^2+1\right)\left(x^2+ax+1\right)\left(x^2+bx+1\right)$ polinom eşitliğine göre $a\cdot b=?$*

Örnek 60 *$x^4+mx^3+nx^2+20x+25$ polinomu bir tamkare olduğuna göre, $m+n$ nedir?*

Örnek 61 *$\dfrac{3x-5}{x^3-x^2+x-1}$ rasyonel ifadesini kesirlere ayırınız.*

Örnek 62 *$a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ve k reel sayısı $(-6,6)$ aralığında olmak üzere,*

$$x^4+kx^2+9=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$$

eşitliği sağlanıyorsa, $c=\mp\sqrt{6-k}$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 63 *Bir pozitif n tamsayısı $x,y\in\mathbb{Z}$ için, $2x^2+3y^2$ formunda yazılabiliyorsa n sayısına güzel sayı diyelim, n sayısı güzel sayı ise $7n$ sayısının da güzel sayı olduğunu gösteriniz.*

Örnek 64 *$x\neq -3/2$ olmak üzere, $f(x)=\dfrac{cx}{2x+3}$ fonksiyonu için, $f(f(x))=x$ eşitliğini sağlayan c değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

Örnek 65 $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ *olmak üzere, her* y *için,*

$$Q(y) \cdot R(y) = P\left(y^2\right)$$

eşitliğini sağlayan tamsayı katsayılı $Q(y)$ *ve* $R(y)$ *polinomlarının olduğunu gösteriniz.*

Örnek 66 $x^3\left(x^3+1\right)\left(x^3+2\right)\left(x^3+3\right)$ *polinomunun en küçük değerini bulunuz.*

Örnek 67 a *ve* b *tamsayılar olmak üzere,* $(x-a)^2(x-b)^2+1$ *polinomunun tamsayı katsayılı iki polinomun çarpımı olarak yazılamayacağını gösteriniz.*

2.2 Polinomların Katsayıları ve Terim Sayısı İle İlgili Sorular

Örnek 68 $P(x) = \left(x^{999}+x^3-x+1\right)^{100}$ *polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamını bulunuz.*

Örnek 69 $P(x,y) = x^2y + 3xy + 5y^2 + 3x^2$ *olduğuna göre,* $P(x-3, y+4)$ *polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.*

Örnek 70 $(1+x)^{19}+x(1+x)^{18}+x^2(1+x)^{17}+\cdots+x^{17}(1+x)^2$ *polinomunun açılımında* x^{17} *teriminin katsayısını bulunuz.*

Örnek 71 $\left(2x^3-4x\right)^{10}$ *ifadesinin açılımında* x^{24} *teriminin katsayısı kaçtır?*

Örnek 72 $\left(x+3x^2+x^3\right)^7$ *ifadesinin açılımında,* x^{10} *teriminin katsayısı kaçtır?*

Örnek 73 $(x+5)(x+4)(x+7)(x+6)^3\left(2x^2+3\right)^3\left(x^3+4x+6\right)^2$ *polinomunun açılımında terimlerden kaç tanesinin katsayısı tektir?*

Örnek 74 $(x+3)^9$ *ifadesinin açılımında katsayılardan kaç tanesi tektir?*

Örnek 75 $(x+y+z+w)^6$ *ifadesinin açılımında kaç tane terim vardır?*

Örnek 76 $\left(x+x^2+x^3\right)^5$ *ifadesinin açılımında kaç tane terim vardır?*

2.3 Horner Metodu İle Bölme

Örnek 77 $P(x) = x^5+2x+1$ *polinomunun* $Q(x) = x^2-2x-3$ *ile bölümünden elde edilen bölümü ve kalanı bulunuz.*

Örnek 78 $P(x) = x^4+6x^3+12x^2+11x+6$ *polinomunu çarpanlara ayırınız.*

2.4 Bölme işleminde Kalanın Bulunması

2.4.1 Bir Polinomun $ax+b$ İle Bölümününden Kalanı Bulma

Örnek 79 *$P(x)=x^{333}+x^{111}+x+1$ polinomunun, $x+1$ ile bölümünden kalan kaçtır?*

2.4.2 Bir Polinomun $(ax+b)(cx+d)$ İle Bölümünden Kalanı Bulma

Örnek 80 *$P(x+2)$ ve $P(2x+1)$ polinomlarının $x+1$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla 5 ve 11 olduğuna göre, $P(x)$ polinomunun x^2-1 ile bölümünden kalan nedir?*

2.4.3 Bir Polinomun ax^n+b İle Bölümünden Kalanı Bulma

Örnek 81 *$P(x)=\left(x^{1453}+x^{1071}\right)$ polinomunun, $1+x+x^2+\cdots+x^9$ polinomu ile bölümünden kalanı bulunuz.*

2.4.4 Bir Polinomun ax^n+bx^m $(n>m)$ İle Bölümünden Kalanı Bulma.

Örnek 82 *Kaç tane n tamsayısı için, $n^{111}+n^{11}+n+1$ ifadesi n^3+n ile tam bölünür.*

Örnek 83 *$P(5x-9)=x^{11}+x^{10}+\cdots+x+1$ olmak üzere,*

$$P\left(x^{64}-x^{32}+x^{16}-x^8+x^4-x^2+1\right)$$

polinomunun, x^2+x ile bölümünden kalan nedir?

Örnek 84 *$P(x,y)=x^5y^4-3x^4y^3+4x^3y^3-5x^3y^2-4xy$ polinomunun, x^2y+x ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.*

Örnek 85 *$x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ polinomunun $x^4+x^3+x^2+x+1$ polinomu ile tam bölündüğünü gösteriniz.*

Örnek 86 *$1+x+x^2+\cdots+x^m$ polinomu $1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$ polinomunu bölecek şekildeki (m,n) pozitif tamsayı ikililerini belirleyiniz.* (*USO* 1977)

2.5 Bir Polinomun Türevi

Örnek 87 *$P(x)=(x-a)^5$ polinomunun kaçıncı türevine kadar a bir köktür?*

Örnek 88 *$P(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ polinomunun katlı kökünün bulunmadığını gösteriniz.*

Örnek 89 *x^5-5ax^4+b polinomunun iki katlı kökü varsa a ile $b\neq 0$ arasındaki bağıntı nedir?*

Örnek 90 *$P(2x)=P'(x)P''(x)$ eşitliğini sağlayan tüm $P(x)$ polinomlarını bulunuz.* (*İSVEÇ M.O.* 1962)

2.5.0.1 Bir Polinomun $(ax-b)^n$ İle Bölümünden Kalanı Bulma.

Örnek 91 *$P(x)=ax^5+bx+4$ polinomu $(x-1)^2$ ile kalansız bölündüğüne göre a ve b yi bulunuz.*

Örnek 92 *$P(x)=8x^5+ax^4-10x^3+bx^2+4x+c$ polinomu $(2x-1)^3$ ile tam bölünüyor ise, $a+b+c=?$*

Örnek 93 *$P(x)=x^3-ax^2+bx-1$ reel katsayılı polinomunun farklı olması gerekmeyen 3 reel pozitif kökü olması için $a+b$ toplamının minimum değeri ne olmalıdır?*

2.5.1 Tamsayı Katsayılı $P(x)$ Polinomu İçin, $P(x)-P(y)$ polinomu $(x-y)$'ye Bölünür.

Özellik : *Herhangi tamsayı katsayılı $P(x)$ polinomu için, $(x-y)$ ifadesi daima $P(x)-P(y)$ polinomunun bir çarpanıdır.*

İspat :

Örnek 94 *$P(7)=11$ ve $P(11)=20$ olacak şekilde, tamsayı katsayılı kaç tane $P(x)$ polinomu vardır?*

Örnek 95 *$P(x)$ tamsayı katsayılı bir polinom olmak üzere, $P(17)=10$ ve $P(24)=17$'dir. $P(n)=n+3$ denkleminin iki farklı pozitif tamsayı çözümü a ve b olduğuna göre, $a\cdot b=?$* (*AIME* 2005)

2.6 Karışık Örnekler

Örnek 96 *$P(0)$ bir tamsayı ve $P(-1) = 2009$ olmak üzere, $k = 1, 2, ..., n$ için, $P(k) = k^{29}$ eşitliğini sağlayan ve derecesi n olan $P(x)$ polinomu göz önüne alınıyor. n sayısı 29'dan büyükse, n en küçük kaç olur?*

Örnek 97 *$P(x)$ tamsayı katsayılı bir polinom olmak üzere, $P(10) = 2010$ ise, $P(2010)$ polinomunun tamkare olamayacağını gösteriniz.*

Örnek 98 *$f_1(x) = (x+1)^{20}$ olmak üzere, $i = 2, 3, ...$ için, $f_i(x)$ fonksiyonları,*

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(x+1) - f_1(x), \\ f_3(x) &= f_2(x+1) - f_2(x), \\ f_4(x) &= f_3(x+1) - f_3(x), \\ &\vdots \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanıyor. Buna göre,

$$f_{21}(1) + f_{22}(2) + \cdots + f_{120}(100)$$

toplamını hesaplayınız.

Örnek 99 *Tamsayı katsayılı bir polinomunun, 0 ve 1 değerleri için aldığı tamsayı değerler tek sayı olduğuna göre, bu polinomun tamsayı kökünün olamayacağını gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1971)

Örnek 100 *Tüm katsayıları negatif olmayan ve $P(0)$'dan büyük olmayan n'inci dereceden $P(x)$ polinomu veriliyor. Buna göre, $(P(x))^2$ polinomunda x^{n+1} teriminin katsayısının en çok $(P(1))^2/2$ olabileceğini gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1974)

Örnek 101 *n bir pozitif tamsayı olmak üzere, $(P(x))^n = P(P(x))$ eşitliğini sağlayan tüm reel sayı katsayılı polinomları bulunuz.* (*KANADA M.O.* 1975)

Örnek 102 *$P(x, y)$, $(x-y)$ çarpanına sahip simetrik bir polinom olsun .$(x-y)^2$ ifadesinin de $P(x, y)$ polinomunun bir çarpanı olduğunu gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1976)

Örnek 103 *$P(x)$ ve $Q(x)$ reel sayılarda tanımlı polinomlar olsunlar.*

$$P(Q(x)) = Q(P(x)) \text{ ve } P(x) = Q(x)$$

eşitliklerini sağlayan bir x değeri yoksa, $P(P(x)) = Q(Q(x))$ eşitliğinin çözümü olmadığını gösteriniz. (*KANADA M.O.* 1981)

Örnek 104 *$x^3 + px^2 + qx + r$ polinomunun $(0, 2)$ aralığında üç kökü olduğuna göre, $-2 < p + q + r < 0$ olduğunu gösteriniz.*

Örnek 105 *$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, her $x \in \mathbb{R}$ için,*

$$(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = \left(x^2 + cx + d\right)^{10}$$

olduğuna göre, $c + d =$? (*SSCB M.O.* 1963)

Örnek 106 *Kökleri $x^5 - x - 1 = 0$ denkleminin köklerinin onuncu kuvveti olan beşinci dereceden bir polinom bulunuz.*

Örnek 107 *$P(x) + 1$ polinomu $(x-1)^3$ ile ve $P(x) - 1$ polinomu da $(x+1)^3$ ile tam bölünecek şekilde beşinci dereceden bir $P(x)$ polinomu bulunuz.* (*M. Excalibur*)

Örnek 108 *Dört farklı asal sayı değeri için ± 3 değerini alan tamsayı katsayılı üçüncü dereceden bir polinom olmadığını ispatlayınız.* (*Avusturya Polonya M.O.* 1997)

Örnek 109 *$P(x)$ polinomunun tüm katsayıları $0,\ -1$ veya 1 ve $Q(x)$ polinomunun katsayılarından biri 100 olmak üzere, $P(x) = Q(x)R(x)$ eşitliğini sağlayan tamsayı katsayılı $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomları bulunabilir mi?*

Örnek 110 *Her n pozitif tamsayısı için,*

$$(P(x))^2 - 1 = \left(x^2 - 1\right)(Q(x))^2$$

eşitliğini sağlayan, n'inci dereceden bir $P(x)$ polinomu ve $(n-1)$'inci dereceden bir $Q(x)$ polinomunun bulunabileceğini gösteriniz. (*M. Excalibur*)

Örnek 111 *Tamsayı katsayılı bir $P(x)$ polinomu, x'in dört farklı tamsayı değeri için 5'e eşit olduğuna göre, hiç bir x değeri için $P(x) = 8$ olamayacağını gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1970)

Örnek 112 *Tamsayı katsayılı $P(x)$ polinomu $n \in \mathbb{Z}$ için $p(-n) < p(n) < n$ eşitsizliğini sağlıyorsa, $p(-n) < -n$ olduğunu ispatlayınız.* (*BALTIK WAY M.O.* - 1991)

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

2.7 Çözümlü Test

1. $x^{135} + x^{125} - x^{115} + x^5 + 1$ polinomunun $x^3 - x$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) $2x - 1$ B) $2x + 1$ C) $2x + 3$ D) $2x - 3$ E) Hiçbiri

2. $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinomu, $-1 \le x \le 1$ için, $|P(x)| \le 1$ eşitsizliğini sağlıyorsa, b reel sayısının maksimum değeri kaç olabilir? (Excalibur)

A) 1 B) 3 C) $3/2$ D) 4/3 E) Hiçbiri

3. $P(x)\,Q(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ olacak şekilde, en büyük teriminin katsayısı 1 olan kaç tane $P(x)$ polinomu vardır?

A) 16 B) 30 C) 31 D) 20 E) Hiçbiri

4. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots - x^{15} + x^{16} - x^{17}$ polinomu $y = x + 1$'in kuvvetleri şeklinde yazılırsa y^2'nin katsayısı kaç olur? (AIME)

A) 1 B) 3 C) $3/2$ D) 4/3 E) Hiçbiri

5. $x^{999} - 1$ ifadesinin $\left(x^2 + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)$ polinomuna bölümünden kalan polinomun katsayılar toplamını bulunuz.

A) 1 B) -1 C) -2 D) 0 E) Hiçbiri

6. $P(x)$ ve $Q(x)$ tamsayı katsayılı polinomlar olmak üzere,

$$(x+1)(x+3)(x+5)\,P(x) - (x-1)(x-3)(x-5)\,Q(x) = m$$

eşitliğini sağlayan en küçük m pozitif tamsayısı kaçtır?

A) 900 B) 960 C) 480 D) 1440 E) Hiçbiri

7. $x^{2010} + y^{2010}$ polinomu $x + y$ ve xy polinomları cinsinden ifade edildiğinde katsayıları toplamı ne olur?

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) Hiçbiri

8. $P(x)$, derecesi 2008 olan bir polinom olmak üzere,

$$k = 1, 2, ..., 2009 \text{ için, } P(k) = \frac{1}{k}$$

olduğuna göre, $P(2010)$ kaçtır?

A) $1/1005$ B) $1/2009$ C) $1/2010$ D) $1/1004$ E) Hiçbiri

9. $P(x)$, n'inci dereceden bir polinom olmak üzere, $x = 0,\ 1, 2, ..., n$ değerleri için,

$$P(x) = \frac{x}{x+1}$$

eşitliği sağlandığına göre, n çift sayısı için, $P(n+1) = ?$

A) $2n/(n+1)$ B) $(n+1)/(n+2)$ C) $n/(n+1)$ D) $n/(n+2)$ E) Hiçbiri

10. $P(x) = x^2 + ax + b$ polinomu her $x \in [0, 4]$ için, $[-2, 2]$ aralığındaki değerleri alacak şekilde kaç tane (a, b) reel sayı ikilisi vardır?

A) 1 B) 0 C) 2 D) 4 E) Sonsuz Sayıda

11. $x^9 + x^8 + x^7 + \cdots + x + 1$ polinomunun kaç farklı reel kökü vardır?

A) 9 B) 7 C) 5 D) 3 E) 1

12. $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$ olmak üzere, $n \geq 1$ için,

$$P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$$

olarak tanımlanıyor. $P_{20}(x)$ polinomunda x'in katsayısı kaçtır? (AIME)

A) 763 B) 313 C) 279 D) 823 E) Hiçbiri

13. $(1-x)(1+2x)(1-3x)\cdots(1+14x)(1-15x)$ çarpımının açılımında x^2 teriminin katsayısının mutlak değeri kaçtır? (AIME)

A) 567 B) 588 C) 490 D) 340 E) Hiçbiri

14. $P(x)$ tamsayı katsayılı bir polinom olmak üzere, $P(21) = 17$, $P(32) = -247$ ve $P(37) = 33$ eşitlikleri vardır. $P(a) = a + 51$ olacak şekildeki a tamsayısı kaçtır? (British M.O.)

A) 23 B) 26 C) 32 D) 45 E) Hiçbiri

15. $P(0) \in \mathbb{Z}$ ve $P(-1) = 2003$ olmak üzere, $k = 1, 2, ..., n$ için, $P(k) = k^{11}$ eşitliğini sağlayan ve derecesi n olan $P(x)$ polinomu göz önüne alınıyor. n sayısı 11'den büyükse, n en küçük kaç olur?

A) 165 B) 166 C) 131 D) 127 E) Hiçbiri

16. $P(0) = 2$ ve her x için, $P\left(x^2+1\right) = P^2(x) + 1$ eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomunun kaç terimi vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) Hiçbiri

17. $f_1(x) = (x+7)^2\left(x^2-x+1\right)^3\left(x^5+3x^2-4\right)^2$ olmak üzere, $i = 2, 3, ...$ için, $f_i(x)$ fonksiyonları,

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(x+1) - f_1(x), \\ f_3(x) &= f_2(x+1) - f_2(x), \\ f_4(x) &= f_3(x+1) - f_3(x), \\ &\ldots \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanıyor. Buna göre,

$$f_n(1) = f_n(2) = \cdots = f_n(25)$$

eşitliğini sağlayan en küçük n pozitif tamsayısı kaçtır? (USC Math. Contest)

A) 19 B) 13 C) 17 D) 16 E) Hiçbiri

18. $f(x) = 7x^3 + 28x + 18$ olduğuna göre

$$\begin{gathered} f(x+8) - f(x+7) - f(x+6) + f(x+5) - f(x+4) \\ + f(x+3) + f(x+2) - f(x+1) \end{gathered}$$

ifadesi hangi sabit sayıya eşittir? (USC Math.Contest)

A) 336 B) 344 C) 236 D) 84 E) Hiçbiri

19. Kaç tane a tamsayısı için, $x^2 - x + a$ polinomu, $x^{13} + x + 90$ polinomunu böler? (Putnam 1963)

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) Hiçbiri

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

2.8 Tübitak Matematik Olimpiyat Soruları

1. $x^2 - x + 1$ polinomunun $x^n - x + 1$ polinomunu tam olarak bölmesini mümkün kılan n pozitif tamsayılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2\}$ B) $\{n \in \mathbb{N} : n \equiv 2 \pmod 3\}$ C) $\{n \in \mathbb{N} : n \equiv 2 \pmod 6\}$

D) $\{n \in \mathbb{N} : n \equiv 2 \pmod{12}\}$ E) Hiçbiri

UMO - 1996

2. Aşağıdaki $P(x)$ polinomlarından hangisi için,

$$P(x) = Q(x)\left(x^2+1\right) + R(x)(x-1)$$

olacak şekilde tamsayı katsayılı $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomları vardır?

