AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

BİTİRME ÖDEVİ
FİNAL SORULARININ ÇÖZÜMLERİ

ADI SOYADI : ....

NO : ....

A	A	A	A	A	A	A

SINAV TARİHİ VE SAATİ :

Bu sınav 50 sorudan oluşmaktadır ve sınav süresi 100 dakikadır.

SINAVLA İLGİLİ UYULACAK KURALLAR

1. Cevap kağıdınıza soru kitapçığınızın türünü işaretlemeyi unutmayınız.

2. Her soru eşit değerde olup, puanlama yapılırken doğru cevaplarınızın sayısından yanlış cevaplarınızın sayısının dörtte biri düşülecektir.

3. Sınavda pergel, cetvel, hesap makinesi gibi yardımcı araçlar ve müsvedde kağıdı kullanılması yasaktır. Tüm işlemlerinizi soru kitapçığı üzerinde yapınız.

4. Sınav süresince görevlilerle konuşulmayacak ve onlara soru sorulmayacaktır. Yanlış olduğunu düşündüğünüz sorularla ilgili, görevlilere soru sormayınız. Bu çok küçük bir olasılık olsa da, jüri bu tür durumları daha sonra değerlendirecektir.

5. Öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.

6. Dışarıya çıkan bir aday tekrar sınava alınmayacaktır.

7. Cep telefonuyla sınava girmek yasaktır.

Bu kitapçıktaki sorular, Doç.Dr. Mustafa Özdemir Editörlüğünde, Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri Tarafından Hazırlanmıştır. (Soru Dağılımı : Soyut Matematik 4, Analitik Geometri 10, Lineer Cebir 10, Soyut Cebir 5, Olasılık 6, Analiz 10, Diferansiyel Denklemler 5.)

1. Aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

1. Yansıyan, Simetrik ve Geçişken bağıntıya denklik bağıntısı denir.

2. X kümesinde tanımlanan β denklik bağıntısında, $[x]=\{y\in X:(x,y)\in\beta\}$ kümesine x'in denklik sınıfı denir.

3. $X=\{a,b,c\}$ kümesinde ki $\beta=\{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$ bağıntısına göre, üç denklik sınıfı vardır.

4. Yansıyan, Ters Simetrik ve Geçişken bağıntıya sıralama bağıntısı denir.

5. $\mathbb{Z}$ kümesinde tanımlanan $\beta=\{(x,y):x^2+x=y\}$ bir denklik bağıntısıdır.

6. $\mathbb{Z}$ kümesinde tanımlanan $\beta=\{(x,y):x^2+x=y^2+y\}$ denklik bağıntısına göre, $[1]=\{1,-1\}$'dir.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm : I, II ve IV doğrudur.

Denklik bağıntısı : Yansıyan, Simetrik ve Geçişken bağıntıdır.

Denklik Sınıfı : X kümesinde tanımlanan β denklik bağıntısında, $[x]=\{y\in X:(x,y)\in\beta\}$ kümesine x'in denklik sınıfı denir.

Sıralama Bağıntısı : Yansıyan, Ters Simetrik ve Geçişken bağıntıdır.

Şimdi, III, V ve VI'yı kontrol edelim.

III. Yanlıştır. Çünkü,

$[a]=\{y\in X:(a,y)\in\beta\}=\{a\}$

$[b]=\{y\in X:(b,y)\in\beta\}=\{b,c\}$

$[c]=\{y\in X:(c,y)\in\beta\}=\{b,c\}$

olduğundan, $[a]$ ve $[b]=[c]$ olmak üzere iki denklik sınıfı vardır.

V. Yanlıştır. Çünkü, $(1,1)\notin\beta$ olduğundan, yansıyan değildir.

VI. Yanlıştır. Çünkü, $[1]=\{y\in\mathbb{Z}:(1,y)\in\beta\}=\{y\in\mathbb{Z}:2=y^2+y\}=\{1,-2\}$ bulunur.

---

2. Aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi yanlıştır?

I- Herhangi iki rasyonel sayının arasında en az bir reel sayı vardır.