A) $P(x) = x^9 + 4x^7 + x^3 + 3x + 2$ B) $P(x) = x^9 + 2x^6 + x^4 + 3x$

C) $P(x) = x^9 + 2x^6 + 3x^5 + 2x$ D) $P(x) = x^9 + x^7 + 2x + 1$

E) Hiçbiri

UMO - 1997

3. Katsayıları tamsayılar olan ve 5 farklı tamsayıda 8 değerini alan bir polinomun en çok kaç tamsayı kökü olabilir?

A) 0 B) 8 C) 5 D) Bu koşulları sağlayan polinom yoktur.

E) Bu koşulları sağlayan polinomların tamsayı köklerinin sayıları üstten sınırlı değildir.

UMO - 1997

4. $P(x)$ polinomu her x gerçel sayısı için, $2P(x) = P(x+3) + P(x-3)$ koşulunu sağlıyorsa, P'nin derecesi en çok kaç olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

UMO - 1999

5. $f(x)$ polinomu her x gerçel sayısı için, $(x-1)f(x+1) - (x+2)f(x) = 0$ koşulunu sağlıyor. $f(2) = 6$ ise, $f(3/2) = ?$

A) 0 B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{15}{8}$ D) -6 E) Hiçbiri

UMO - 1999

6. $P(x)$ tüm kökleri gerçel olan ve her x gerçel sayısı için, $P\left(x^2-1\right) = P(x)P(-x)$ eşitliğini sağlayan bir polinom ise, $P(x)$'in derecesi en fazla kaç olabilir?

A) 0 B) 2 C) 4 D) $P(x)$'in derecesi için üst sınır yoktur. E) Hiçbiri

UMO - 2000

7. a bir gerçel sayı olmak üzere, $P(x) = x^3 + ax + 1$ polinomunun $[-2, 0)$ ve $(0, 1]$ aralıklarında tam olarak birer gerçel kökü varsa, aşağıdakilerden hangisi $P(2)$'ye eşit olamaz?

A) $\sqrt[3]{10}$ B) $\sqrt[3]{30}$ C) $\sqrt{30}$ D) $\sqrt{26} - 1$ E) $\sqrt{17}$

UMO - 2001

8. $P(x) = x^2 + ax + b$ fonksiyonu, $P(-1) > 0$ ve $P(1/2) < 0$ koşullarını sağlıyorsa, $P(2)$ aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) $1 + \sqrt{2}$ B) $6 - \sqrt{3}$ C) -2 D) $3\sqrt{3}$ E) Hiçbiri

UİMO - 2002

9. $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 2$ polinomunun kaç gerçel kökü vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Hiçbiri

UMO - 2002

10. $x^{60} - 1$ polinomu aşağıdaki polinomlardan hangisi ile bölünmez?

A) $x^2 + x + 1$ B) $x^4 - 1$ C) $x^5 - 1$ D) $x^{15} - 1$ E) Hiçbiri

UMO - 2002

11. P polinomu, her gerçel x için;

$$(x-4)\,P(2x) = 4\,(x-1)\,P(x)$$

eşitliğini ve $P(0) \neq 0$ koşulunu sağlıyorsa, P'nin derecesi nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) Hiçbiri

UMO - 2002

12. $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 \cdots + x^{18} - x^{19}$ polinomu verilsin. $Q(x) = P(x-1)$ şeklinde tanımlanan Q polinomunda x^2 nin katsayısı kaçtır?

A) 840 B) 816 C) 969 D) 1020 E) 1140

UMO - 2008

13. a, b, c pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomu $P(1) \geq 2$ ve $P(3) \leq 31$ koşullarını sağlıyorsa, $P(4)$'ün alabileceği kaç tam sayı değeri vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Hiçbiri

TÜBİTAK 2006 10

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.

Mustafa Özdemir

2.9 Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatı Soruları (Polinomlar)

1. $(x-1)(x-2)(x-3)...(x-99)(x-100)$ ifadesinde parantezler açılarak

$$x^{100}+a_1x^{99}+a_2x^{98}+\cdots+a_{99}x+a_{100}$$

polinomu elde ediliyor. a_1 katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5005 B) – 4004 C) – 4545 D) – 5500 E) – 5050

Antalya M.O.- 1996

2. $A=1-x+2x^2-3x^2+...-19x^{19}+20x^{20}$ ve $B=1+x+2x^2+3x^3+\cdots+19x^{19}+20x^{20}$ veriliyor. $A\cdot B$ ifadesinden, parantezler açıldıktan sonra elde edilen polinomda x^{19}un önündeki katsayı ne olur?

A) 19 B) 1 C) 0 D) $-1+2-3+\cdots+18-19$ E) $-19!$

Antalya M.O.- 1997

3. $P(x)=\left(1+x^1+x^2+\cdots+x^{99}+x^{100}\right)^3$ polinomunda parantezler açıldıktan sonra, x^{111}in katsayısı ne olacaktır?

A) 6432 B) 6328 C) 6130 D) 5640 E) 5600

Antalya M.O.- 1998

4. $(x^1+x^2+\cdots+x^{19}+x^{20})^3$ ifadesinin açılımında benzer terimler toplandıktan sonra ortaya çıkan ifade kaç terimlidir? (Örnek : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ifadesi dört terimlidir.)

A)1550 B)1540 C)1570 D) 400 E) 8000

Antalya M.O.- 2000

5. $p(x)$ ve $q(x)$, başkatsayıları 2003 olan 2. dereceden farklı iki polinomdur.

$$p(3)+p(5)+p(10)=q(3)+q(5)+q(10)$$

ise, $p(x)=q(x)$ eşitliğini sağlayan x sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10

Antalya M.O.- 2003

6. $x^{999}-x^{666}+x^{111}$ polinomunun x^2-x+1 polinomuna bölünmesiyle elde edilen bölümün, tek dereceli terimlerinin katsayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 2 C) 4 D) -2 E) -4

Antalya M.O.- 2008

Denklemler ve Denklem Sistemleri

3.1 İkinci Dereceden Denklemler

Örnek 113 $3x^2+\sqrt{6}x-2=0$ *denkleminin köklerini bulalım.*

Örnek 114 $x^2+(m+2)\,x+2m+1=0$ *denkleminin sadece bir kökünün olması için* m *kaç olmalıdır.*

Örnek 115 $x^4+1=2x\left(x^2+1\right)$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 116 a, b *ve* c *reel sayılar ve* $a+b+c\neq 0$ *olmak üzere,*

$$(a+b+c)\,x^2+2\,(ab+bc+ca)\,x+3abc=0$$

denkleminin köklerinin reel olduğunu gösteriniz.

Örnek 117 *Sıfırdan farklı üç reel sayı veriliyor. Bu sayılar, ikinci dereceden bir denklemin katsayıları olarak herhangi sırada yazıldıklarında elde edilen ikinci dereceden denklemlerin her birinin daima bir reel kökü olduğu görülüyor. Buna göre, bu ikinci dereceden denklemlerin her birinin daima pozitif bir köke sahip olduklarını gösteriniz.*

Örnek 118 $x^3+(a-1)\,x^2-ax+1=0$ *ve* $x^2+ax+1=0$ *denklemlerinin birer kökü ortak olduğuna göre, a reel sayısının değerini bulunuz.* (*USC Math.Contest*)

Örnek 119 $a\,(a+b+c)$ *ifadesi negatif ise,* $ax^2+bx+c=0$ *denkleminin farklı iki reel kökü olduğunu gösteriniz.*

Örnek 120 $x^3+(a-2)\,x^2-ax+3$ *ve* $x^2+ax+(a-1)$ *polinomlarının birer kökü ortak olduğuna göre, a reel sayısının alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.*

3.1.1 İkinci Dereceden Bir fonksiyonun Grafiği

Örnek 121 $y=x^2-4x+3$ *fonksiyonunun grafiğini çiziniz.*

Örnek 121 $y=\left|x^2-4x+3\right|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

3.2 İkinci Dereceden Bir Denklemin Sanal Kökleri

Örnek 122 $x^2+2x+4=0$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Örnek 123 $x^2-x+2=0$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Teorem : Kökleri, x_1 ve x_2 olan $ax^2+bx+c=0$ ikinci dereceden denklemin, köklerinin toplamı, $x_1+x_2=-b/a$ ve köklerinin çarpımı da, $x_1 \cdot x_2 = c/a$ ile bulunur.
İspat :

Örnek 124 $x^2-2x+5=0$ *denkleminin kökler toplamını bulunuz.*

Örnek 125 *Kökleri* $1+\sqrt{2}$ *ve* $1-\sqrt{2}$ *olan ikinci derceden denklemi bulunuz.*

Örnek 126 $ax^2+bx+c=0$ *denkleminin köklerinin çarpmaya göre tersini kök kabul eden ikinci dereceden denklemi bulunuz.*

3.3 İkinci Dereceden Denklemlere Dönüştürülebilen Denklemler

Örnek 127 $\sqrt[3]{x-3}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x-3}}=\dfrac{7}{2}$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Örnek 128 $x^4-4x^3-3x^2-4x+1=0$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Örnek 129 $2^{2^x}+4^{2^x}=30$ *olduğuna göre,* $\sqrt{2^{2^{2x}}}=?$

Örnek 130 $\dfrac{x^2+3}{x}+\dfrac{7x}{x^2+3}=8$ *denkleminin reel köklerinin toplamı ile tüm köklerinin toplamının çarpımı kaçtır?*

Örnek 131 $(x-1)(x-4)(x+3)(x+6)=253$ *denklemini sağlayan kaç farklı reel sayı vardır?*

Örnek 132 $\dfrac{1}{x^2-10x-29}+\dfrac{1}{x^2-10x-45}-\dfrac{2}{x^2-10x-69}=0$ *denkleminin pozitif kökünü bulunuz.* (*AIME* 1990)

Örnek 133 $18x^4+8-63x^3-42x+79x^2=0$ *denkleminin kaç tane reel kökü vardır?*

3.4 Köklü Denklemler

Örnek 134 $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+2}=2$ *denkleminin kaç tane reel kökü vardır?*

Örnek 135 $\sqrt[4]{x^2-x}+\sqrt{x^2-x}=6$ *denkleminin kaç tane reel kökü vardır?*

Örnek 136 $\sqrt{2-x+x^2}+\sqrt{23+x-x^2}=7$ *denkleminin reel köklerinin toplamını bulunuz.*

Örnek 137 $\sqrt[3]{9+x}+\sqrt[3]{9-x}=3$ *denkleminin reel köklerinin çarpımını bulunuz.*

Örnek 138 $\sqrt{17+8x-2x^2}+\sqrt{4+12x-3x^2}=x^2-4x+13$ *denkleminin kaç tane reel çözümü vardır?*

Örnek 139 $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+x}}}=x$ *denklemini sağlayan kaç tane x reel sayısı vardır?* (*USC-Math.Contest*)

Örnek 140 $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14$ *denkleminin köklerinin çarpımı kaçtır?*

3.5 Üçüncü Dereceden Denklemler

Örnek 141 $x^3-mx^2+5x+n=0$ *denkleminde, $n<0$ ve $m>0$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?*

A) 3 *tane reel kök vardır* *B*) 1 *reel,* 2 *kompleks kök vardır* *C*) 3 *kök de negatiftir*

D) 3 *kök de pozitiftir* *E*) *Tüm reel kökleri pozitiftir*

3.6 Üçüncü Dereceden Bir Denklemin Çözümü

Örnek 142 $x^3-2x^2-2x+4=0$ *denkleminin kaç tane reel kökü vardır.*

Örnek 143 $x^3+3x^2+3x+3=0$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Örnek 144 $2x^3+5x^2+x-3=0$ *denkleminin reel köklerinin toplamını bulunuz.*

Örnek 145 $x^3-6x^2+12x-12=0$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Örnek 146 $x^3-2x^2-2x-3=0$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

3.7 Yüksek Dereceden Polinom Denklemler

Örnek 147 $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Örnek 148 $P(x)=\left(x^{101}+x^{100}+2\right)^{999}=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ *ise,*

$$a_0-\frac{a_1}{2}-\frac{a_2}{2}+a_3-\frac{a_4}{2}-\frac{a_5}{2}+a_6-\frac{a_7}{2}-\frac{a_8}{2}+\cdots$$

ifadesinin değerini bulunuz.

Teorem : *Reel katsayılı bir polinom denklemin* $b\neq 0$ *olmak üzere,* $a+ib$ *kökü ise* $a-ib$*'de köküdür.*

İspat :

3.8 Kökler ve Katsayılar Arasındaki Bağıntılar (Vieta Formülleri)

Örnek 149 $x^3-x^2-3x+2=0$ *denkleminin kökleri* a,b,c *ise,* $1/a+1/b+1/c$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 150 $x^4-3x^2+4x+m=0$ *denkleminin kökleri* x_1, x_2, x_3 *ve* x_4 *olsun.*

$$x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\quad\text{ve}\quad x_2x_4+x_3x_4+x_1x_4=10$$

olduğuna göre, m *kaçtır?*

Örnek 151 $x^3-3x^2+x-2=0$ *denkleminin kökleri,* a,b,c *ise,* $a^3+b^3+c^3=?$

Örnek 152 a*,* b *ve* c*,* $x^3-x-1=0$ *denkleminin kökleri olduğuna göre,*

$$\frac{1-a}{1+a}+\frac{1-b}{1+b}+\frac{1-c}{1+c}$$

eşitliğini hesaplayınız.

Örnek 153 $x^{10}+x^2-x+1=0$ *denkleminin kökleri,* $x_1,x_2,...,x_{10}$ *olduğuna göre,*

$$x_1^{10}+x_2^{10}+\cdots+x_{10}^{10}$$

toplamını hesaplayınız.

Örnek 154 $x^3+px+q=0$ *denkleminin üç farklı reel kökü varsa,* $p<0$ *olduğunu gösteriniz.* (*BREZİLYA M.O.* 1992)

Örnek 155 *Kökleri,* $2x^2+2(m+n)x+m^2+n^2=0$ *denkleminin köklerinin farkının karesi ve kökleri toplamının karesi olan ikinci dereceden denklemi bulunuz?*

Örnek 156 *Kökleri* $2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$ *denkleminin köklerinden* 1*'er fazla olan denklemi bulunuz.*

Örnek 157 $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$ *denkleminde* a *katsayısının* 2 *katı alındığında, denklemin köklerinin toplamı* 1 *artmaktadır. Buna göre* a *kaçtır?*

Örnek 158 $ax^2 + bx + c = 0$ *denkleminin bir kökü diğer kökünün karesi olduğuna göre,* $b^3 + a^2c + ac^2 = ?$

Örnek 159 c *ve* d *reel sayılar olmak üzere, tam üç tane farklı pozitif tamsayı kökü olacak şekilde kaç tane* $x^3 - 11x^2 + cx + d$ *polinomu vardır?*

Örnek 160 $(x-1) + (x-2)^2 + (x-3)^3 + \cdots + (x-99)^{99} + (x-100)^{100}$ *polinomunun köklerinin toplamını bulunuz.*

Örnek 161 *Katlı kökü olmayan* $x^{2001} + (1/2 - x)^{2001} = 0$ *denkleminin reel ve reel olmayan tüm köklerinin toplamını bulunuz.* (*AIME* 2001)

Örnek 162 $x^4 + x^3 - 1 = 0$ *denkleminin iki kökü* a *ve* b *ise,* ab *çarpımının*

$$x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$$

denkleminin bir kökü olduğunu gösteriniz. (*USAMO* 1977)

Alıştırma : $x^4 + x^3 + 1 = 0$ denkleminin iki kökü a ve b ise, ab çarpımının

$$x^6 - x^4 - x^3 - x^2 + 1 = 0$$

denkleminin bir kökü olduğunu gösteriniz.

Örnek 163 $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$ *denkleminin köklerinden ikisinin çarpımı* -32 *ise,* k *nedir?* (*USAMO* 1984)

Örnek 164 $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ *olmak üzere,*

$$P(-2) = P(-1) = P(0) = P(1) = P(2)$$

ise, d *kaçtır?*

Örnek 165 $2^{333x-2} + 2^{111x+2} = 2^{222x+1} + 1$ *denkleminin, üç reel kökünün toplamı* $(m,n) = 1$ *olmak üzere,* m/n *olduğuna göre,* $m + n = ?$ (*AIME* 2005)

Örnek 166 $a + b + c + d = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} = 0$ *olduğuna göre,* a, b, c *ve* d *sayılarından toplamı* 0 *olan iki sayı bulunduğunu gösteriniz.*

Örnek 167 *$P(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$ ve $Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$ polinomları veriliyor. a, b, c ve d sayıları $Q(x) = 0$ denkleminin kökleri olduğuna göre,*

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d)$$

toplamını bulunuz. (*AIME* 2003)

3.9 Bir Bilinmeyenli Polinom Eşitsizlikler

Örnek 168 $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ *eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir ?*

Örnek 169 $x^4 - x^3 + x^2 + x - 2 > 0$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.*

Örnek 170 $x^6 - 2x^4 - x^2 + 2 < 0$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.*

Örnek 171 $\dfrac{3^x\left(-x^2 - x - 3\right)\left(x^2 - 4\right)}{\left(x^3 - 1\right)\left(x + 3\right)^2} \geq 0$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.*

Örnek 172 $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ *polinomunun her x reel sayısı için pozitif olduğunu gösteriniz.*

3.10 Türevi Kullanarak Köklerin Yorumlanması

Örnek 173 $P(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ *polinomunun kaç reel kökü vardır?*

Örnek 174 $x \in [2, \infty]$ *olmak üzere,* $P(x) = x^3 - \dfrac{11}{2}x^2 + 6x + 1$ *polinomunun alabileceği minimum değer kaçtır?*

Örnek 175 $a \in [-2, 2)$ *olmak üzere,* $(a + 2)^2 (a - 1)^4$*ifadesinin alabileceği maksimum değeri bulunuz.*

Örnek 176 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ *denkleminin üç reel kökü varsa,* $p^2 \geq 3q$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 177 $P(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ *polinomunun reel kökünün bulunmadığını gösteriniz.*

Örnek 178 $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$ *olsun. a reel sayısı $P(x) = 1$ denkleminin ve b reel sayısı $P(x) = 5$ denkleminin bir kökü olduğuna göre, $a + b$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?* (*SSCB* 1991)

3.11 Bir Polinom Denklemin Reel Köklerinin Üst Sınırının Bulunması

Örnek 179 $x^6+x^4-10x^2+10x-256=0$ *denkleminin reel köklerinin* 5*'ten küçük olduğunu gösteriniz.*

Örnek 180 $x^4+2x^3+5x^2-8x-6=0$ *denkleminin köklerinin* 2*'den küçük olduğunu gösteriniz.*

Örnek 181 $3+\sqrt{2}$ *sayısı aşağıdaki denklemlerin hangisinin bir köküdür?*

A) $x^3-3x^2+11x+21=0$ *B*) $x^4-3x^2-4x+2=0$ *C*) $x^4-2x^2+1=0$
D) $x^4-6x^3+5x^2+12x-14=0$ *E*) $x^5+2x^3-8x^2+12=0$

Örnek 182 *Aşağıdakilerden hangisi,* $25x^4-100x^3-11x^2+144x-36=0$ *denkleminin bir köküdür?*

A) $\sqrt{3}+2$ *B*) $\sqrt{5}+3$ *C*) $\sqrt[3]{6}+4$ *D*) $\sqrt{3}+4$ *E*) $2\sqrt{5}+1$

3.12 Tamsayı köklerin bulunması

Özellik : $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ *denkleminde tüm katsayılar tamsayı ise, denklemin herhangi tamsayı kökü sabit terimi, yani* a_0*'ı bölmelidir.*

İspat :

Örnek 183 $x^4-4x^2-x+2=0$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Örnek 184 $x^4+2x^3-4x^2-5x-6=0$ *denkleminin reel köklerinin toplamını bulunuz.*

3.13 Tamsayı Köklerin Bulunması İçin Newton Metodu

Örnek 185 $x^7-4x^5-3x^4-2x^3+9x^2+5x+15=0$ *denkleminin pozitif tamsayı kökünün olmadığını gösteriniz.*

★ *Bir* a *tamsayısının bir denklemin kökü olup olmadığını bu yöntemle kolayca bulabiliriz. Aşağıdaki tabloda bu yöntemin nasıl kullanıldığını inceleyiniz.*

Örnek 186 $x^5-19x^4-3x^3+57x^2-4x+76=0$ *denkleminin kaç tane pozitif kökü vardır?*

3.14 Tamsayı Köklerin Bulunması İçin Başka Bir Yöntem

Örnek 187 $x^4-11x^3+40x^2-53x+15=0$ *denkleminin tamsayı köklerini bulunuz.*

3.15 Reel Köklerin İşaret İncelemesi

Örnek 188 $x^4-x^3-2x^2-3x-1=0$ *denkleminin* -1 *ile* 0 *arasında ve* 2 *ile* 3 *arasında birer kökünün olduğunu gösteriniz.*

Örnek 189 $x^2-198x+1=0$ *denkleminin köklerinin* $1/198$ *ile* $197,99\overline{49}$ *arasında olduğunu gösteriniz. (KANADA* 1972)

3.16 Decartes'in İşaret Değişim Kuralı

Örnek 190 *Decartes'in işaret değişim kuralını kullanarak*

$$P(x)=x^3+4x^2+5=0$$

denkleminin kökleri hakkında bilgi veriniz.

Örnek 191 $P(x)=x^4+3x^2-2x-4=0$ *denkleminin kökleri hakkında bilgi veriniz.*

Örnek 192 $P(x)=x^4-3x^3+2x-4=0$ *denkleminin kökleri hakkında bilgi veriniz.*

Örnek 193 $x^4-6x^3+8x^2-6x+7=0$ *denkleminin*

a) *Negatif kökünün olmadığını gösteriniz.*

b) $(0,2)$ *aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz.*

c) $(3,5)$ *aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz.*

3.17 Rasyonel Köklerin Bulunması

Rasyonel Kök Teoremi : $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ denkleminde tüm katsayılar tamsayı ise, denklemin herhangi rasyonel kökü sabit terimi, yani a_0'ı bölmelidir.

Bu özellik sayesinde, bir polinom denklemin rasyonel köklerinin olup olmadığı kolayca kontrol edilebilir. Buna göre,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

denkleminde rasyonel kökler; A, a_n'in çarpanlarının kümesi ve B, a_0'ın çarpanlarının kümesi olmak üzere,

$$a \in A \text{ ve } b \in B \text{ için, } \mp \frac{a}{b}$$

formunda olmalıdır.

Örnek 194 $2x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = 0$ *denkleminin rasyonel köklerini bulunuz.*

Örnek 195 *p bir asal sayı olmak üzere,*

$$x^4 + (p+1)\,x^3 + \left(p+1-2p^2\right)x^2 + \left(1-p-2p^2\right)x - p = 0$$

denklemini sağlayan kaç tane x rasyonel sayısı vardır?

Örnek 196 $5x^3 - 16x^2 + 8x - 1 = 0$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Örnek 197 $x^4 + 8x^3 - 40x + 125 = 0$ *denkleminin kaç tane rasyonel kökü vardır?* (*USC Math.Contest*)

3.18 Mutlak Değerli Denklem ve Eşitsizlikler

Örnek 198 $\left|\left|\left|\left|\left|x^2+3x-5\right|-4\right|-3\right|-2\right|-1\right| = 3x-15$ *denkleminin kaç kökü vardır?.*

Örnek 199 $\left|x^4 - 4x^2 - 1\right| \geq \left|x^4 - 4x^2 + 9\right|$ *eşitsizliğini sağlayan kaç tane x reel sayısı vardır?*

Örnek 200 $|x-10| + |x-9| + \cdots + |x-1| + |x| + |x+1| + \cdots + |x+10| = c$ *denkleminin tek kökü olduğuna göre, c sayısını bulunuz.*

Örnek 201 $|x + |x| + a| + |x - |x| - a| = 2$ *denkleminin tam üç çözümü olacak şekilde kaç a sayısı vardır?*

Örnek 202 $|x-7| > |x+2| + |x-2|$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.*

3.19 Grafikler Yardımıyla Denklem Çözümü

Örnek 203 $\sqrt{x} = \left|x^4 - 1\right|$ *eşitliğini sağlayan kaç tane x pozitif reel sayısı vardır?* (*USC Math.Contest*)

Örnek 204 $x^4 + |x| = 10$ *denkleminin kaç tane reel çözümü vardır?* (*USC Math.Contest*)

Örnek 205 $3^{x-1} = x^2 - x + 1$ *denkleminin kaç tane reel kökü vardır?*

Örnek 206 *Hangi a reel sayısı için, $|x-1| - |x-2| + |x-4| = a$ denkleminin tam üç kökü vardır?* (*Wisconsin Math Talent Search* 1996)

Örnek 207 $|x - |x - |x-4||| = a$ *denkleminin tam üç tane kökü olacak şekilde tüm a reel sayılarını bulunuz.* (*Wisconsin Math Talent Search* 2008)

3.20 Köklerin Kuvvetleri Toplamının Hesaplanması

Örnek 208 $9x^3 - 13x - 6 = 0$ *denkleminin kökleri a, b, c ise, $a^3 + b^3 + c^3 = ?$*

Örnek 209 $P(x) = 2x^3 + 13x^2 - 3$ *polinomunun üç farklı reel kökü a, b, c olduğuna göre, $a^4 + b^4 + c^4 = ?$*

Teorem : $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ monik polinomunun kökleri, $x_1, x_2, ..., x_n$ ise, $k \in \mathbb{Z}^+$ için, $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ olmak üzere,

$$S_k + a_{n-1}S_{k-1} + a_{n-2}S_{k-2} + \cdots + a_{n-k+1}S_1 + k a_{n-k} = 0$$

eşitliği vardır.
İspat :

Örnek 210 $P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *polinomunun kökleri, x_1, x_2, x_3, x_4 ve x_5 ise, $k \in \mathbb{Z}^+$ için, $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ olmak üzere, $S_k + a_4S_{k-1} + a_3S_{k-2} + a_2S_{k-3} + ka_1 = 0$ eşitliği vardır.*

Örnek 211 $x^3 - 3x^2 - 2x - 1 = 0$ *denkleminin kökleri a, b ve c ise,*
a) $\dfrac{1}{a^3b^3} + \dfrac{1}{a^3c^3} + \dfrac{1}{b^3c^3}$ *değerini hesaplayınız.*
b) $a^5 + b^5 + c^5$ *değerini de bulunuz.*

Örnek 212 $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 6x - 6 = 0$ *denkleminin kökleri a, b, c, d ve e ise,*
a) $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5$ *ifadesinin değeri kaçtır?*
b) $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

3.21 Denklem Sistemleri

Örnek 213 *a, b ve c birbirinden farklı reel sayılar ve $a+b+c \neq 0$ olmak üzere,*

$$\begin{cases} ax+by+cz=a+b+c \\ bx+cy+az=a+b+c \\ cx+ay+bz=a+b+c \end{cases}$$

denklem sistemini çözünüz.

Örnek 214 $\begin{cases} (1+a)\,x+y+z=1 \\ x+(1+b)\,y+z=1 \\ x+y+(1+c)\,z=1 \end{cases}$ *denklem sisteminin sonsuz çözümün olması ve tek çözümünün olması için a, b ve c sayıları arasında nasıl bir bağıntı olmalıdır.*

Örnek 215 $\begin{cases} x^2+x+xy=14 \\ y^2+y+xy=28 \end{cases}$ *olduğuna göre, x'in olabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

Örnek 216 *a, b, c farklı reel sayılar olmak üzere,*

$$\begin{cases} a^3+ax+y=0 \\ b^3+bx+y=0 \\ c^3+cx+y=0 \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, $a+b+c=0$ olduğunu gösteriniz. (*Junior Balkan M.O.* 1999)

Örnek 217 $\begin{cases} 1988x^2+kx+8891=0 \\ 8891x^2+kx+1988=0 \end{cases}$ *denklemlerinin bir ortak kökü olması için k kaç farklı sayı olabilir?* (*Kanada M.O.* 1988)

Örnek 218 *a, b ve c katsayıları pozitif sayılar olmak üzere, $abc \neq 0$ için,*

$$\begin{cases} P\,(x)=ax^2+bx+c \\ Q\,(x)=cx^2+ax+b \\ R\,(x)=bx^2+cx+a \end{cases}$$

polinomlarının herbirinin reel kökü olması mümkün müdür?

Örnek 219 $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$ *denklem sistemini çözünüz.* (*VİETNAM M.O.* 1996)

Örnek 220 $\begin{cases} -1 \leq x + y \leq 1 \\ -1 \leq xy + x + y \leq 1 \end{cases}$ *eşitsizliğini sağlayan* (x, y) *reel sayı ikililerinden,* x *sayısının en büyük değeri kaçtır?*

Örnek 221 $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ xyz = -6 \end{cases}$ *denkleminin kaç tane çözümü vardır?*

Örnek 222 $\begin{cases} x + y + x/y = 19 \\ x(x + y) = 60y \end{cases}$ *denklem sistemini sağlayan* y *değerlerinin çarpımını bulunuz.*

Örnek 223 $\begin{cases} x^3 + y = 3x + 4 \\ 2y^3 + z = 6y + 6 \\ 3z^3 + x = 9z + 8 \end{cases}$ *denklem sisteminin kaç tane reel çözümü vardır?*

Örnek 224 $\dfrac{4x^2}{1 + 4x^2} = y,\ \dfrac{4y^2}{1 + 4y^2} = z$ *ve* $\dfrac{4z^2}{1 + 4z^2} = x$ *denklemlerini sağlayan kaç tane* (x, y, z) *reel sayı üçlüsü vardır?*

Örnek 225 $\begin{cases} x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 4 \\ xu + yv = -xv - yu \\ xyu + yuv + uvx + vxy = -2 \\ xyuv = -1 \end{cases}$ *denklem sistemini sağlayan kaç tane* (x, y, u, v) *dörtlüsü vardır?* (*Avusturya Polish M.O* 1986)

Örnek 226 $x + y + z = a,\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ *ve* $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{c}$ *olduğuna göre,* $x^3 + y^3 + z^3 = ?$

Örnek 227 $\begin{cases} x^3 = 2 - y \\ y^3 = 2 - x \end{cases}$ *denklem sisteminin kaç tane reel çözümü vardır?* (*Avusturya Polonya M.O.* 1998)

Örnek 228 $\begin{cases} 2\left(x^2 + y^2\right) - 3xy + 2(x + y) = 39 \\ 3\left(x^2 + y^2\right) - 4xy + (x + y) = 50 \end{cases}$ *denklem sisteminin köklerinin bulunuz.* (*Municipal 1998*)

Örnek 229 *Herhangi ikisinin çarpımının diğer üçüncüyle toplamı* 2 *olan kaç tane reel sayı üçlüsü vardır?* (*Kanada M.O.* 1970)

Örnek 230 *$abc \neq 0$ olmak üzere*

$$\begin{cases} x^2+xy+xz+yz=a \\ y^2+xy+xz+yz=b \\ z^2+xy+xz+yz=c \end{cases}$$

denklem sistemini çözünüz.

Örnek 231 $xy+yz+zx=23,\ x^2+y^2=z^2$ *ve* $(z-x)(z-y)=2$ *denklemlerini sağlayan tüm* (x,y,z) *reel sayı üçlülerini bulunuz.*

Örnek 232 $\begin{cases} x^2+y^2-z(x+y)=2 \\ y^2+z^2-x(y+z)=4 \\ z^2+x^2-y(x+z)=8 \end{cases}$ *denklem sisteminin tüm reel çözümlerini bulunuz.*

Örnek 233 $\begin{cases} (1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)=1+y^7 \\ (1+y)\left(1+y^2\right)\left(1+y^4\right)=1+x^7 \end{cases}$ *denklem sistemini sağlayan kaç tane* (x,y) *reel sayı ikilisi vardır.* (*SSCB M.O.* 1992)

Örnek 234 $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=4 \end{cases}$ *denklem sistemini çözünüz.*

Örnek 235 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y^2+yz+z^2=3 \\ z^2+xz+x^2=3 \end{cases}$ *denklem sistemini sağlayan kaç tane* (x,y,z) *reel sayı üçlüsü vardır?*

Örnek 236 $x=\dfrac{z+1}{y+1},\ y=\dfrac{x+1}{z+1}$ *ve* $z=\dfrac{y+1}{x+1}$ *denklem sistemini sağlayan tüm* x,y,z *pozitif reel sayılarını bulunuz.*

Örnek 237 $\begin{cases} a+b+c=24 \\ a^2+b^2+c^2=210 \\ abc=440 \end{cases}$ *denklem sistemini sağlayan kaç tane* (a,b,c) *tamsayı üçlüsü vardır?* (*Iberoamerikan M.O.*- 1985)

Örnek 238 $\begin{cases} y^2x=15x^2+17xy+15y^2 \\ x^2y=20x^2+3y^2 \end{cases}$ *denklem sistemini çözünüz.* (*Minsk M.O.* 1970)

Örnek 239 x_1, x_2, x_3, x_4 *ve* x_5 *reel sayıları için,*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 48 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 96 \end{aligned}$$

olduğuna göre, $3x_4 + 2x_5 =?$ (*AIME* 1986)

Örnek 240 $x_1, x_2, ..., x_{100}$ *reel sayıları için,*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad \vdots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

ise $x_1 = x_2 = \ldots = x_{99} = x_{100}$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 241 $x_1, x_2, ..., x_n$ *reel sayıları için,*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \ldots + nx_n = a_1 \\ nx_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + (n-1)\, x_n = a_2 \\ (n-1)\, x_1 + nx_2 + x_3 + 2x_4 + \ldots + (n-2)\, x_n = a_3 \\ \quad \vdots \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + \ldots + 1x_n = a_n \end{cases}$$

olduğuna göre, bu denklem sistemini çözünüz.

Örnek 242 $\begin{cases} \dfrac{x_2 x_3 \cdots x_n}{x_1} = a_1 \\ \dfrac{x_1 x_3 \cdots x_n}{x_1} = a_2 \\ \quad \vdots \\ \dfrac{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}{x_n} = a_n \end{cases}$ *denklem sistemini çözünüz.*

Örnek 243 *$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\begin{cases} x_1^2 + ax_1 + \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 = x_2 \\ x_2^2 + ax_2 + \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}^2 + ax_{n-1} + \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 = x_n \\ x_n^2 + ax_n + \left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2 = x_1 \end{cases}$$

denklem sistemini çözünüz.