II- İki irrasyonel sayının toplamı rasyonel olamaz.

III- Rasyonel sayılar kümesi sayılamazdır.

IV- İrrasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalı değildir.

V- İrrasyonel sayılar kümesi sayılabilirdir.

VI- Rasyonel sayı ile irrasyonel sayının toplamı rasyonel olamaz.

VII- İrrasyonel sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

A) 1 B)2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm : I. DOĞRU : Herhangi iki rasyonel sayı arasında bir reel sayı daima bulunabilir.

II. YANLIŞ. $a = \sqrt{2} + 1$ ve $b = 3 - \sqrt{2}$ iki irrasyonel sayıdı, fakat toplamları $a + b = 4 \in \mathbb{Q}$ olduğu görülebilir.

III. YANLIŞ. Rasyonel sayılar kümesi sayılabilirdir.

IV. DOĞRU. II'de verdiğimiz örnek, kapalı olmadığını gösterir.

V. YANLIŞ. İrrasyonel sayılar kümesi sayılamaz.

VI. DOĞRU. Bir rasyonel sayı ile bir irrasyonel sayının toplamı rasyonel olamaz.

VII. YANLIŞ. $\sqrt{2}, \sqrt{2}$ irrasyonel sayılarının çarpımı 2'dir ve irrasyonel değildir.

---

3. Aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

I. $\mathbf{2^{19} \equiv 1 \pmod{20}}$ **II.** $\mathbf{2^{18} \equiv 1 \pmod{19}}$

III. $\mathbf{2^{10} \equiv 1 \pmod{11}}$ **IV.** $\mathbf{3^{20} \equiv 1 \pmod{50}}$

A) 0 **B) 1** **C) 2** **D) 3** **E) 4**

Çözüm : Fermat Teoremi : p asal sayısı için, $a^p \equiv a \pmod{p}$ sağlanır. Buna göre, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$'dir.

Euler Teoremi : $\varphi(n)$, Euler fonksiyonu olmak üzere (n'den küçük ve n ile aralarında asal sayıların sayısını veren fonksiyon), $(a, n) = 1$ ise $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$'dir.

Buna göre, II, III ve IV'ün doğruluğu hemen görülür.

$2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$, $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ (Fermat Teoreminden)

$3^{20} \equiv 1 \pmod{50}$, (Euler Teoreminden) $\varphi(50) = \varphi(2 \cdot 5^2) = (2 - 1)(5^2 - 5) = 20$

I. yanlıştır. Euler ya da Fermat teoremi burada kullanılamaz. Buna göre,

$$2^{19} \equiv 0 \pmod{4} \text{ ve } 2^{19} \equiv \left(2^4\right)^4 2^3 \equiv 8 \equiv 3 \pmod{5}$$

olduğundan, $2^{19} \equiv 8 \pmod{20}$ elde edilir.

---

4. Aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

I. $\boldsymbol{p}$ **bir asal sayı olmak üzere,** $\boldsymbol{a^p \equiv a \pmod{p}}$**'dir.**

2. 8 tabanındaki bir sayının rakamları toplamı 7'nin katı ise bu sayı 7'ye bölünür.