Örnek 244 $\begin{cases} 2x_2 = x_1 + 2/x_1 \\ 2x_3 = x_2 + 2/x_2 \\ \vdots \\ 2x_n = x_{n-1} + 2/x_{n-1} \\ 2x_1 = x_n + 2/x_n \end{cases}$ *denklem sisteminin tüm reel çözümlerini bulunuz.*

3.22 Karışık Örnekler

Örnek 245 *a, b, c ve d reel sayılar olmak üzere,*

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

polinomunun grafiği ile, $y = 2x - 1$ fonksiyonunun grafiği $x = 1, 2$ ve 3 noktalarında kesiştiğine göre, $P(0) + P(4) = ?$ (USC Math. Contest)

Örnek 246 *a ve b reel sayıları $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ denkleminin iki farklı kökü olduğuna göre, ab çarpımının*

***a**) $x^3 - 3x - 1 = 0$ denkleminin bir kökü olduğunu gösteriniz.*

***b**) $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminin kökü olmadığını gösteriniz.*

Örnek 247 $x = \sqrt{19} + \dfrac{91}{\sqrt{19} + \frac{91}{\sqrt{19} + \frac{91}{\sqrt{19} + \frac{91}{\sqrt{19} + \frac{91}{x}}}}}$ *denkleminin köklerinin mutlak değerlerinin toplamının karesi kaçtır? (AIME)*

Örnek 248 *$b < 0$ ve $ab = 9c$ olmak üzere, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomunun üç farklı reel kökünün olduğunu gösteriniz.*

Örnek 249 $x^3+\sqrt{3}\,(a-1)\,x^2-6ax+b=0$ *denkleminin üç reel kökü var ise,* $|b|\leq|a+1|^3$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 250 $xy=\dfrac{16}{25}$ *ve* $x^5+y^5=2x^2y^2$ *denklemlerini sağlayan kaç tane rasyonel* (x,y) *çifti vardır?*

Örnek 251 $\sqrt[3]{x^2+2}+\sqrt[3]{4x^2+3x-2}=\sqrt[3]{3x^2+x+5}+\sqrt[3]{2x^2+2x-5}$ *denkleminin köklerini bulunuz.* (*Kanada M. Soc. MOCP*)

Örnek 252 $\sqrt{1-x+\sqrt{22x-15-8x^2}}=?$

Örnek 253 $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$ *denkleminin reel çözümlerinin toplamı kaçtır?*

Örnek 254 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ *olmak üzere,* $x^2+ax+b=0$ *denkleminin iki reel kökü varken,* $\left(x^2-2cx+d\right)^2+a\left(x^2-2cx+d\right)+b=0$ *denkleminin reel kökü yoksa,* $d^2+ad+b>c^4$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 255 $a,b,c\in\mathbb{Z}$ *olmak üzere,* $ax^2+bx+c=0$ *denkleminin rasyonel kökü varsa,* a,b *ve* c *tamsayılarından en az birinin çift olması gerektiğini gösteriniz.*

Örnek 256 $4x^2-40\,[\![x]\!]+51=0$ *denkleminin kaç tane gerçel çözümü vardır?* (*KANADA M.O.* 1999)

Örnek 257 $a,b\in\mathbb{R}$ *için,* $\dfrac{a^4+b^4}{2}=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4$ *ise* $a=b$*'dir. Gösteriniz.*

Örnek 258 $\sqrt{n+\sqrt{2010}}>\sqrt{n-1}$ *olacak şekilde tüm* n *pozitif tamsayılarını bulunuz.*

Örnek 259 n *bir pozitif tamsayı ve* $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}$ *olacak şekilde,*

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2+x_n^2=\frac{1}{n+1}$$

eşitliğini sağlayan tüm $(x_1,x_2,...,x_n)$ *çözümlerini bulunuz.* (*British.M.O.* 1975)

Örnek 260 $ax^2+bx+c=0$ *denkleminin* 1*'den küçük iki farklı pozitif köke sahip olacak şekilde* b *ve* c *tamsayılarının olması için,* a *pozitif tamsayısının alabileceği en küçük değer nedir?* (*SSCB. M.O.* $-$ 1969)

Örnek 261 a *ve* b *reel sayılar olmak üzere,* $x^{10}-abx+a^2=0$ *köklerinden biri* 3*'den büyükse,* $|b|>162$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 262 $2^{2x} \leq 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} + 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}}$ *eşitsizliğini çözünüz.* (*Asya Pasifik M.O.* 1998)

Örnek 263 $P(x) = a_8 x^8 + a_7 x^7 + \cdots + a_0$ *polinomunda,* $a_8 = 1,\ a_7 = -4$ *ve* $a_6 = 7$ *ve polinomu tüm kökleri pozitif reel sayı olduğuna göre,* a_0 *sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?* (*Asya Pasifik M.O.* 2003)

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

3.23 Çözümlü Test

1. $x^3 - x + 2 = 0$ denkleminin kökleri a, b, c ise, $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} = ?$

A) 1 B) -1 C) $1/2$ D) $-1/2$ E) Hiçbiri

2. $x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = 0$ denkleminin tüm kökleri

$$2x^4 - 5x^3 + 22x^2 + 11x + 6 = 0$$

denklemini de sağladığına göre, aşağıdakilerden hangisi dördüncü dereceden denklemi sağlayan ortak olmayan köktür?

A) $\frac{-3}{2}$ B) $\frac{-2}{3}$ C) $\frac{-2}{5}$ D) $\frac{-5}{3}$ E) 1

3. $3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2 = 0$ denkleminin kökleri, x_1, x_2, x_3 ve x_4 olduğuna göre, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = ?$

A) $1/2$ B) $-1/2$ C) -1 D) 1 E) 0

4. $x^3 - 9x^2 + ax - b = 0$ denkleminin üç kökü de pozitif tamsayı olacak şekilde kaç tane (a, b) pozitif tamsayı ikilisi vardır?

A) 1 B) 5 C) 8 D) 7 E) 9

5. $x^4 - 30x^2 + 72x - 27 = 0$ denkleminin farklı reel köklerinin toplamını bulunuz.

A) -1 B) $-1/2$ C) -2 D) -3 E) 0

6. $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$ denkleminde a ve b tamsayılardır. $n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere n ve $-n$ sayılarının her ikisi de bu denklemin kökleri ise, n sayısının olabileceği değerlerin sayısı nedir?

A) 3 B) 1 C) 4 D) 5 E) 8

7. $4x^6 - 6x^2 + 2\sqrt{2} = 0$ denkleminin birbirinden farklı reel köklerinin çarpımını bulunuz.

A) $-\sqrt{2}/2$ B) $\sqrt{2}/2$ C) $-\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) Hiçbiri

8. m sayısı $x^4 + x^2 - 1 = 0$ denkleminin bir kökü ise, $m^6 + 2m^4$ değeri kaçtır?

A) -1 B) $-1/2$ C) -2 D) 1 E) 0

9. $x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18 = 0$ denkleminin reel köklerinin çarpımı kaçtır?

A) -1 B) -18 C) 18 D) -2 E) 4

10. $x^3 - 6x^2 + 11x + a - 6 = 0$ denkleminin tam 3 tane farklı tamsayı kökü olacak şekilde kaç a reel sayısı vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 1

11. $\sqrt{3x^2 - 18x + 52} + \sqrt{2x^2 - 12x + 162} = \sqrt{-x^2 + 6x + 280}$ denkleminin reel çözümlerinin sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 0

12. $\left(x^2 - 3x + 1\right)^2 - 3\left(x^2 - 3x + 1\right) + 1 = x$ denkleminin pozitif reel köklerinin toplamını bulunuz.

A) 2 B) 4 C) $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 3$ D) $2\sqrt{2}$ E) $5 + \sqrt{2}$

13. $\sqrt{x + 10} + \sqrt[4]{x + 10} = 12$ denkleminin kaç tane kökü vardır?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 0

14. $\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = x$ eşitliğini sağlayan kaç tane x gerçel sayısı vardır? (KANADA M.O. 1998)

A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 0

15. $\sqrt[3]{x + 3} - \sqrt[3]{x} = 1$ denkleminin kaç tane kökü vardır?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 0

16. $P(x) = x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ve $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$ ise, $a =?$

A) -11 B) -12 C) -15 D) -3 E) 0

17. $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0$ denkleminin köklerinden kaç tanesi negatiftir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 0

18. $2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0$ denkleminin kaç tane rasyonel kökü vardır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 0

19. $x^3 - 63x - 11 = 0$ denkleminin kökleri a, b, c ise, $a^3 + b^3 + c^3 =?$

A) 13 B) 21 C) 43 D) 33 E) 10

20. $x^2 + (a-3)x + a = 0$ denkleminin iki farklı pozitif kökü olacak şekildeki tüm a reel sayı değerleri için hangisi doğrudur?

A) $0 < a < 2$ B) $1 < a < 2$ C) $0 < a < 1$

D) $-1 < a < 1$ E) $-1 < a < 0$

21. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri m ve n, $px^2 + qx + r = 0$ denkleminin kökleri ise $m+2$ ve $n+2$ olsun. $p = a$ ise, $q + r$ toplamını a, b ve c cinsinden ifade ediniz.

A) $c - a$ B) $c - b$ C) $c - a - b$ D) $c + a - b$ E) $c - a + b$

22. $\left(4x^2 + 6x + 4\right)\left(4y^2 - 12y + 25\right) = 28$ denklemini sağlayan sadece bir tane (x, y) reel sayı ikilisi varsa, $xy =?$

A) $\frac{-9}{6}$ B) $\frac{-9}{4}$ C) $\frac{-9}{8}$ D) $\frac{-10}{9}$ E) $\frac{-10}{6}$

23. $a_1, a_2, ..., a_n$ birbirinden farklı olması gerekmeyen n pozitif tamsayı olmak üzere,

$$(x + a_1)(x + a_2)\cdots(x + a_n) = x^n + 108x^{n-1} + \cdots + 909$$

eşitliği sağlandığına göre, n kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

24. $\dfrac{\left(x^4+1\right)\left(x^8+1\right)\left(x^{12}+1\right)}{x^2+1}=1-x^2$ denkleminin birbirinden farklı reel köklerinin toplamını bulunuz.

A) 12 B) 11 C) 6 D) 0 E) 4

25. x, y, z birer rakam olmak üzere,

$$(100x+10y+z)^2=(x+y+z)^5$$

eşitliği sağlanıyor ise, $x^2+y^2+z^2=?$ (USC Math.Contest)

A) 32 B) 19 C) 36 D) 29 E) 24

26. $x^4-4x^3+6x^2-4x=2005$ denkleminin reel olmayan köklerinin çarpımı P ise $\llbracket P \rrbracket$ kaçtır? (AIME 2005)

A) 43 B) 39 C) 45 D) 44 E) 46

27. p ve q farklı pozitif tamsayılar olmak üzere, kaç tane (p, q) çifti için,

$$x^2+px+q=0 \text{ ve } x^2+qx+px=0$$

denklemlerinin her ikisinin de reel kökü yoktur?

A) 2 B) 1 C) 6 D) 0 E) 4

28. Kaç tane a reel sayısı için, $x^2+ax+6a=0$ denkleminin kökleri tamsayıdır? (AIME 1991)

A) 12 B) 10 C) 6 D) 0 E) 4

29. $x^2+18x+30=2\sqrt{(x^2+18x+45)}$ denkleminin reel köklerinin çarpımı kaçtır? (AIME 1983)

A) 30 B) 10 C) 60 D) 20 E) 24

30. x, y, z, w reel sayılar olmak üzere, $n=2, 4, 6$ ve 8 için

$$\frac{x^2}{(n^2-1^2)}+\frac{y^2}{(n^2-3^2)}+\frac{z^2}{(n^2-5^2)}+\frac{w^2}{(n^2-7^2)}=1$$

ifadesi sağlanıyorsa, $x^2+y^2+z^2+w^2=?$ (AIME 1983)

A) 22 B) 18 C) 36 D) 12 E) 48

31. $x^{1/4} = \dfrac{12}{7 - x^{1/4}}$ denkleminin köklerinin toplamı kaçtır? (AIME 1986)

A) 272 B) 97 C) 337 D) 162 E) 423

32. m, n ve k tamsayıları için, $k > 0$ ve $(m, n) = 1$ olmak üzere, $(m + \sqrt{n})/k$ sayısı,

$$2000x^6 + 100x^5 + 10x^3 + x - 2 = 0$$

denkleminin bir kökü ise, $m + n + k =$? (AIME 2000)

A) 200 B) 100 C) 200 D) 150 E) 250

33. $x^3 + 3x^2 + 4x - 11 = 0$ denkleminin kökleri a, b ve c, $x^3 + kx^2 + mx + n = 0$ denkleminin kökleri ise, $a + b$, $b + c$ ve $c + a$ olduğuna göre $n =$? (AIME 1996)

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

34. $(8x - 56)\sqrt{3 - x} = 30x - x^2 - 97$ denkleminin kaç reel sayı çözümü vardır? (Kanada M. Soc. MOCP)

A) 2 B) 1 C) 6 D) 0 E) 4

35. $x^2 - ax + a = 0$ denkleminin iki kökü de tamsayı olacak şekilde, kaç a reel sayısı vardır?

A) 2 B) 1 C) 6 D) 0 E) 4

36. $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$ denklemini sağlayan kaç (x, y) negatif olmayan tamsayı ikilisi vardır?

A) 2 B) 1 C) 6 D) 0 E) 4

37. $x^4 + 16x - 12 = 0$ denkleminin reel köklerinin toplamını bulunuz.

A) -2 B) -1 C) -6 D) 0 E) 4

38. $4x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 40x + 25 = 0$ denkleminin en küçük reel kökü a ise, $4a + \sqrt{2} + 4 =$?

A) $-\sqrt{58 + 8\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{58 + 8\sqrt{2}}$ C) $-\sqrt{58 - 8\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{58 - 8\sqrt{2}}$ E) 0

39. $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $x^2 - ax + b = 0$ denkleminin kökleri olan r ve s sayıları $x^5 - px - 1 = 0$ denkleminin de kökleriyse, p sayısı kaç farklı değer alabilir?

A) 2 B) 1 C) 6 D) 0 E) 4

40. $x^3 - 17x^2 + mx - n^2 = 0$ denkleminin tüm köklerinin tamsayı olması için (m, n) tamsayı ikilisi kaç farklı değer alabilir? (Avusturya Polonya 1998)

A) 12 B) 11 C) 6 D) 10 E) 4

41. $x^2 + ax + 1 = 0$ ve $x^2 + x + a = 0$ denklemlerinin reel sayılarda çözümü olacak şekilde kaç tane a sayısı vardır? (KANADA M.O. 1971)

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) 4

42. $x^2 (x+1)^2 + x^2 = 3(x+1)^2$ denkleminin kaç tane reel çözümü vardır? (KANADA M.O. 1992)

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) 4

43. $x^2 + (a-2)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0$ denkleminin köklerinden birinin mutlak değerinin diğerinin mutlak değerinin 2 katı olması için a yerine yazılabilecek sayıların toplamını bulunuz? (ESTONYA M.O. 1999)

A) $251/60$ B) $29/48$ C) $259/60$ D) $251/48$ E) Hiçbiri

44. $x = 1 - 110\left(1 - 110x^2\right)^2$ denkleminin pozitif köklerinin toplamı kaçtır?

A) $\dfrac{20 + \sqrt{437}}{220}$ B) $\dfrac{1 + \sqrt{437}}{220}$ C) $\dfrac{1 - \sqrt{437}}{220}$ D) $\dfrac{1}{11}$ E) 2

45. $\dfrac{5x}{5x^2 + px + 45} + \dfrac{x + 10}{x^2 + 5x} = \dfrac{2}{x}$ denkleminin çözümü olmamasını sağlayan p sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir? (Municipal 1998)

A) 29 B) 135 C) 59 D) 40 E) 44

46. $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$ denkleminin aşağıdaki a değerlerinden hangisi için, rasyonel çözümü vardır?

A) 6 B) 7 C) 12 D) 13 E) 11

47. $x^2 + ax + b + 1 = 0$ denkleminin kökleri pozitif tamsayılar olduğuna göre, $a^2 + b^2$ sayısı asal olacak şekilde kaç tane (a, b) çifti vardır? (SSCB M.O. 1986)

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) 4

48. $x, y \in \mathbb{Q}$ için, $xy = \dfrac{128}{33^2}$ ve $x^5 + y^5 = 2x^2y^2$ olduğuna göre $x + y = ?$

A) $\dfrac{2}{11}$ B) $\dfrac{1}{11}$ C) $\dfrac{9}{11}$ D) $\dfrac{8}{11}$ E) 1

49. $x = \dfrac{2z^2}{1+z^2}$, $y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$ ve $z = \dfrac{2y^2}{1+y^2}$ denklemlerini sağlayan kaç (x, y, z) reel sayı üçlüsü vardır?

A) 2 B) 1 C) 4 D) 0 E) Sonsuz sayıda

50. $x + \dfrac{1}{x} = y$, $y + \dfrac{1}{y} = z$ ve $z + \dfrac{1}{z} = x$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y, z) reel sayı üçlüsü vardır?

A) 2 B) 1 C) 4 D) 0 E) Sonsuz sayıda

51. x ve y sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$\frac{6}{x} + x = 2y + \frac{3}{y}$$

eşitliği sağlanmaktadır. $\dfrac{x}{y} \neq 2$ olduğuna göre, $xy = ?$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) 4

52. $x + \dfrac{4}{xy} = 3$, $y + \dfrac{4}{yz} = 3$ ve $z + \dfrac{4}{xz} = 3$ denklemlerini sağlayan kaç tane (x, y, z) pozitif reel sayı üçlüsü vardır?

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) 4

53. $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} a^3 = 3\left(b^2 + c^2\right) - 25 \\ b^3 = 3\left(a^2 + c^2\right) - 25 \\ c^3 = 3\left(b^2 + a^2\right) - 25 \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, $abc = ?$ (Minsk M.O.)

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) 4

54. $x^2 + y^2 + z^2 - xyz + 2 = 0$ denkleminin tamsayı çözümlerinin sayısını bulunuz.

A) 2 B) 1 C) 0 D) 4 E) Hiçbiri

55. $\left(x^2 + 6x + 7\right)^2 = y$ denkleminin tam üç reel kökü var ise, y kaç olabilir?

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) 4

56. $px^2 - qx + p = 0$ denkleminin bir rasyonel kökü olacak şekilde kaç tane (p, q) asal sayısı ikilisi vardır?

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) 4

57. Hem n hem de $1/n$ sayısı $x^{10} + ax + 1 = 0$ denkleminin kökü olacak şekilde kaç a reel sayısı vardır?

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) 4

58. $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3, x_4 pozitif gerçel sayıları olmak üzere,

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{5} + \frac{x_4}{8} = 1$$

eşitliği var ise, $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4$ toplamı kaçtır? (Iberoamerikan 1985)

A) 12 B) 11 C) 13 D) 10 E) 14

59. $\begin{cases} \sqrt{x/y} - \sqrt{y/x} = 3/2 \\ x + yx + y = 9 \end{cases}$ denklem sistemini sağlayan kaç (x, y) reel sayı ikilisi vardır?

A) 2 B) 1 C) 3 D) 0 E) 4

60. $\begin{cases} x^2+xy+xz-x=2 \\ y^2+xy+yz-y=4 \\ z^2+xz+yz-z=6 \end{cases}$ denklem sistemini sağlayan kaç tane (x,y,z) çözüm üçlüsü vardır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 2 E) 4

61. $\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y}=2 \\ \dfrac{xyz}{y+z}=\dfrac{6}{5} \\ \dfrac{xyz}{z+x}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ denklem sistemini sağlayan kaç (x,y,z) reel sayı üçlüsü vardır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 0 E) 5

62. $\begin{cases} x+y-z=7 \\ x^2+y^2-z^2=37 \\ x^3+y^3-z^3=1 \end{cases}$ denklem sistemini çözünüz.

A) 4 B) 1 C) 3 D) 0 E) 2

63. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ x^2+xz+z^2=4 \\ y^2+yz+z^2=7 \end{cases}$ denklem sistemini sağlayan kaç (x,y,z) reel sayı üçlüsü vardır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 0 E) 3

64. $(3x+y)^{x-y}=9$ ve $324=\left(18x^2+12xy+2y^2\right)^{x-y}$ denklemlerini sağlayan kaç (x,y) ikilisi vardır? (BALTIK WAY M.O. -2000

A) 1 B) 2 C) 4 D) 0 E) 3

65. $x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+4=2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1})$ denklemini sağlayan kaç pozitif (x,y) reel sayı ikilisi vardır? (BALTIK WAY M.O. - 2000

A) 1 B) 2 C) 4 D) 0 E) 3

66. $x^5=y+y^5,\ y^5=z+z^5,\ z^5=t+t^5$ ve $t^5=x+x^5$ denklem sistemini sağlayan ka (x,y,z,t) reel sayı dörtlüsü vardır? (BALTIK WAY M.O. - 1993)

A) 1 B) 2 C) 4 D) 0 E) Sonsuz Sayıda

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

3.24 Tübitak Matematik Olimpiyat Soruları

1. $x^2 + ax + 2a = 0$ denkleminin bütün kökleri tamsayı olacak şekilde seçilebilecek a reel sayılarının sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 3 C) 4 D) 6 E) Sonsuz

UMO - 1994

2. a bir tamsayı olmak üzere, $x^3 + x + a = 0$ denkleminin kökleri ile ilgili olarak aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Yalnızca sonlu sayıda a için bütün kökleri tamsayı olur

B) Yalnızca sonlu sayıda a için sadece bir kökü tamsayı olur

C) Yalnızca bir kökü tamsayı olacak şekilde sonsuz sayıda a vardır

D) Sonsuz tane a için bütün kökleri tamsayı olur.

E) Hiçbir a için tamsayı kökü olamaz.

UMO - 1995

3. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denkleminin iki kökü $u \neq 0$ olmak üzere, $x = u$ ve $x = -u$ ise katsayılar arasındaki bağıntılardan hangisi her zaman doğrudur?

A) $c^2 - abc + a^2d = 0$ B) $a + b + c + d = 0$ C) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

D) $ab > cd$ E) $ad = bc$

UMO - 1996

4. Aşağıdakilerden hangisi tamsayı katsayılı ikinci dereceden bir polinomun diskriminantı olamaz?

A) 23 B) 24 C) 25 D) 28 E) 33

UMO - 2000

5. $x^2 - 10x - 14 = 2\sqrt{x^2 - 10x + 1}$ eşitliğini sağlayan tüm x reel sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 20 B) 10 C) -9 D) -20 E) Hiçbiri

UMO - 1996

6. $x^3 - 7x + 1 = 0$ denkleminin varsa pozitif köklerinin çarpma işlemine göre terslerinin toplamını S ile gösterirsek, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $13/2 < S < 7$ B) $7 < S < 15/2$ C) $S = 7$

D) Denklemin pozitif kökü yoktur E) Hiçbiri

UMO - 1996

7. $\left(2+\left(2+(2+x)^2\right)^2\right)^2 = 2000$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı kaçtır?

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

UMO - 2000

8. $x^4+3x^3+5x^2+21x-14=0$ denkleminin gerçel köklerinin çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) -2 C) -14 D) 21 E) Hiçbiri

UMO - 2001

9. $a_{2001}=2002$ ve $0 \le k \le 2000$ için, $a_k=-k-1$ ise,

$$x^{2002}+a_{2001}x^{2001}+a_{2000}x^{2000}+\cdots+a_1x+a_0$$

polinomunun kaç pozitif kökü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 1001 E) 2002

UMO 2002

10. t gerçel sayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için $x^4-tx+\dfrac{1}{t}=0$ denkleminin hiçbir kökü $[1,2]$ aralığında yer almaz?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) Hiçbiri

UMO 2002

11. x^2-ax-b polinomunun köklerinin 5'ten büyük olmamasını sağlayan kaç (a,b) pozitif tamsayı ikilisi vardır?

A) 40 B) 50 C) 65 D) 75 E) Hiçbiri

UMO 2002

12. $x^2-ax+21=0$ denkleminin köklerinden birinin pozitif bir tam sayı olmasını sağlayan en küçük a gerçel sayısı için, $a-[a]$ nın değeri nedir?

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{5}$ D) $\dfrac{1}{7}$ E) Hiçbiri

UMO 2006

13. $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

UMO 2004

14. $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin küplerinin toplamı nedir?

A) -6 B) 2 C) 8 D) 11 E) Hiçbiri

UMO 2004

15. a, b, c, d farklı gerçel sayılar olmak üzere, a ve b, $x^2 - 2cx - 5d = 0$ denkleminin, c ve d ise, $x^2 - 2ax - 5b = 0$ denkleminin kökleriyse, $a + b + c + d$ nedir?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

UMO 2004

16. $x^2 + bx + c = 0$ denkleminin her iki kökü de tamsayı olup, $b + c = 306$ ise, bu köklerden küçük olanı kaç farklı değer alabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) Sonsuz çoklukta E) Hiçbiri

UİMO - 2005

17. $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$ denkleminin en büyük ve en küçük gerçel köklerinin arasındaki fark F ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $0 \le F < 2$ B) $2 \le F < 4$ C) $4 \le F < 6$ D) $6 \le F < 8$ E) $8 \le F$

UMO 2005

18. a nın kaç pozitif gerçel değeri için, $a^2x^2 + ax + 1 - 7a^2 = 0$ denkleminin farklı iki tam sayı kökü vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) Sonsuz çoklukta E) Hiçbiri

UMO 2005

19. $x^3 - x^2 - x - \dfrac{1}{3} = 0$ denkleminin en büyük gerçel kökü nedir?

A) $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{2}$ C) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3} - 1}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$ E) Hiçbiri

UMO 2005

20. $4x^4 - 3x^2 + 7x - 3 = 0$ denkleminin farklı gerçel köklerinin toplamı kaçtır?

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) Hiçbiri

UMO 2006

21. a, b, c hepsi birden sıfır olmayan gerçel sayılar olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$bx^2 + cx + a = 0$$
$$cx^2 + ax + b = 0$$

denklem sisteminin en büyük gerçel kökü ile en küçük gerçel kökü arasındaki fark en çok kaç olabilir?

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$ E) Üst sınırı yoktur

UMO 2005

22. $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$ denkleminin kaç farklı gerçel kökü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

UMO 2006

23. a, b, c, d gerçel sayılar ve $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ olmak üzere,

$$f(x) + g(x) = 0,\ f(x) - (g(x))^3 = 0$$

denklem sisteminin birden çok gerçel kökü varsa, $f(x)\, g(x) = 0$ denkleminin en çok kaç farklı gerçel kökü olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

UMO 2005

24. x_1 ve x_2 sayıları $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri; $\dfrac{x_1}{x_2}$ ve $\dfrac{x_2}{x_1}$ sayıları da $Ax^2 + Bx + 1 = 0$ denkleminin kökleri ise, B nedir?

A) $\dfrac{b^2}{ac} - 2$ B) $2 - \dfrac{b^2}{c}$ C) $2 - \dfrac{b^2}{ac}$ D) $\dfrac{b^2}{c} - 2$ E) $2 - \dfrac{ab^2}{c}$

UİMO - 2000

25. $(x+1)(x+\frac{1}{4})(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{4}) = \dfrac{45}{32}$ denkleminin gerçel çözümlerinin toplamı kaçtır?

A) 0 B) -1 C) $\dfrac{-3}{2}$ D) $\dfrac{-5}{4}$ E) $\dfrac{-7}{12}$

UMO - 2007

26. $|x| + |y| = 13$ eşitliğini sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilileri için, $x^2 - 7x - y + y^2$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?

A) $\dfrac{35}{2}$ B) 37 C) 208 D) $15\sqrt{2}$ E) Hiçbiri

UMO - 2009

27. a bir gerçel sayı; x_1 ve x_2, $x^2+ax+2=x$ denkleminin farklı iki kökü; x_3 ve x_4'de $(x-a)^2+a(x-a)+2=x$ denkleminin farklı iki kökü olmak üzere, $x_3-x_1=3(x_4-x_2)$ ise, x_4-x_2 nedir?

A) $a/2$ B) $a/3$ C) $3a/2$ D) $2a/3$ E) Hiçbiri

UMO - 2009

28. $x^4+2x^3-8x^2-6x+15$ ve x^3+4x^2-x-10 polinomlarının ortak olmayan gerçel köklerinin çarpımı kaçtır?

A) -6 B) -4 C) 4 D) 6 E) Hiçbiri

UMO - 2009

29. $xy+x+y=5$ ve $x^2y+xy^2=6$ denklemleri veriliyor. $y>1$ ise, x^2+2y^2 aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 8 B) 5 C) 6 D) 9 E) 3

UMO - 1994

30. $x+y=t$ ve $x^2+y^2=2t$ denklemlerinin tüm reel değerli (x,y,t) çözümleri içinde, t'nin alabileceği en büyük değer ne olur?

A) 4 B) 2 C) $1+\sqrt{2}$ D) $4+\sqrt{2}$ E) Hiçbiri

UMO - 1994

31. $\begin{cases} x+3y=tx \\ x-y=ty \\ x^2+y^2=t^2 \end{cases}$ denklem sisteminin kaç tane reel değerli (x,y,t) çözüm takımı vardır?

A) 2 B) 9 C) 4 D) 5 E) 3

UMO - 1994

32. $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$ olduğuna göre $x+y$ nedir?

A) $-2\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) -1 D) 0 E) 2

UMO - 1995

33. x ve y gerçel sayıları için, $x^2+y^2=6$ ve $x^3+y^3=14$ ise, x^4+y^4 toplamının alabileceği değerlerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{17\}$ B) $\{3,4\}$ C) $\{17, 10\sqrt{15}-22\}$

D) $\{34, 20\sqrt{15}-44\}$ E) Hiçbiri

UMO - 1996

34. $\sin x = \dfrac{x}{22}$ denkleminin gerçel çözümlerinin sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 17 B) 15 C) 14 D) 7 E) 9

UMO - 1996

35. $a^2x^2+\sqrt{x-2\sqrt{5}}+4 = 4ax$ denkleminin en az bir x gerçel çözümünün olmasını sağlayan a değeri nedir?

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{5}/5$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}/2$ E) Hiçbiri

UİMO - 1998

36. $x^6 - 2x^4 + x^2 = A$ denkleminin farklı gerçel çözümlerinin sayısını $n(A)$ ile gösterelim. A tüm gerçel değerleri aldığında $n(A)$'nın alacağı değerlerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{0, 2, 3, 4\}$ B) $\{0, 2, 3, 4, 6\}$ C) $\{0, 3, 4, 6\}$

D) $\{0, 2, 4, 6\}$ E) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

UİMO - 1998

37. x, y, z sayıları,

$$\begin{cases} x^2+y^2+z = 15 \\ x+y+z^2 = 27 \\ xy+yz+zx = 7 \end{cases}$$

denklem sistemini sağlıyorsa, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $9 \le |x+y+z| \le 10$ B) $7 \le |x+y+z| \le 8$ C) $5 \le |x+y+z| \le 6$

D) $3 \le |x+y+z| \le 4$ E) Hiçbiri

UMO - 1998

38. $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} - \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 1$ denkleminin farklı gerçel çözümlerinin sayısı nedir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

UMO - 1998

39. $x^2+y^2+z^2 = 21,\ x+y+z+xyz = -3,\ x^2yz+y^2xz+z^2xy = -40$ denklem sistemini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü vardır?

A) 6 B) 3 C) 12 D) 0 E) Hiçbiri

UMO - 1999

40. x, y, z gerçel sayılar olmak üzere, $x^3 - y = 24$, $y^3 - z = 24$, $z^3 - x = 24$ denklem sisteminin kaç çözümü vardır?

A) 0 B) 6 C) 4 D) 3 E) Hiçbiri

UMO - 1997

41. $(x+y)^5 = z$, $(y+z)^5 = x$, $(z+x)^5 = y$ sistemini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı sıralı üçlüsü vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) Sonsuz çoklukta E) Hiçbiri

UMO - 2000

42. $\dfrac{x^{2000}}{2001} + 2\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{5}x + \sqrt{3} = 0$ denkleminin kaç gerçel çözümü vardır?

A) 0 B) 11 C) 12 D) 1 E) Hiçbiri

UMO - 2001

43. $\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 1$ denklemini sağlayan kaç x gerçel sayısı vardır?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) Hiçbiri

UMO - 2003

44. $\dfrac{x-1}{xy-3} = \dfrac{3-x-y}{7-x^2-y^2} = \dfrac{y-2}{xy-4}$ denklem sisteminin kaç çözümü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

UMO - 2005

45. A sayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için, $2x - 3y = 1$, $xy = 7$ ve $x^2 + y^2 = A$ eşitliklerinin hepsini birden sağlayan x, y gerçel sayıları bulunur?

A) $65/4$ B) 10 C) $15/4$ D) $5/2$ E) 1

UMO - 2005

46. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{2x-1} \geq 1$ eşitsizliğinin reel sayılarda çözüm kümesi ayrık aralıkların birleşimi olarak yazıldığında, bu aralıkların uzunlukları toplamı ne olur?

A) Sonsuz B) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$ D) $\dfrac{9}{2}$ E) 2

UMO - 1993

47. Her x reel sayısı için, $\dfrac{x^2+ax+1}{x^2+4x+8} < 8$ eşitsizliğini sağlıyorsa, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $a = 0$ B) $a^2 > 8$ C) $0 \leq a \leq 75$ D) $|a| < 10$ E) $a < 74$

UMO - 1994

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

3.25 Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatları

1. $|x| + |y| < 20$ eşitsizliğinin tam sayı çözümlerinin sayısı kaçtır?

A) 400 B) 600 C) 661 D) 761 E) 790

Antalya M.O.- 1996

2. $x^2 + ax + 3a = 0$ denkleminin kökleri tamsayı ise, a reel sayısının alabileceği değerler sayısı kaçtır?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 1

Antalya M.O.- 1998

3. a ve b sayılarının toplamı $x^2 + 6x + 1 = 0$ denkleminin köklerinin toplamına; a ve b nin çarpımı ise, $x^2 + 8x + 7 = 0$ denkleminin köklerinin çarpımına eşittir. a ve b sayılarının en büyüğü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3 + \sqrt{2}$ B) -1 C) $-4 + \sqrt{15}$ D) $3 + \sqrt{2}$ E) 7

Antalya M.O.- 1998

4. $2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 3x} + 1$ denkleminin kaç reel çözümü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Sonsuz

Antalya M.O.- 1998

5. $\dfrac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} + x^2 - 4 = 0$ denkleminin kaç reel kökü vardır?

A) 0 B) 6 C) 2 D) 3 E) 1

Antalya M.O.- 1999

6. $\begin{cases} y^2 - (x+1)\left(x^2+4\right) = 0 \\ y^2 - (4-2x)\,y + \left(4 - 4x - 3x^2\right) = 0 \end{cases}$ denklem sisteminin çözüm kümesinde kaç (x, y) reel sayı ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 3 ten fazla

Antalya M.O.- 2000

7. $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $ax^2+bx+c = 0$ denkleminin diskriminantının 47 olmasını sağlayan kaç tane (a, b, c) üçlüsü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 47 E) Sonsuz

Antalya M.O.- 2000

8. $x = 1 - 2\left(1 - 2x^2\right)^2$ denkleminin kaç reel çözümü vardır?

A) 0 B) 1 C)2 D) 3 E) 4

Antalya M.O.- 2000

9. $x^3 + px^2 + qx - 2001 = 0$ denkleminin kökleri a, b, c ise, $p^2 - 2q$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $a^2 + b^2 + c^2$ B) $(a + b + c)^2$ C) $ab + ac + bc$ D) abc E) 2001

Antalya M.O.- 2001

10. Kaç tane a reel sayısı için

$|y + 100| + |y + 99| + \cdots + |y + 1| + |y| + |y - 1| + \cdots + |y - 99| + |y - 100| = a$

denkleminin yalnızca bir reel çözümü vardır?

A) 3 B) 1 C) 2 D) 0 E) 3 'den çok

Antalya M.O.- 2001

11. a, b, c gerçel sayıları $|a| \le 3$, $|b| \le 2$, $|c| \le 1$ koşullarını sağlamak üzere, tüm

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

denklemlerini düşünelim. Bu denklemlerden en az birini sağlayan pozitif gerçel sayıların en büyüğüne x_0 diyelim. x_0 sayısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $2 < x_0 < 3$ B) $1 < x_0 < 2$ C) $0 < x_0 < 1$

D) $3 < x_0 < 4$ E) $4 < x_0 < 5$

Antalya M.O.- 2002

12. $\left.\begin{array}{l} x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 20x^2 - 15x + 5 = 0 \\ x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 10x + 5 = 0 \end{array}\right\}$ denklemler sisteminin gerçel çözümü x_0 ise, $3x_0^3 + 7$ tamsayısının rakamlar toplamı kaçtır?

A) 4 B) 13 C) 7 D) 5 E) 16

Antalya M.O.- 2002

13. a, b ve c sayıları $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ise,

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) -1

Antalya M.O.- 2004

14. $x^7+5x-3=0$ denkleminin 7 tane kökü olduğuna göre, bu köklerin 7. kuvvetlerinin toplamı kaçtır?

A) 21 B) 28 C) 35 D) 42 E) 49

Antalya M.O.- 2004

15. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(x-2)(y+2)=(x+y)^2$$

eşitliğini sağlayan (x, y) ikililerinin sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Sonsuz çoklukta

Antalya M.O.- 2005

16. $x+y=a^5-3a^2$ ve $x \cdot y=144a^4$ denklem sisteminin pozitif reel sayılarda çözümünün varlığı için a sayısı en az kaç olmalıdır?

A) 3 B) $\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 4 E) 2

Antalya M.O.- 2006

17. $x^4-x^3-24x^2+2x+4=0$ denklemini sağlayan x reel sayıları için $x-2/x$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

A) -4 B) 3 C) 4 D) 5 E) 8

Antalya M.O.- 2006

18. $x^4+x^2y^2+y^4=24$ ve $x^2-xy+y^2=6$ eşitliklerini sağlayan x ve y reel sayıları için $\left|x^3+y^3\right|$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $6\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{6}$ D) $3\sqrt{6}$ E) $5\sqrt{2}$

Antalya M.O.- 2007

19. $x+y=2(\sqrt{x+3}+\sqrt{y+4})$ eşitliğini sağlayan reel x ve y sayıları için,

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{y+4}$$

toplamının alabileceği en büyük değer nedir?

A) $2+3\sqrt{2}$ B) $8-5\sqrt{3}$ C) $2+4\sqrt{6}$ D) $5-2\sqrt{3}$ E) $3+3\sqrt{2}$

Antalya M.O.- 2007

20. b ve c pozitif tamsayılar olmak üzere, kaç (b, c) ikilisi için $x^2-bx-c=0$ denkleminin kökleri 5'ten büyük değildir?