3. $\boldsymbol{n \in \mathbb{Z}^+}$ **için** $\boldsymbol{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n}$ **eşitliği daima doğrudur.**

4. $\boldsymbol{3x \equiv 9 \pmod{12} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{12}}$ **'dir.**

5. $\boldsymbol{n}$ **pozitif tamsayısından küçük olan ve** $\boldsymbol{n}$ **ile aralarında asal olan tamsayıların sayısını veren fonksiyona Euler fonksiyonu** $\boldsymbol{\varphi(n)}$ **denir.**

6. $\boldsymbol{n}$ **pozitif tamsayısının asal çarpanlarına ayrılışı** $\boldsymbol{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}}$ **ise** $\boldsymbol{\varphi(n) = \left(p_1^{r_1} - p_1^{r_1 - 1}\right)\left(p_2^{r_2} - p_2^{r_2 - 1}\right) \cdots \left(p_k^{r_k} - p_k^{r_k - 1}\right)}$ **ile bulunur.**

7. 3'den büyük her asal sayıyı $\boldsymbol{6n + 1}$ **veya** $\boldsymbol{6n - 1}$ **formunda yazabiliriz.**

A) 0 **B) 1** **C) 2** **D) 3** **E) 4**

Çözüm : I. DOĞRU. Fermat Teoreminin ifadesidir ve doğrudur.

II. DOĞRU. $(a_n...a_1a_0)_8 = a_0+8a_1+8^2a_2+\cdots+8^na_n \equiv a_0+a_1+\cdots+a_n \pmod 7$ olduğundan doğrudur

III. DOĞRU. Binom açılımından $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$ olduğu kolayca görülür.

IV. YANLIŞ. Doğrusu, $3x \equiv 9 \pmod{12} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod 4$ olmalıydı.

V. DOĞRU. Euler Fonksiyonunun Tanımı verilmiş.

VI. DOĞRU. Euler Fonksiyonunun hesaplanması.

VII. DOĞRU. $p = 6n + k$ ifadesi 3'den büyük bir asal sayı olsun. k, $2, 3, 4, 6$ olursa p asal olmaz. O halde, $p > 3$ asal sayısı, $6n + 1$ veya $6n + 5 \equiv 6n - 1$ formlarında olabilir. (Tersi doğru değildir, yani $6n \pm 1$ formundaki bir sayı asal olmayabilir).

---

5. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

I) Bir fonksiyon da vektöre örnek olabilir.

II) Bir vektör uzayında taban her zaman vardır ve sonludur.

III) Sıfır uzayının tabanı $\{0\}$ kümesidir.

IV) Bir matrisin determinantının sıfırdan farklı olması ile bir lineer dönüşüm temsil etmesi denktir.

V) İç çarpımlı bir vektör uzayında ortonormal bir taban daima vardır.

A) I-III **B) I-V** **C) II-III-IV** **D) I-II-IV** **E) Hepsi**

Çözüm : I. DOĞRU. Örneğin, en basit olarak $V = \{f(x) = ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ kümesi, fonksiyonların toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir Vektör uzayıdır. Bu kümenin her bir elemanı da bir vektördür.

II. YANLIŞ. Örneğin, 1. mertebeden türevlenebilir fonksiyonların kümesini ele alalım. Bu küme vektör uzayıdır ama tabanı yoktur.

III. YANLIŞ. Sıfır uzayının tabanı yoktur.

IV. YANLIŞ. Bir lineer dönüşümü temsil eden bir matrisin determinantı sıfırdan farklı olmak zorunda değildir. Hatta, determinantı tanımlanamayan $m \times n$ türünden bir matris bile olabilir.

V. DOĞRU. İç Çarpımları sıfır olan vektörler seçilerek daima ortonormal bir taban oluşturulabilir.

---

6. $\boldsymbol{T}$ bir lineer dönüşüm olmak üzere, $\boldsymbol{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{3,2,4})$, $\boldsymbol{T}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = (\mathbf{3,2,0})$ ve $\boldsymbol{T}(\mathbf{u}-\mathbf{w}) = (\mathbf{0,1,2})$ ise, $\|\boldsymbol{T}(\mathbf{u})\|$ kaçtır?