A) 25 B) 30 C) 40 D) 45 E) 50

Antalya M.O.- 2009

21. $4x^4 - 20x^3 + 17x^2 + 22x - 2 = 0$ denkleminin köklerinden ikisinin çarpımı -2 ise, bu iki kökün kareler toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

Antalya M.O.- 2009

20. $\sqrt{7x-8} + \sqrt[3]{9-7x} = 1$ denkleminin reel çözümlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{30}{7}$ B) $\dfrac{31}{7}$ C) $\dfrac{32}{7}$ D) $\dfrac{33}{7}$ E) $\dfrac{34}{7}$

Antalya M.O.- 2009

21. n doğal sayısının kaç tane değeri için,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 9 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} = 1 \end{cases}$$

denklem sisteminin pozitif reel sayılarda çözümü vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 9 E) Sonsuz çoklukta

Antalya M.O.- 2008

22. $\left(x + x^2 + x^3\right) + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = 28$ eşitliğini sağlayan x reel sayısı için $(2x-3)^2$ aşağıdakilerden hangisine eşitdir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Antalya M.O.- 2008

23. $\dfrac{x}{y} + 4\dfrac{y}{x} = 2$ eşitliğini sağlayan x ve y değerleri için, $\dfrac{x^3}{y^3}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) -8 C) 64 D) -64 E) 27

Antalya M.O.- 2008

Diziler

Örnek 264 *2, 3, 5, 6, 7, 10, 11,... şeklinde tamkare ve tamküp olan sayıların atılmasıyla artan sırada yazılan dizinin* 1991*'inci terimi kaçtır?*

Örnek 265 $a_1 = 2$ *ve* $n \geq 1$ *için* $a_{n+1} = (1 + a_n)/(1 - a_n)$ *olarak tanımlanıyor. Buna göre,* $a_{2009} = ?$

Örnek 266 $a_1 = 7$ *ve* $a_{n+1} = \sqrt{|a_n^2 - 16|}$ *olduğuna göre* $a_{2009} = ?$

Örnek 267 $a_1 = 1$ *olmak üzere,* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *reel sayı dizisi gözönüne alınıyor.*

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n + \frac{1}{n}$$

olduğuna göre, $a_{1990} = ?$

Örnek 268 $a_2 = 2$ *ve* $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ *bağıntılarını sağlayan,* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *reel sayı dizisi gözönüne alınıyor. Bu dizinin ilk* 1996 *teriminin toplamı* 2000 *olduğuna göre, ilk* 2000 *teriminin toplamını bulunuz.*

4.1 Aritmetik Dizi

Örnek 269 *a ve b tamsayıları için,* $f(n) = an + b$ *olmak üzere, her* $n \in \mathbb{Z}$ *için,*

$$f(3n+1), \quad f(3n) + 1 \;\; ve \;\; 3f(n) + 1$$

sayıları bir artimetik dizi oluşturuyorsa, a ile b arasındaki bağıntı ne olmalıdır?

Örnek 270 $1, 8, 15, 22, ..., 2010$ *ve* $2, 13, 24, 35, ..., 2015$ *aritmetik sayı dizilerinde kaç tane ortak sayı vardır?*

Örnek 271 $x^4 - 10x^2 + a = 0$ *polinomunun dört kökü vardır ve bu kökler bir aritmetik dizi oluşturmaktadır. Buna göre, a reel sayısı kaçtır?* (*Wisconsin M. Talent Search* 1998)

Örnek 272 *Sonsuz elemanlı bir aritmetik dizi bir tamkare içeriyorsa, sonsuz sayıda tamkare içereceğini gösteriniz.* (*SSCB M.O.* 1963)

Örnek 273 *Bir pozitif tamsayılardan oluşan bir aritmetik dizinin ortak farkı* 17 *olsun.* 121 *bu dizinin bir elemanı olduğuna göre, bu dizinin en küçük tamkare elemanı kaçtır?* (*SSCB M.O.* 1963)

Örnek 274 $1,\ 8,\ 15,\ 22,\ 29,\ 36,\ 43,\ 50,\ 57,\ 64, ...$ *aritmetik dizisini göz önüne alalım. Bu dizideki tamkarelerin küçükten büyüğe doğru oluşturduğu diziyi* a_n *ile gösterelim. Buna göre* $a_{99} =?$

Örnek 275 $a < b < c < d < e$ *reel sayılar olmak üzere,* S *kümesi bu beş sayıdan herhangi iki farklı sayının toplanmasıyla elde edilen tüm mümkün toplamların kümesini göstersin.* S *kümesinin eleman sayısı* 7 *olduğuna göre,* a, b, c, d *ve* e *sayılarının aritmetik dizi oluşturduğunu gösteriniz.*

Örnek 276 *Tüm elemanları birbirinden farklı tamsayı olan ve ilk* 77 *teriminin toplamı* 1001 *olan artan bir aritmetik dizinin mümkün olan en küçük pozitif terimi kaçıncı terimdir?*

Örnek 277 $a_{93} = a_{19} = 0$ *olmak üzere,* $A = a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *reel sayı dizisi gözönüne alınıyor. Bu diziden,* $\Delta A = a_2 - a_1,\ a_3 - a_2, ..., a_n - a_{n-1}, ...$ *şeklinde yeni bir dizi oluşturuluyor. Bu işlem tekrar edilerek* $\Delta\left(\Delta A\right)$ *dizisi elde ediliyor. Son elde edilen dizinin tüm terimleri* 1 *olduğuna göre,* $a_1 =?$ (*AIME* 1992)

4.2 Geometrik Dizi

Örnek 278 *Toplamları* 19 *ve karelerinin toplamı* 133 *olan üç sayı artan bir geometrik dizi oluşturduğuna göre, bu sayıların en küçüğü kaçtır?*

Örnek 279 $\{100, 101, 102, ..., 1000\}$ *sayılarından oluşturulabilen geometrik dizi en çok kaç terimli olabilir?* (*KANADA M.O.* 1983)

Örnek 280 $[\![x]\!]$ *ve* $\{x\} = x - [\![x]\!]$ *sırasıyla,* x *sayısından büyük olmayan en küçük tamsayıyı ve* x *sayısının kesir kısmını gösterdiklerine göre,*

$$x, \quad [\![x]\!] \quad \textit{ve} \quad \{x\}$$

geometrik dizi olacak şekilde kaç tane sıfırdan farklı x *değeri vardır?*

Örnek 281 $k, k+1, k+2, k+3, ...$ *sayı dizisinin geometrik bir dizi oluşturacak şekilde* 3 *farklı sayı içermesi için gerek ve yeter şart* k *sayısının rasyonel olmasıdır. Gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1993)

4.3 Fibonacci Dizisi

Örnek 282 F_n *Fibonacci dizisi veriliyor.* $7F_{n+2}^3 - F_n^3 - F_{n+1}^3$ *ifadesinin* F_{n+3} *ile bölünebildiğini gösteriniz.*

Örnek 283 *F_n Fibonacci dizisi veriliyor. F_{41}, F_{150}, F_{80}, F_{200} sayılarından $a)$ kaç tanesi tektir? $b)$ kaç tanesi 3 ile tam bölünür?*

Örnek 284 *$a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $F_0 = 1$, $F_1 = a$ ve $n \geq 2$ için, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olarak tanımlanan Fibonaccimsi dizi veriliyor.*

$a)$ (F_n) dizisinin hiç bir terimi N ile bölünmeyecek şekilde, a ve $N > 1$ tamsayıları bulunabileceğini gösteriniz.

$b)$ (F_n) dizisinin en az bir tane ardışık iki terimi N ile bölünecek şekilde, a ve $N > 1$ tamsayıları bulunamayacağını gösteriniz.

Örnek 285 *$F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olarak tanımlanan Fibonacci dizisi veriliyor.*

$a)$ Her m ardışık Fibonacci sayısının toplamı tek sayı olacak şekilde bir m pozitif tamsayısının bulunamayacağını gösteriniz.

$b)$ Her m ardışık Fibonacci sayısının toplamı çift sayı olacak şekilde tüm m pozitif tamsayılarını bulunuz.$($*Wisconsin Math. Science Talent Search* $2005)$

Örnek 286 *$F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olarak tanımlanan Fibonacci dizisi veriliyor. F_{2n}/F_n sayısının daima tamsayı olduğunu gösteriniz.* $($*Wisconsin Math. Science Talent Search* $2003)$

Örnek 287 *$F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olarak tanımlanan Fibonacci dizisi veriliyor. $n \geq 4$ için, $F_n/F_{n-1} < 1,7$ olduğunu gösteriniz.* $($*Wisconsin Math. Science Talent Search* $2003)$

4.4 Bir Dizinin Genel Teriminin Bulunması

Örnek 288 *n pozitif tamsayı olmak üzere,*

$$a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2n - a_n} \text{ ve } a_1 = a$$

olduğuna göre, a_n terimini a ve n cinsinden bulunuz.

Örnek 289 *$a_1 = 1$ olmak üzere, $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ reel sayı dizisi gözönüne alınıyor.*

$$4a_n a_{n+1} = (a_n + a_{n+1} - 1)^2, a_n < a_{n+1}$$

olduğuna göre, $a_n = ?$

Örnek 290 *$x_0 = 5$ olmak üzere, $n \geq 1$ tamsayıları için, $x_n = 2x_{n-1}$ olarak veriliyor. Buna göre, x_{100} 'ün son rakamı kaçtır?*

Örnek 291 $x_0 = 5$ *olmak üzere,* $n \geq 1$ *tamsayıları için,* $x_n = 2x_{n-1} + 3n + 1$ *olarak veriliyor. Buna göre,* (x_n) *dizisinin genel terimini bulunuz.*

4.5 Dizilerin Homojen Yineleme Bağıntıları ve Genel Teriminin Bulunması

Örnek 292 $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ *ve* $n \geq 2$ *için,* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *olarak Fibonacci dizisinin genel terimini bulunuz.*

Örnek 293 $a_0 = 3$, $a_1 = 10$ *olmak üzere,* $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$ *eşitliğinin sağlayan* (a_n) *dizisinin genel terimini bulunuz.*

Örnek 294 $a_0 = 2, a_1 = 10$ *olmak üzere,* $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ *eşitliğinin sağlayan* (a_n) *dizisinin genel terimini bulunuz.*

4.6 Dizilerin Homojen Olmayan Yineleme Bağıntıları ve Genel Terimin Bulunması

Örnek 295 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + T(n)$ *yineleme bağıntısını sağlayan* (a_n) *dizisinin genel terimini aşağıdaki verilen* $T(n)$ *fonksiyonlarına göre bulunuz.*

a) $T(n) = 3n^2 - 2$

b) $T(n) = 5^n$

c) $T(n) = 3^n$

d) $T(n) = 5^n(n+1)$

e) $T(n) = 3^n(n+1)$

Örnek 296 $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + T(n)$ *yineleme bağıntısını sağlayan* (a_n) *dizisinin genel terimini aşağıdaki verilen* $T(n)$ *fonksiyonlarına göre en genel biçimiyle hesaplayınız.*

a) $T(n) = 2^n$

b) $T(n) = 3^n$

c) $T(n) = 3^n(3n-2)$

Örnek 297 $a_0 = 5$ *olmak üzere,* $n > 1$ *tamsayıları için,* $a_n = 2a_{n-1} + 3n + 1$ *olarak veriliyor. Buna göre,* (a_n) *dizisinin genel terimini bulunuz.*

Örnek 298 $a_0 = 2$ *olan ve* $a_n = 2a_{n-1} + 3^n$ *eşitliğini sağlayan* (a_n) *dizisinin ilk* n *teriminin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?*

Örnek 299 *$a_0 = 7$ olmak üzere, $n > 1$ tamsayıları için, $a_n = a_{n-1} + n$ olarak veriliyor. Buna göre, a_n aşağıdakilerden hangisidir?*

Örnek 300 *$a_0 = 3$ olmak üzere, $n > 1$ tamsayıları için, $a_n = a_{n-1} + 2^n + n$ olarak veriliyor. Buna göre, (a_n) dizisinin genel terimini bulunuz.*

4.7 Yardımcı Genel Terim Kullanma

Örnek 301 *$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi için, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ve $n \geq 3$ iken,*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + 1$$

olduğuna göre, $a_{2010} = ?$

Örnek 302 *$a_1 = \dfrac{1}{2}$ ve $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2n \cdot a_{n-1} + 1}$ eşitliklerini sağlayan, $n \in \mathbb{N}$, (a_n) dizisi için $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$ toplamını hesaplayınız.*

Örnek 303 *$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisi, $a_0 = 1$ ve $n \geq 0$ için, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + na_n}$ olduğuna göre, $a_{100} = ?$*

4.8 Dizinin Tüm Terimlerinin Tamsayı Olduğunu Gösterme

Örnek 304 *$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $a_1 = a_2 = 1$ ve $a_n = (a_{n-1}^2 + 2)/a_{n-2}$ koşullarını sağladığına göre, $n \geq 3$ için, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin tüm terimlerinin tamsayı olduğunu gösteriniz.* (*Moskova M.O.* 1963)

Örnek 305 *$a_1 = 2$ ve $na_n = 2(2n-1)a_{n-1}$ eşitliğini sağlayan (a_n) dizisinin tüm terimlerinin tamsayı olduğunu gösteriniz.*

4.9 Dizinin Limiti

Örnek 306 *Limit tanımını kullanarak genel terimi $a_n = \dfrac{2n^2 + 1}{1 - n - n^2}$ olan (a_n) dizisinin limitinin -2 olduğunu gösteriniz.*

4.9.1 Dizinin Limiti İle İlgili Bazı Özellikler

Örnek 307 *Genel terimi* $a_n = \dfrac{2n^2+n+1}{3n^2+n-2}$ *olarak verilen* (a_n) *dizisinin limitini bulunuz.*

Örnek 308 *Genel terimi* $a_n = \dfrac{1}{n}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]$ *olarak verilen* (a_n) *dizisinin limitini bulunuz.*

Örnek 309 $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{8a_{n-1}}{a_{n-1}+4}$ *dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

Örnek 310 $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{3a_{n-1}-1}{4a_{n-1}-1}$ *dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz*

Örnek 311 $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2+a_n)$ *şeklinde tanımlanan* (a_n) *dizisinin limitini bulunuz.*

Örnek 312 $a_1 = 17/10,\ a_2 = 177/100,\ a_3 = 1777/1000$,... *dizisinin limitini bulunuz.*

Örnek 313 $a > 0$ *reel sayı olmak üzere* $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ *olduğunu gösteriniz.*

4.9.2 Supremum ve İnfimum

Örnek 314 $(a_n) = \left(\dfrac{2n+3}{2n-5}\right)$ *dizisinin supremum ve infimumunu bulunuz.*

4.9.3 Yığılma noktası, Alt limit, Üst limit

Örnek 315 $a_1 = 6,\ a_{n+1} = 3 - \dfrac{3}{a_n}$ *dizisinin yığılma noktalarını bularak alt ve üst limitlerini belirleyiniz.***.**

4.9.4 Monoton Azalan(Artan) ve Alttan(Üstten) Sınırlı Olduğunu Göstererek Yakınsak Olduğunu Gösterme

Örnek 316 $a_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$ *dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

Örnek 317 $\lim\left(1-\dfrac{1}{4n^2}\right)^n = ?$

Örnek 318 $\lim \left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{n/3} = ?$

Örnek 319 $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ *olan dizinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve limitini bulunuz.*

Örnek 320 $a_1 = \sqrt{2}$, *ve* $n > 1$ *için* $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{a_{n-1}}}$ *dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz. Limitini bulunuz.*

4.9.5 Cauchy Yakınsaklık Kriteri

Örnek 321 $a_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} ... + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ *dizisinin yakınsak olduğunu Cauchy kriteriyle gösteriniz.*

Örnek 322 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ *dizisinin ıraksak olduğunu Cauchy kriteriyle gösteriniz.*

Örnek 323 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *reel sayı dizisi,* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ *ve* $n \geq 1$ *için,*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + na_{n-1}}{1+n}$$

olduğuna göre a_n *dizisinin limitini bulunuz.*

Örnek 324 $a_1 = 1$ *ve her* $m, n \in \mathbb{Z}^+$ *için,* $|a_n - a_m| \leq \dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ *koşullarını sağlayan tüm* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *dizilerini bulunuz.* (*IMO*)

★ **Kural :** Pozitif terimli bir (a_n) dizisinde, $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ eşitliği sağlanır.

Örnek 325 $\lim (\sqrt[n]{n}) = ?$

★ **Kural :** $\lim (a_n) = a$ ise, $\lim \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) = a$'dır.

Örnek 326 $\lim \dfrac{1 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$ *dizisinin limitini bulunuz.*

★ **Kural :** Pozitif terimli bir (a_n) dizisinde, $\lim (a_n) = a$ ise,

$$\lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n} = a$$

olur.

Örnek 327 $\lim\left(\sqrt[n]{1/n!}\right) = ?$

Örnek 328 $|a| < 1$ *için* $\lim na^n = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

4.10 Karışık Örnekler

Örnek 329 $a_n = n! + \left(\frac{n-1}{n}\right) a_{n-1}$ *ve* $a_1 = 2$ *eşitliklerini sağlayan* a_n *dizisi için,* $\sum\limits_{n=1}^{2008} \frac{1}{a_n}$ *değerini hesaplayınız.*

Örnek 330 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{43} < a_{44}$ *pozitif tamsayıları* 125*'ten büyük değildir.*

$$d_i = a_{i+1} - a_i \ \ (i = 1, 2, ..., 43)$$

eşitliği ile elde edilen 43 *fark içerisinde bazı değerlerin en az* 10 *kez yer alacağını gösteriniz.*

Örnek 331 $a = 3+\sqrt{2}$ *ve* $b = 3-\sqrt{2}$ *olmak üzere,* $(x_n)_0^\infty$ *dizisi* $x_n = (a^n + b^n)/2$ *şeklinde tanımlanıyor.* x_{1990} *sayısının birler basamağı kaçtır?*

Örnek 332 $a_1 = 0, a_{2n+1} = a_{2n} = n$ *olsun.* $S(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *olduğuna göre, a)* $S(n) = ?$ *b)* $m > n$ *için,* $S(m+n) - S(m-n) = mn$ *olduğunu gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1970)

Örnek 333 $a_1 = 1, a_2 = 2$ *ve* $a_3 = 4$ *olmak üzere,* $n \geq 4$ *için,* a_n *dizisi, kendinden önceki üç terimin toplamlarının son rakamını göstermektedir. Bu sayı dizisini art arda yazarsak,* 1247344194475... *biçiminde olacaktır. Bu dizide, görüldüğü gibi* 1944 *dörtlüsü vardır. Bu şekilde yazılan sayı dizimizde* 1001 *dörtlüsünün sonsuz sayıda bulunabileceğini gösteriniz.*

Örnek 334 $0 < k < 1$ *için* $a_1 = 1 + k$ *ve,* $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + k$ *olduğuna göre, her* n *için,* $a_n > 1$ *olduğunu gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1977)

Örnek 335 $n > 1$ *tamsayısı için,* $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ *olmak üzere,*

$$1 = n(a_r + a_{r+1} + \cdots + a_s)$$

olacak şekilde, $r < s$ *pozitif tamsayılarının bulunabileceğini gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1973)

Örnek 336 *k pozitif tamsayısı için,* $a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$ *ise,*

$$3a_1 + 5a_2 + 7a_3 + \cdots + (2n+1)\,a_n = (n+1)^2\,a_n - \frac{n\,(n+1)}{2}$$

eşitliğinin sağlandığını gösteriniz. (Municipal 1999)

Örnek 337 $a_1 = \frac{1}{2}$ *ve*

$$n^2 a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

olduğuna göre, $a_n =?$ (*KANADA M.O.* 1975)

Örnek 338 $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ *ve* $n\,(n+1)\,a_{n+1} = n\,(n-1)\,a_n - (n-2)\,a_{n-1}$ *olduğuna göre,* $\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{50}}{a_{51}} =?$ (*KANADA M.O.* 1976)

Örnek 339 $a_0 = 0$ *,* $a_1 = 1$ *ve* $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ *eşitliklerini sağlayan* $(a_n)_0^\infty$ *tamsayı dizisi ile,* $b_0 = 1$ *,* $b_1 = 2$ *ve* $b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n$ *eşitliklerini sağlayan* $(b_n)_0^\infty$ *tamsayı dizisi veriliyor. Buna göre,* $3a_n^2 + 1 = b_n^2$ *olduğunu gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1988)

Örnek 340 *S bir pozitif tamsayı dizisi olsun. S sayı dizisinin elemanlarının çarpımını $P\,(S)$ ile ve S'nin tüm boş olmayan T altkümeleri için bulunan $P\,(T)$ sayılarının aritmetik ortalamasını da $M\,(S)$ ile gösterelim. S sayı dizisine bir pozitif sayı daha ekleyerek S' sayı dizisi oluşturuluyor. $M\,(S) = 13$ ve $M\,(S') = 49$ olduğuna göre, S' sayı dizisini bulunuz.* (*KANADA M.O.* 1988)

Örnek 341 *$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,*

$$x_0 = 1 + \sqrt{(1+x)},\ \ x_1 = 2 + \frac{x}{x_1}, ...,\ \ x_{1984} = 2 + \frac{x}{x_{1984}}$$

eşitlikleri sağlandığına göre, $x_{1985} = x$ denkleminin kaç tane reel kökü vardır? (*SSCB* 1985)

Örnek 342 $(a_n)_{n=1}^\infty$ *dizisi,* $a_1 = 39$, $a_2 = 45$ *ve* $a_{n+2} = a_{n+1}^2 - a_n$ *koşullarını sağladığına göre,* 1986 *sayısının* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *dizisinin sonsuz sayıda terimini böldüğünü gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1986)

Örnek 343 *n pozitif tamsayı olmak üzere, toplamları 17 olan $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitif reel sayıların dizisi göz önüne alınıyor.*

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(2k-1)^2 + a_k^2}$$

ifadesinin minimum değeri S_n olarak tanımlanırsa, S_n bir tamsayı olacak şekildeki n sayısını bulunuz. (*Hong-Kong Prelimary Contest*)

Örnek 344 *$a_1 = 1$ ve $n > 1$ için, $(a_n) = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisinden yararlanarak* $\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 345 *$a > 1$, reel sayı olmak üzere* $\lim\left(\dfrac{n^2}{a^n}\right) = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 346 *$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi, $a_0 = 1996$ ve $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n+1}$ koşullarını sağlamaktadır. $[\![x]\!]$ sayısı x sayısından büyük olmayan en büyük tamsayıyı göstermek üzere, $n = 0, 1, 2, ..., 999$ için, $[\![a_n]\!] = 1996 - n$ olduğunu gösteriniz.* (*Excalibur*)

Örnek 347 *$a_1 = a_2 = 10$, $a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)+1$ ve $b_1 = b_2 = -10$, $b_{n+2} = b_{n+1}(b_n+1)+1$ koşullarını sağlayan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ve $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dizilerini göz önüne alalım. Bu iki dizinin ortak elemanı olmadığını gösteriniz.* (*Kanada Math. Soc. Soruları*)

Örnek 348 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 349 *$a_n = \dfrac{1}{3+1} + \dfrac{1}{3^2+2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n+n}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

Örnek 350 *$a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ dizisinin yakınsak olduğunu Cauchy Yakınsaklık Kriterini kullanarak gösteriniz.*

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

4.11 Çözümlü Test

1. $a_1 = 1$ olmak üzere, $n \geq 1$ için,

$$a_{n+1} = \begin{cases} 0, & n \text{ tek ve } a_n = 0 \text{ ise} \\ 2, & n \text{ çift ve } a_n = 0 \text{ ise} \\ 1, & n \text{ tek ve } a_n = 1 \text{ ise} \\ 0, & n \text{ çift ve } a_n = 1 \text{ ise} \\ 0, & a_n = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre, $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$ sayılarından kaç tanesi 0'a eşittir?

A) 51 B) 55 C) 50 D) 49 E) Hiçbiri

2. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi, $a_1 = 2009$ ve $n \geq 1$ için,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = n^2 a_n$$

olduğuna göre, $a_{2009} =?$

A) $1/2010$ B) $1/2009$ C) $1/1004$ D) $1/1005$ E) Hiçbiri

3. $a_1, a_2, a_3, ...$ dizisi, $a_1 = 3^0$, $a_2 = 3^1$, $a_3 = 3^0 + 3^1 = 4$, $a_3 = 3^2 = 9$ vb. biçiminde 3'ün farklı kuvvetlerinin toplamlarının artan sırada yazılmasıyla elde edilen bir dizi olsun. Buna göre, $a_{99} =?$ (AIME 1986)

A) 975 B) 981 C) 982 D) 976 E) Hiçbiri

4. Tüm terimlerinin toplamı 137 olan, $a_1, a_2, ..., a_{98}$ dizisi $n = 1, 2, 3, ..., 97$ için $a_{n+1} = a_n + 1$ eşitliğini sağladığına göre, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{98}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir? (AIME 1984)

A) 97 B) 98 C) 92 D) 96 E) Hiçbiri

5. $n > 0$ için, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ eşitliğini sağlayan tamsayılardan oluşan $(a_n)_1^{\infty}$ dizisinin ilk 1492 teriminin toplamı 1985 ve ilk 1985 teriminin toplamı ise 1492'dir. Buna göre ilk 2001 teriminin toplamını bulunuz. (AIME 1985)

A) 976 B) 985 C) 983 D) 986 E) Hiçbiri

6. $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ denkleminin dört tane kökü vardır ve bu kökler bir aritmetik dizi oluşturmaktadır. Buna göre, a sayısı kaçtır?

A) $-5/17$ B) $-27/19$ C) $-82/9$ D) $-81/10$ E) $-76/17$

7. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi $n \geq 2$ için, $a_{n-1} + a_n = 2n$ eşitliğini sağlamaktadır. $a_1 = 10$ ise, $a_{100} =?$

A) 95 B) 92 C) 91 D) 96 E) Hiçbiri

8. $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ ve $n \geq 2$ için $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ eşitliğini sağlayan a_n dizisi için, $a_{100} =?$

A) $\dfrac{2^{-96}+11}{3}$ B) $\dfrac{2^{-96}-11}{3}$ C) $\dfrac{2^{-104}+11}{3}$ D) $\dfrac{2^{-104}+11}{3}$ E) Hiçbiri

9. $\{100, 101, 102, ..., 500\}$ sayılarından oluşturulabilecek maksimum terimli geometrik dizinin son terimi kaçtır?

A) 128 B) 256 C) 360 D) 432 E) Hiçbiri

10. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ sonlu dizisi, her $k = 1, 2, ..., n$ için, k sayısı dizide a_k defa yer alıyorsa, bu diziye *tuhaf dizi* diyelim. Örneğin, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$ dizisi tuhaf dizidir. $a_1, a_2, a_3, ..., a_{1000}$ dizisi bir tuhaf dizi olduğuna göre,

$$\sum_{k=1}^{1000} a_k$$

toplamını hesaplayınız.

A) 955 B) 1000 C) 1001 D) 999 E) Hiçbiri

11. (a_n) dizisi için, $a_0 = 0$ ve $n \geq 1$ için, $|a_n| = |a_{n-1} + 3|$ olmak üzere,

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_{2006}|$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir? (AIME 2006)

A) 25 B) 21 C) 22 D) 26 E) Hiçbiri

12. $k \in \mathbb{Z}^+$ için, (a_d), ilk terimi 1 ve ortak farkı d olan bir artan bir aritmetik tamsayı dizisini ifade etmektedir. Buna göre, kaç tane tamsayı d değeri için 2005 sayısı (a_d) dizisinin bir terimidir. (AIME 2005)

A) 15 B) 24 C) 12 D) 16 E) Hiçbiri

13. $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ dizisi için, $a_0 = 37$, $a_1 = 72$, $a_n = 0$ ve $k = 1, 2, ..., n-1$ için $a_{k+1} = a_{k-1} - \dfrac{3}{a_k}$ olduğuna göre, $n =$? (AIME 2005)

A) 895 B) 981 C) 892 D) 889 E) Hiçbiri

14. İki aritmetik dizinin karşılıklı terimlerinin çarpımı ile oluşturulan

$$1440, 1716, 1848, ...$$

dizisinin sekizinci terimi kaçtır? (AIME 2003)

A) 348 B) 920 C) 912 D) 396 E) Hiçbiri

15. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi için, $a_0 = a$ olmak üzere, a_k değeri a_{k-1} değerinin rakamlarının toplanmasıyla bulunuyor. Buna göre, $a_0 = 2^{2009}$ ise $a_{100} =$? (Örneğin, $a_0 = 145$ ise, $a_1 = 10$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1, ...$)

A) 5 B) 6 C) 7 D) 2 E) Hiçbiri

16. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi için, $a_1 = 1$ ve $a_n^2 + a_n = a_{n+1}$ olsun. $b_n = 1/(1 + a_n)$ olmak üzere, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ve $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} b_k$ ise, $P_{1000} + S_{1000}$ toplamını hesaplayınız.

A) 1000 B) 1 C) $1 + 1/1000$ D) 1001 E) Hiçbiri

17. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için,

$$a_{n+1} = 2008a_n + 2009a_{n-1}$$

olduğuna göre, a_{2010} ve a_{2009} terimlerinin 3'e bölümünden kalanlarının toplamını bulunuz.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

18. Negatif olmayan gerçel sayılardan oluşan 100 terimli artmayan bir dizinin ilk iki teriminin toplamı en fazla 100 ve geri kalan terimlerinin toplamı ise en fazla 100 olduğuna göre, bu dizinin terimlerinin kareleri toplamı en fazla olacak şekilde kaç dizi vardır? (KANADA M.O. 2000)

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz sayıda

19. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi için, $a_2 = 5$, $a_{52} = 500$ ve $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ olduğuna göre, $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} =?$

A) 500 B) 505 C) 495 D) 490 E) Hiçbiri

20. Bir (a_n) dizisi için, $a_1 = 211$, $a_2 = 375$, $a_3 = 420$, $a_4 = 523$ ve $n \geq 5$ için,

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}$$

olduğuna göre, $a_{531} + a_{753} + a_{975} =?$ (AIME 2001)

A) 890 B) 912 C) 796 D) 898 E) Hiçbiri

21. Tüm terimleri asal sayı olan bir aritmetik dizinin beşinci terimi en küçük kaç olur? (AIME 1999)

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) Hiçbiri

22. $a_0 = -1$ ve $a_n = \dfrac{2a_{n-1} - 3}{3a_{n-1} - 4}$ eşitliklerini sağlayan (a_n) dizisi için, $a_{100} =?$

A) $599/600$ B) $601/600$ C) $599/601$ D) $600/601$ E) Hiçbiri

23. $a_1 = 1$ ve $a_n = \dfrac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$ olduğuna göre, a_{100} terimi 2'nin en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür?

A) 1 B) 100 C) 98 D) 99 E) Hiçbiri

24. $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$ sayı dizisinde $k \in \mathbb{Z}$ ve $1 \leq k \leq 100$ için, a_k sayısı, diğer 99 sayının toplamından k küçüktür. $(m, n) = 1$ ve $a_{50} = m/n$ olduğuna göre, $m + n$ kaçtır? (AIME 2000)

A) 170 B) 171 C) 172 D) 173 E) Hiçbiri

25. (a_n) dizisi, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ eşitliklerini sağlamaktadır. $a_{28} = 6090307$, $a_{29} = 11201821$ ve $a_{30} = 20603361$ olduğuna göre, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{28}$ toplamının son üç rakamı kaçtır? (AIME 2006)

A) 834 B) 734 C) 934 D) 634 E) Hiçbiri

26. $a_1 = \dfrac{1}{2}$ ve $a_{k+1} = a_k^2 + a_k$ eşitliklerini sağlayan (a_n) dizisi için,

$$K = \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_{1000}}$$

ise, $[\![K]\!] =?$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

27. $a_0 = \sqrt{3}$ ve $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$ ise, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k$ ise, $[\![k]\!] =?$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

28. $a_1 = a_2 = 1$ ve $a_3 = -1$ olmak üzere, $a_n = a_{n-1}a_{n-3}$ eşitliğinin sağlayan (a_n) dizisi için, $a_{1000} + a_{100} =?$

A) 0 B) 2 C) -1 D) -2 E) Hiçbiri

29. Dört pozitif tamsayıdan oluşan bir dizinin ilk üç terimi bir aritmetik dizi, son üç terimi ise bir geometrik dizi oluşturmaktadır. Birinci ve dördüncü terimleri arasındaki fark 30 olduğuna göre, bu dört terimin toplamı kaçtır? (AIME 2003)

A) 127 B) 128 C) 129 D) 130 E) Hiçbiri

30. (a_n) dizisi, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ve $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ve (b_n) dizisi ise, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ ve $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ olarak tanımlanıyor. Her iki diziye ait olan kaç tane tamsayı vardır? (SSCB. M.O.1982)

A) 5 B) 2 C) 3 D) 4 E) Sonsuz sayıda

31. $[\![x]\!]$ sayısı x'den büyük olmayan en büyük tamsayıyı göstermek üzere, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi için, $a_0 = 2004$ ve $a_{n+1} = [\![(a_0 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n)/2]\!]$ olduğuna göre, $a_n = 0$ olacak şekildeki en küçük n sayısını bulunuz.

A) 12 B) 11 C) 10 D) 13 E) Hiçbiri

32. $d(m)$ sayısı m sayısının kendisinden küçük en büyük çarpanını göstermek üzere, $a_1 = A$ ve $a_{n+1} = a_n + d(a_n)$ olacak şekilde, $a_1, a_2, ..., a_n$ dizisi tanımlanıyor. Hangi, $A > 1$ tamsayısı için, 2002 dizinin bir elemanıdır? (CENTRO Amerikan M.O. 2002)

A) 111 B) 113 C) 109 D) 110 E) Böyle bir A sayısı yoktur

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 4 (Analiz - Cebir 1) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.

Mustafa Özdemir

4.12 Tübitak Matematik Olimpiyat Soruları

1. Doğal sayılardan tam karelerin atılması ile elde edilen $2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11,$ ... dizisinin 1994'üncü terimi nedir?

A) 2036 B) 2037 C) 2038 D) 2039 E) 2040

UMO - 1994

2. Verilen bir (a_n) dizisinden her n için, $b_n = a_{n+1} - a_n$ şeklinde bir (b_n) dizisi tanımlanıyor. $a_8 = a_{40} = 0$ ve her n için, $b_{n+1} - b_n = 2$ ise, a_1 aşağıdakilerden hangisidir?

A) 273 B) 301 C) 186 D) 403 E) 281

UMO - 1993

3. Bir sayı dizisinin birinci terimi 20'dir. Bundan sonraki her terim kendisinden önceki terimin karesinin rakamları toplamına 1 eklenerek elde ediliyor. Bu dizinin yüzüncü terimi kaçtır?

A) 5 B) 8 C) 14 D) 11 E) 7

UMO - 1995

4. a_n sayısı, $\sqrt{n}$ sayısına en yakın olan tamsayıyı gösterdiğine

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2070}}$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 91 B) 90 C) 92 D) 89 E) 93

UMO - 1996

5. $x \in \mathbb{R}$ için, $f_1(x) = x^2 - 2x$ ve $n \geq 1$ için, $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ eşitlikleriyle $f_1, f_2, f_3, ...$ fonksiyonları tanımlanıyor. f_{1986} fonksiyonunun $[0, 2]$ kapalı aralığında alabileceği en küçük ve en büyük değerler hangisidir?

A) 0 ve 3 B) 0 ve 2 C) -1 ve 24 D) -1 ve 3 E) -1 ve 0

UMO - 1996

6. $S_1 = 1,\ \ S_2 = 1 - 2,\ \ S_3 = 1 - 2 + 3,\ \ S_4 = 1 - 2 + 3 - 4, ...,$
$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^n n$ olduğuna göre, $S_{95} + S_{100}$ kaçtır?

A) 0 B) 1 C) -1 D) -2 E) -2

UİMO - 1997

7. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tamsayı dizisi,

$a_1 \equiv 1 \pmod{13}$

$a_2 \equiv 4 \pmod{13}$ ve $n \geq 3$ için,

$a_n \equiv 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \pmod{13}$

koşulunu sağlıyorsa, $a_{100} \pmod{13}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 6 C) 12 D) 9 E) Hiçbiri

UMO - 1997

8. İlk terimi 1 olan 20 terimli bir aritmetik dizinin toplamı, ilk terimi 20 olan 10 terimli bir aritmetik dizinin toplamına eşittir? Bu dizilerin farkları sırasıyla x ve y pozitif tamsayıları ise, $x + y$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir?

A) 35 B) 38 C) 43 D) 74 E) 92

UMO - 1998

9. (a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve $n \geq 1$ için,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1 + 4a_n^2}}$$

şeklinde tanımlanıyor. $a_k < 10^{-2}$ eşitsizliğini gerçekleyen en küçük k değeri nedir?

A) 249 B) 2499 C) 251 D) 2501 E) Hiçbiri

UMO - 1998

10. $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ pozitif tamsayılar dizisinde a_0 asal olmayıp, diğer terimlerin herbiri bir önceki terimin pozitif bölenlerinin sayısına eşittir. Bu dizinin hiçbir teriminin tamkare olmamasını sağlayan kaç tane a_0 vardır?

A) 0 B) 2 C) 1 D) Sonsuz Sayıda E) Hiçbiri

UİMO - 1999

11. $a_0 = 1999$, $a_1 = 2000$ ve her $n \geq 0$ tamsayısı için, $a_{n+2} = (1 + a_{n+1}) / a_n$ olduğuna göre, a_{2001} kaçtır?

A) 998/3 B) 1999 C) 2000 D) 2001 E) Hiçbiri

UİMO - 1999

12. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayılar dizisi, he $n \geq 1$ için, $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$ koşulunu sağlıyorsa, $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesinin eleman sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Hiçbiri

UMO - 1999

13. Oniki terimli bir sayı dizisinin ilk terimi 12, son terimi 21'dir. Bu dizinin ardışık numaralı her üç teriminin toplamı 121 ise, sekizinci terimi kaçtır?