A) $2\sqrt{3}$ **B) $\sqrt{13}$** **C) $2\sqrt{5}$** **D) $3\sqrt{2}$** **E) $\sqrt{10}$**

Çözüm : Lineerlikten,

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}) + T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) + T(\mathbf{u}-\mathbf{w}) = T(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}+\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{u}-\mathbf{w}) = T(\mathbf{3u}) = 3T(\mathbf{u})$$

olduğundan, $T(\mathbf{u}) = \dfrac{1}{3}((3,2,4)+(3,2,0)+(0,2,2)) = (2,2,2)$ elde edilir. O halde, $\|T(\mathbf{u})\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ olur.

---

7. $\boldsymbol{T}$ **bir lineer dönüşüm olmak üzere,** $\boldsymbol{T(1,2,3)=(3,2,1)}$, $\boldsymbol{T(1,3,4)=(3,1,4)}$ **ise,** $\boldsymbol{\|T(1,0,1)\|=?}$

A) $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$ **B)** $\boldsymbol{\sqrt{13}}$ **C)** $\boldsymbol{2\sqrt{5}}$ **D)** $\boldsymbol{3\sqrt{2}}$ **E)** $\boldsymbol{\sqrt{10}}$

Çözüm : $T(a\mathbf{x}+b\mathbf{y})=aT(\mathbf{x})+bT(\mathbf{y})$ olduğundan,

$$\begin{aligned}(1,0,1) &= 3(1,2,3)-2(1,3,4)\\ T(1,0,1) &= 3T(1,2,3)-2T(1,3,4)\\ &= 3(3,2,1)-2(3,1,4)=(3,4,-5)\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $\|T(1,0,1)\|=\sqrt{9+16+25}=5\sqrt{2}$ olur.

---

8. $\boldsymbol{A=[a_{ij}]_{2\times 2}}$ **matrisinin karakteristik polinomu** $\boldsymbol{P(x)=x^2+x+1}$ **olmak üzere,** $\boldsymbol{f(x)=x^4+3x^2+x+3}$ **ise,** $\boldsymbol{f(A)}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\boldsymbol{A}$ **B)** $\boldsymbol{2A}$ **C)** $\boldsymbol{-A}$ **D)** $\boldsymbol{-A+I}$ **E)** $\boldsymbol{A-I}$

Çözüm : Cayley - Hamilton teoremine göre, her matris kendi karakteristik polinomunun bir köküdür. Yani, $P(A)=A^2+A+I=0$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}f(A) &= A^4+3A^2+A+3I\\ &= A^4+2A^2+2I+\left(A^2+A+I\right)\\ &= (-A-I)^2+2(-A-I)+2I\\ &= A^2+2A+I-2A-2I+2I\\ &= A^2+I=-A-I+I=-A\end{aligned}$$

bulunur.

---

9. Tersinir $\boldsymbol{A}$ **matrisinin karakteristik polinomu** $\boldsymbol{P(x)=x^2-3x-1}$ **olduğuna göre,** $\boldsymbol{A^{-1}}$ **matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\boldsymbol{3I-A}$ **B)** $\boldsymbol{3A-I}$ **C)** $\boldsymbol{A-3I}$ **D)** $\boldsymbol{-A+I}$ **E)** $\boldsymbol{A-I}$

Çözüm : Cayley - Hamilton teoremine göre, her matris kendi karakteristik polinomunu sağlar. Yani, $P(A)=A^2-3A-I=0$ olur. Buna göre, $I=A^2-3A$ yazılabilir. Bu eşitliği, A^{-1} ile çarparsak, $A^{-1}=A-3I$ elde edilir.

---

10. $\boldsymbol{A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\-2&-2&-2\end{bmatrix}}$ **matrisi için** $\boldsymbol{e^A}$ **exponensiyel matrisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\boldsymbol{3I-A}$ **B)** $\boldsymbol{A+I}$ **C)** $\boldsymbol{A+2I}$ **D)** $\boldsymbol{-A+I}$ **E)** $\boldsymbol{A-I}$

Çözüm : $A^2=0$ olduğu kolayca görülebilir. Buna göre,

$$e^A=I+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots=I+\frac{A}{1!}=I+\frac{A}{1!}=A+I$$

elde edilir.