A) 91 B) 88 C) 21 D) 12 E) Veriler Yetersizdir

UİMO - 2000

14. (a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve her $n \geq 2$ pozitif tamsayısı için, $|a_n| = |a_{n-1} + 2|$ koşullarını sağlıyorsa $\sum\limits_{i=1}^{2000} a_i$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir?

A) -4000 B) -3000 C) -2000 D) -1000 E) Hiçbiri

UMO - 2000

15. $x_1 = -1$ ve her n pozitif tamsayısı için,

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n}\right) x_n + \frac{4}{n}$$

olduğuna göre, x_{2000} nedir?

A) 1999998 B) 2000998 C) 2009998 D) 2000008 E) 1999999

UMO - 2000

16. Her terimi 2001'den küçük ya da eşit olan, $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitif tamsayıları dizisi, her $i \geq 3$ için, $x_i = |x_{i-1} - x_{i-2}|$ koşulunu sağlıyorsa, n en çok kaç olabilir?

A) 1000 B) 2001 C) 3002 D) 4003 E) Hiçbiri

UMO - 2001

17. Bir aritmetik dizide ilk 2002 terimin toplamı 10, ilk 10 terimin toplamı da 2002 ise, bu dizinin ortak farkı kaçtır?

A) $\dfrac{-1}{546}$ B) $\dfrac{-1006}{5005}$ C) $\dfrac{-1}{1006}$ D) $\dfrac{-996}{5005}$ E) Hiçbiri

UİMO - 2002

18. $a_1, a_2, ..., a_{2003}$ tamsayıları, $|a_1| = 1$ ve $|a_{i+1}| = |a_i + 1|$ $(1 \leq i \leq 2002)$ koşullarını sağlıyorsa, $|a_1 + a_2 + \cdots + a_{2003}|$ en az kaç olabilir?

A) 4 B) 34 C) 56 D) 65 E) Hiçbiri

UMO - 2003

19. $a_1 = -1$, $a_2 = 2$ ve $n \geq 3$ için, $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ olduğuna göre, a_{2006} kaçtır?

A) -2 B) -1 C) $-1/2$ D) $1/2$ E) 2

UMO - 2006

20. $x_1 = 5$, $x_2 = 401$ ve her $3 \leq n \leq m$ için $x_n = x_{n-2} - \dfrac{1}{x_{n-1}}$ ise, m nin alabileceği en büyük değer nedir?

A) 406 B) 2005 C) 2006 D) 2007 E) Hiçbiri

UMO - 2007

21. $a_1 = \dfrac{1}{3}$ ve her $n > 1$ için $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+13a_n^2}}$ seklinde tanımlanan (a_n) dizisinin $a_k < \dfrac{1}{50}$ koşulunu sağlayan en büyük terimi a_k ise k kaçtır?

A) 194 B) 193 C) 192 D) 191 E) Hiçbiri

UMO - 2008

22. Bir (a_n) dizisi $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ ve her $n > 2$ için $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 7$ şeklinde tanımlanmaktadır. Buna göre a_{17} kaçtır?

A) 895 B) 900 C) 905 D) 910 E) Hiçbiri

UMO - 2008

23. Her n pozitif tamsayısı için, $a_n \neq 0$ ve $a_n a_{n+3} = a_{n+2} a_{n+5}$ koşullarını sağlayan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisinde

$$a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 = 6$$

ise, $a_1a_2 + a_3a_4 + \cdots + a_{41}a_{42} = ?$

A) 63 B) 21 C) 882 D) 42 E) Hiçbiri

UMO - 2009

24. Her $n \geq 2$ için, $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n^2-n-1}}{n}$ ise, $a_2 \cdot a_3 \cdots a_k > 3$ eşitsizliğinin sağlanması için k pozitif tamsayısının en az kaç olması gerekir?

A) 102 B) 100 C) 106 D) 104 E) Hiçbiri

UMO - 2009

4.13 Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatı Soruları (Diziler)

1. Bir dizinin ilk terimi 1'dir ve her $n \geq 2$ için ilk n teriminin çarpımı n^2dir. Dizinin altıncı ve onbirinci terimlerinin toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) $\dfrac{50}{27}$ D) $\dfrac{53}{20}$ E) $\dfrac{121}{36}$

Antalya M.O.- 1998

2. Bir geometrik dizinin m'inci terimi 27, n'inci terimi 8, p'inci terimi de 12 olduğuna göre m, n ve p aşağıdaki bağıntılardan hangisini sağlar?

A) $m - 2n = p$ B) $m + 2n = 3p$ C) $m + n = p$

D) $m + p = n$ E) $n + p = m$

Antalya M.O.- 1996

3. Aşağıdaki beş diziden kaç tanesinin limiti vardır?

I. $1, 1, 1, ..., 1, ...$

II. $0, 1, 0, \dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{3}, ..., 0, \dfrac{1}{n}, 0, \dfrac{1}{n+1}, ...$

III. $(0,2), (0,22), (0,222), (0,2222), ...$

IV. $\dfrac{\sin 1}{1}, \dfrac{\sin 2}{2}, \dfrac{\sin 3}{3}, ..., \dfrac{\sin n}{n}, ...$

V. $0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{-4}{5}, ..., \left((-1)^n + \dfrac{1}{n}\right), ...$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Antalya M.O.- 1996

4. Her üçü de sıfırdan farklı $x(y-z)$, $y(z-x)$, $z(x-y)$ sayıları bir geometrik dizi oluşturmaktadır. Dizi çarpanı q ise, q aşağıdaki denklemlerden hangisini sağlar?

A) $q^4 + q^2 - 1 = 0$ B) $q^4 - q^2 + 1 = 0$ C) $q^2 + q - 1 = 0$

D) $q^2 - q + 1 = 0$ E) $q^2 + q + 1 = 0$

Antalya M.O.- 1998

5. Reel sayıların bir geometrik dizisinde ilk iki terimin toplamı 7 ve ilk altı terimin toplamı da 91'dir. İlk dört terimin toplamı kaçtır?

A) 25 B) 28 C) 32 D) 35 E) 49

Antalya M.O.- 1999

6. Her n pozitif tamsayısı için n'nin en büyük asal çarpanını $A(n)$ ile gösterelim. $a_1 = 68$ ve her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n + A(a_n)$ ile tanımlanan (a_n) dizisinin 19'uncu terimi kaçtır?

A) 340 B) 371 C) 361 D)350 E)380

Antalya M.O.- 2000

7. $a_n = \dfrac{n^2}{(1,001)^n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisinin en büyük terimi kaçıncı terimdir?

A) 1001 B) 1999 C) 2000 D) 2001 E) 2002

Antalya M.O.- 2000

8. $a_0 = 1$ ve her $n \geq 1$ için $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n^2 \cdot a_{n-1} + 1}$ biçiminde tanımlanan (a_n), $n = 0, 1, 2, 3, ...$ dizisi için a_{11} nedir?

A) $\dfrac{1}{509}$ B) $\dfrac{1}{505}$ C) $\dfrac{1}{512}$ D) $\dfrac{1}{507}$ E) $\dfrac{1}{511}$

Antalya M.O.- 2001

9. $1, 2, \ldots, 999, 1000$ sayıları verilsin. Bu sayılardan azalan aritmetik dizi oluşturacak şekilde kaç tane sayı üçlüsü seçilebilir? (Örneğin, 3, 2, 1 ve 9, 6, 3 birer azalan aritmetik dizidir.)

A) 245500 B) $\frac{1}{3}\binom{500}{3}$ C) 247500 D) $\frac{1}{3!}\binom{1000}{3}$ E) 249500

Antalya M.O.- 2002

10. $a_1 = 1$ ve p bir asal sayı olmak üzere, her $n \geq 2$ için a_n dizisi $a_n = a_{n-1} + p^{n-1}$ şeklinde tanımlansın. $a_{2003} - a_{1998}$ sayısının bir tamkare olması için p kaç olmalıdır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 11

Antalya M.O.- 2003

11. $a_{11} = 0$ ve $a_{14} = 21$ olmak üzere, $A = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ reel sayı dizisi için, A^* dizisi;

$$A^* = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, ..., a_{n+1} - a_n, ...)$$

şeklinde tanımlanıyor. $(A^*)^*$ dizisinin tüm terimleri 1 'e eşitse, a_1 aşağıdakilerden hangisidir?

A) -5 B) -2 C) 0 D) 3 E) 7

Antalya M.O.- 2006

12. $a_1 = 1,\ a_2 = a_1 + (1 + 2),\ a_3 = a_2 + (1 + 2 + 3), ...,$ $a_n = a_{n-1} + (1 + 2 + \cdots + n), ...$ olmak üzere, $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{40}, a_{41}\}$ kümesini oluşturalım. A kümesinden, toplamları çift sayı olan iki eleman kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 410 B) 430 C) 470 D) 490 E) 510

Antalya M.O.- 2007

13. $a_1 = 1$ ve her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = \dfrac{1}{n}\left(1 + 2a_1 + 3a_2 + \cdots + (n+1)\,a_n\right)$ ile tanımlanan dizinin 2000'inci terimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3 \cdot 2^{1998}$ B) $3 \cdot 2^{1999}$ C) $3 \cdot 2^{1997}$ D) $3 \cdot 2^{2000}$ E) $3 \cdot 2^{2001}$

Antalya M.O.- 2000

14. $a_3 = 3$ ve her $n \geq 1$ için $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ bağıntısı ile tanımlanmış bir $a_{1,}a_2$,...,a_n,... dizisinin ilk 100 teriminin toplamı 100 ise, ilk 111 teriminin toplamı kaçtır?

A) 100 B) 111 C) 136 D) 194 E) 222

Antalya M.O.- 2000

15. 1'den 99'a kadar (1 ve 99 dahil) tüm tek sayıları alalım. Bu sayıların hepsinin toplamına A_1, tüm ikişerli çarpımlar toplamına A_2, tüm üçerli çarpımlar toplamına A_3, ... , tüm 49-arlı çarpımlar toplamına A_{49} ve hepsinin çarpımına A_{50} diyelim. (Örneğin, a, b, c, d sayıları için ikişerli çarpımlar toplamı $ab + ac + ad + bc + bd + cd$'dir.) Buna göre, $A_{50} - A_{49} + A_{48} - A_{47} + \ldots + A_2 - A_1$ toplamı neye eşittir?

A) $-50!$ B) $50!$ C) -1 D) 1 E) $-2^{49}.49!$

Antalya M.O.- 2002

16. $x_1 = 10\sqrt{5}$ olmak üzere, (x_n) dizisi

$$x_n\left(x_{n+1} - x_n\right) = 10$$

bağıntısı ile tanımlansın. x_{101} teriminin tamdeğeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

Antalya M.O.- 2008

KAYNAKLAR

1. Aliyev İ. , Özdemir M., Şıhaliyeva D., *Ulusal Antalya Matematik Oimpiyatları Sorular ve Çözümler*, TÜBİTAK Yayınları, 2007.
2. Alizade R., Ufuktepe Ü., *Sonlu Matematik*, TÜBİTAK Yayınları, 2006.
3. Andreescu, T.; Feng, Z., 101 *Problems in Algebra from the Training of the USA IMO Team*, Australian Mathematics Trust, 2001.
4. Andreescu, T.; Feng, Z*., 102 Combinatorial Problems from the Training of the USA IMO Team,* Birkhäuser, 2002.
5. Andreescu, T.; Feng, Z*., 103 Trigonometry Problems From The Training of the USA IMO Team*, Birkhäuser, 2005.
6. Andrescu T, Andrica D., Feng Z. ,*104 Number Theory Problems From The Training of the USA IMO Team*, Birkhäuser 2007.
7. Andrescu T., Enescu B., *Mathematical Olympiad Treasures,* ,Birkhäuser 2006.
8. Andrescu T, Feng Z., *Mathematical Olympiads, 1996-1997: Problems and Solutions from Around the World*, The Math. Association of America, 1998.
9. Andrescu T, Feng Z., *Mathematical Olympiads, 1997-1998: Problems and Solutions from Around the World*, The Math. Association of America, 1999.
10. Andrescu T, Feng Z., *Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from Around the World 1998-1999*, The Math. Association of America, 2000.
11. Andrescu T, Feng Z., George L., *Mathematical Olympiads, 1999-2000: Problems and Solutions from Around the World*, The Math. Association of America, 2002.
12. Andrescu T, Feng Z., George L., *Mathematical Olympiads, 2000-2001: Problems and Solutions from Around the World*, The Math. Association of America, 2003.
13. Arthur, E., *Problem-Solving Strategies*, 1999, Springer.
14. Balcı, M., Matematik Analiz, Cilt 1., Balcı Yayınları, 2008.
15. Bin X., Peng Yee L., *Mathematical Olympiad in China Problems and Solutions*, East China Normal University Press and World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.
16. Don R., *Number Theory, An Introduction*, Marcel Dekker, Newyork, 1996.
17. Dickson L. E., *First Course in the Theory of Equations,* J.Wiley & Sons, 1922.
18. Doob, M., *The Canadian Mathematical Olympiad 1969–1993*, University of Toronto Press, 1993.
19. Felda Darjo, (by Translated), *40 National Math. Olymp. in Slovenia,* Soc. of. Math., Phy. and Astr. of Slovenia, 1996.
20. Fomin, D.; Kirichenko, A., *Leningrad Mathematical Olympiads 1987–1991*, MathPro Press, 1994.

21. Fomin, D.; Genkin, S.; Itenberg, I., *Mathematical Circles*, American Mathematical Society, 1996.
22. Gerald L. A., Klosinski L., F., Larson L., C.,*The William Lowell Putnam Mathematical Competition Problems and Solutions: 1965-1984*, 1985, The Mathematical Association of America.
23. Gözükızıl Ö. F., Yaman M**.,** *Olasılık Problemleri*, Sakarya Kitabevi, 2005..
24. Greitzer S. L. , *Uluslararası Matematik Olimpiyatları 1959 - 1977*, Tübitak Yayınları, 1984.
25. Gürlü Ö., *Meraklısına Geometri*, Zambak Yayınları, 2005.
26. Honsberger R., *From Erdos to Kiev Problems of Olympiad Caliber*, The Mathematical Association of America, 1996.
27. Honsberger R., *In Polya's Footsteps, Miscellaneous Problems and Essays*, The Mathematical Association of America, 1997.
28. *Mathematical Diamonds*, Ross Honsberger, 2003, he Mathematical Association of America.
29. *Problems in Elemantary Maths.,* V. Lidsky, L. Ovsyannikov, A. Tulaikov, M. Sahbunin, MIR Pub. 1973.
30. Karakaş H. İ., Aliyev İ., *Sayılar teorisinde ilginç olimpiyat problemleri ve çözümleri,* TÜBİTAK Yayınları 1999.
31. Karakaş H. İ., Aliyev İ., *Analiz ve Cebirde ilginç olimpiyat problemleri ve çözümleri*, TÜBİTAK Yayınları 1999.
32. Kazarinoff, N. D., *Geometric Inequalities,* New Mathematical Library,Vol. 4, Random House, 1961.
33. Klamkin M, *USA Mathematical Olympiads 1972-1986 Problems and Solutions*, Mathematical Association of America, 1989.
34. Klamkin, M., *International Mathematical Olympiads, 1978–1985*, NewMathematical Library, Vol. 31, Mathematical Association of America, 1986.
35. Kızılırmak A., Akbulut F., *Cevdet Bilsay'dan Bir Demet*, Ege Ün. Yay., Bornova, 1975.
36. Kuczma, M., *144 Problems of the Austrian–Polish Mathematics Competition 1978–1993*, The Academic Distribution Center, 1994.
37. Larson, L. C., *Problem-Solving Through Problems*, Springer - Verlag, 1992.
38. Lidsky V., Ovsyannikov L., Tulaikov A., and Shabunin M., *Problems in Elementary Mathematics*, Mir, Moscow: 1973
39. Nesin A., *Matematiğe Giriş III, Sayma*, Nesin Yayıncılık, 2009.
40. Nesin A., *Matematiğe Giriş 1, Sezgisel Kümeler Kuramı*, Nesin Yayıncılık, 2008.
41. Salkind, C. T., *The Contest Problem Book*, Random Hause, 1961.
42. Shanks D., *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, 1978, Chelsea Pub. Company, New York.
43. Shklarsky D.O., Chentzov N. N., Yaglom I. M., *The USSR Olympiad Problem Book*, Dover Pub. 1994.

44. Yücesan R., *Meraklısına Matematik*, Zambak Yayınları, 2005.
45. Terzioğlu N., İçen, O., Saban, G., Şahinci, H., *Analiz Problemleri*, Şirketi Mürettibiye Basımevi, 1962.
46. Töngemen M., *Tübitak Ulusal Matematik Olimpiyat Soru ve Çözümleri 1993-2006*, Altın Nokta Yayınları, 2006.
47. *Liselerarası Mat. Yarışması Soruları ve Çözümleri,* 1969-1983, Tübitak Yayınları, 1983.
48. Türk Matematik Derneği, *Matematik Dünyası Dergileri,* 2000 - 2008.
49. Özdeğer, A., Özdeğer, N., *Çözümlü Analiz Problemleri Cilt 1*, Kuşak Ofset, 1995.
50. Öztunç, M. K., *Trigonometri Problemleri*, İrem Yayınevi, 1965.

WEB KAYNAKLARI

1. The art of problem solving, http://www.artofproblemsolving.com.
2. Estonian Math Competitions, http://www.math.olympiaadid.ut.ee/eng/html/index.php
3. Mathematical Excalibur Journal, http://www.math.ust.hk/excalibur/.
4. Crux Mathematicorum with Math. Mayhem, Canadian Math. Society, http://journals.cms.math.ca/CRUX/.
5. Bulgarian Competitions in Mathematics and Informatics, http://www.math.bas.bg/bcmi/index.html.
6. Problems from Olympiads, http://www.imomath.com/index.php?options=oth|other&p=0.
7. Wisconsin Math. Enginering and Science Talent Saerch Problem Page http://www.math.wisc.edu/~talent/problems.html.
8. Canadian Math. Olympiads, http://www.math.ca/Competitions/CMO/
9. Kalva Math.Problems , John Scholes, http://www.kalva.demon.co.uk/.
10. William Lowell Putnam Mathematics Competition Problems, http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml.
11. AMC USAMO/MOSP/IMO & Others Problems, http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/problemUSAMO-IMOarchive.shtml.
12. Problems in Elemantary Number Theory, http://www.problem-solving.be/pen/.
13. Lecture Notes of Dr.David A. Santos, http://faculty.ccp.edu/faculty/dsantos/.
14. The Harvard MIT Mathematic Tournament, http://web.mit.edu/hmmt/www/.