---

11. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$ **olmak üzere,** $\boldsymbol{\det\left(I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{100}\right)}$ **determinantı kaçtır?**

A) 100 **B) 0** **C) 101** **D) 1** **E) 99**

Çözüm : $A^2 = A$ olduğu kolayca görülebilir. (Idempotent matris)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Buna göre, $n \geq 1$ için, $A^n = A$ olacağından,

$$\begin{aligned} \det\left(I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{100}\right) &= \det(I + 100A) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 100\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} 101 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 101 \end{aligned}$$

elde edilir.

---

12. Aşağıdakilerden kaç tanesi $\mathbb{R}^3$ **ün bir altuzayıdır.**

I. $\boldsymbol{A = \{(x, y, z) : y = 0\}}$
II. $\boldsymbol{B = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}}$
III. $\boldsymbol{C = \{(x, y, z) : 2x + y + z = 0\}}$
IV. $\boldsymbol{D = \{(x, y, z) : x + y \leq 0\}}$
V. $\boldsymbol{E = \{(x, y, z) : y = x^2 + z\}}$
VI. $\boldsymbol{F = \{(x, y, z) : x + y + z > 0\}}$

A) 1 **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 5**

Çözüm : $\mathbb{V}$'nin $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayı olması için, her $u, v \in \mathbb{V}$ ve $c \in \mathbb{R}$ için, $au + v \in \mathbb{V}$ olması gerekir. Ayrıca, $\mathbb{R}^3$ ün toplamaya göre birimi olan $(0, 0, 0) \in \mathbb{V}$ olmalıdır. Buna göre, $(0, 0, 0) \notin B, F$ olduğundan, B ve F kümesi alt vektör uzayı değillerdir.

E kümesinin de altvektör uzayı olmadığı kolayca görülebilir. $(1, 2, 1) \in E$ iken $2(1, 2, 1) = (2, 4, 2)$ elemanı E kümesinin elemanı değildir. Çünkü, $4 \neq 2^2 + 2$ olduğundan, $y = x^2 + z$ koşulunu sağlamaz.

D kümesinin altvektör uzayı olmadığını görelim. $\vec{u} = (-1, -2, 1) \in D$ ve $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$ için, $\lambda\vec{u} = (1, 2, -1) \notin D$'dir. Çünkü, $x + y = 3 \nleq 0$'dır.

A ve C birer altvektör uzayıdır. Gerçekten,

I. $(x_1, 0, z_1), (x_2, 0, z_2) \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise, $(x_1, 0, z_1) + \lambda(x_2, 0, z_2) \in A$'dır.

III. $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in C$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise, $2x_1 + y_1 + z_1 = 0$ ve $2x_2 + y_2 + z_2 = 0$ olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2) &= (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \\ 2(x_1 + \lambda x_2) + (y_1 + \lambda y_2) + (z_1 + \lambda z_2) &= 2x_1 + y_1 + z_1 + \lambda(2x_2 + y_2 + z_2) = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Yani, $(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2) \in C$'dir.

---

13. $\boldsymbol{P_2(\mathbb{Z}_3)}$**, katsayıları** $\mathbb{Z}_3$ **cismine ait olan ikinci dereceden polinomların uzayını göstermek üzere,** $\boldsymbol{P_2(\mathbb{Z}_3)}$ **kümesinde verilen** $f_1 = \boldsymbol{x^2 + x}$**,** $\boldsymbol{f_2 = x^2 + 2x + 1}$**,** $\boldsymbol{f_3 = x + 1}$ **ve** $\boldsymbol{f_4 = x^2 + 2}$ **vektörlerinin gerdiği uzayın boyutu kaçtır?**

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** ∞

Çözüm : Katsayıların $\mathbb{Z}_3$ kümesinde olması gerektiği de göz önünde bulundurularak

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_2 \to S_2 - S_1 \\ S_4 \to S_4 - S_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_3 \to S_3 - S_2 \\ S_4 \to S_4 - 2S_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Boyut$(Sp\{f_1, f_2, f_3, f_4\})$ =Boyut$(Sp\{f_1, f_2\}) = 2$ bulunur.

---

14. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$**'in özvektörlerinden biri** $\boldsymbol{(4, -5, 2, 3)}$ **ise aşağıdakilerden hangisi özdeğer olur?**

A) 2 **B) −1** **C) 2** **D) 1** **E) 0**

Çözüm : $Ax = \lambda x$ eşitliğinde, λ değerine özdeğer, x vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen özvektör denir. Buna göre, $x = (4, -5, 2, 3)$ ise

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

yani, $Ax = -x$ olduğundan, $\lambda = -1$ özdeğerdir.

---

15. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

I) Yalnızca homojen denklem sistemin çözüm kümesi için bir taban bulunabilir.

II) Bir lineer dönüşümün temsil matrisi tabana göre değişebilir.

III) Determinant bir doğrusal dönüşüm değildir.

IV) Bir vektör uzayında taban tektir.

V) Kompleks sayılar uzayının boyutu her koşulda 2'dir.

A) II-III-V **B) II-III-IV** **C) II** **D) I-II-III** **E) Hepsi**

Çözüm : I. DOĞRU. Homojen denklem sisteminin çözümü bir altuzaydır ve bir taban bulunabilir.

II. DOĞRU. Lineer dönüşümün temsil matrisi tabana göre değişir.

III. DOĞRU. Determinant fonksiyonu lineer değildir. Genel olarak, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ olduğunu hatırlayınız.

IV. YANLIŞ. Bir vektör uzayında taban tek değildir.

V. YANLIŞ. Kompleks sayılar uzayının boyutu $\mathbb{R}$ cismine göre 2'dir, fakat $\mathbb{C}$ cismine göre ise 1'dir.

16. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur.

i. $\mathbb{Z}$ **kümesi,** $\mathbb{Q}$**'nun bir idealidir.**

ii. $\mathbb{Z}$ **bir cisimdir.**

iii. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **bir tamlık bölgesidir.**

A) Yalnız I **B) I ve II** **C) I, II, III** **D) Yalnız III** **E) hiçbiri**

Çözüm : İdeal : H bir halka ve $I \subseteq H$ althalkası olsun. Eğer, $r \in H$ ve $x \in I$ için, $rx \in I$ ise I'ya H'nin sol ideali, $xr \in I$ ise, I'ya H'nin sağ ideali denir. Eğer, I, H'nin hem sağ hem de sol ideali ise I'ya H'nin bir ideali denir. Buna göre,

I. YANLIŞ. Çünkü, $2 \in \mathbb{Z}$ ve $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ için, $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$'dir.

II. YANLIŞ. $\mathbb{Z}$ kümesinde sıfırdan farklı her elemanın tersi olmadığından cisim değildir.

III. YANLIŞ. $(1,0), (0,1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için, $(0,1)(1,0) = (0,0) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olduğundan, $(1,0)$ bir sıfır bölendir. Sıfır bölen olduğundan, tamlık bölgesi olamaz.

---

17. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur.

I. $\mathbb{Z}_6[x]$ **bir tamlık bölgesidir.**

II. $2\mathbb{Z}$ **ve** $3\mathbb{Z}$ **izomorf halkalardır.**

III. $\mathbb{Z}[i]$ **nin kesirler cismi** $\mathbb{C}$ **dir.**

A) Yalnız I **B) I ve II** **C) I,II,III** **D) Yalnız III** **E) Hiçbiri**

Çözüm : I. YANLIŞ. $\mathbb{Z}_6[x]$**,** katsayıları $\mathbb{Z}_6$'nın elemanı olan polinom halkasını ifade eder. $3 \in \mathbb{Z}_6[x]$ bir sıfır bölendir. $2 \cdot 3 = 0$ olduğu açıktır. $\mathbb{Z}_6$ yerine bir cisim alınsaydı, tamlık bölgesi olurdu.

II. YANLIŞ. $f : 2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle \to 3\mathbb{Z} = \langle 3 \rangle$ izomorfizm olacak şekilde bir halka homomorfizmi bulamayız. Üreteç, üretece gitmelidir. Buna göre, $f(2) = 3$ olmalıdır. Fakat, $f(2+2) = f(2) + f(2) = 2f(2) = 6$, yani $f(4) = 6$'dır. Diğer yandan, $f(2 \cdot 2) = f(2) f(2) \Rightarrow f(4) = 9$ 'dür. Yani, çelişk oluşur.

III. YANLIŞ. Bir T halkasını veya tamlık bölgesini kapsayan en küçük $\mathcal{F}$ cismine, T'nin kesirler cismi denir. Buna göre, $\mathbb{Z}[i]$ halkasını kapsayan en küçük cisim, $\mathbb{Q}[i]$ olduğundan yanlıştır.

---

18. $\mathbb{Z}^*_{720}$ **aşağıdakilerden hangisine izomorftur.**

A) $\mathbb{Z}_{192}$ **B)** $\mathbb{Z}^*_{192}$ **C)** $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ **D)** $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_4$ **E)** $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$

Çözüm : $720 = 2^4 3^2 5$ olduğundan, $\mathbb{Z}^*_{720} \cong \mathbb{Z}^*_{2^4} \oplus \mathbb{Z}^*_{3^2} \oplus \mathbb{Z}^*_5$ yazılabilir. Diğer yandan, $\mathbb{Z}^*_{2^r} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^{r-2}}$ ve p tek asal sayıları için $\mathbb{Z}^*_{p^r} \cong \mathbb{Z}_{(p-1)p^{r-1}}$ olduğundan,

$$\mathbb{Z}^*_{2^4} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \text{ ve } \mathbb{Z}^*_{3^2} \cong \mathbb{Z}_{(3-1)3^{2-1}} = \mathbb{Z}_6$$

olacaktır. Ayrıca, $\mathbb{Z}^*_5 \cong \mathbb{Z}_4$ olduğundan, $\mathbb{Z}^*_{720} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_4$ elde edilir. Yanıt D.

---

19. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur.

I. Her cisim bir tamlık bölgesidir.

II. $\mathbb{Q}$ nun sadece iki tane ideali vardır.

III. Eğer $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ cisimler ve $f : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ bir homomorfizm , $f \neq 0$ ise, f, 1-1dir.

A) Yalnız I **B) I ve II** **C) I,II,III** **D) Yalnız II** **E) Hiçbiri**

Çözüm : I. DOĞRU. Her cisim, sıfır bölensiz bir halka olduğundan tamlık bölgesidir. O halde I. doğrudur.

II. DOĞRU. $\mathbb{Q}$ sayılar kümesi cisimdir ve birim ve kendinden başka ideali yoktur. (Not : Her cismin kendinden ve birimden başka ideali yoktur.)

III. DOĞRU. f sıfırdan farklı ve Çek$f$ kümesi K'nın ideali olacağından, Çek$f \neq K$ olmalıdır. K cisim olduğuna göre, Çek$f = \{0\}$ olur. Bu ise, f 'nin 1-1 olduğunu gösterir.

---

20. Aşağıdaki kümelerden hangisi bir cisim değildir?

A) $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{ax + b : a, b \in \mathbb{Z}_2,\ x^2 = x + 1}\}$ **B)** $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{ax + b : a, b \in \mathbb{Z}_3,\ x^2 = 2}\}$
C) $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{ax + b : a, b \in \mathbb{Z}_3,\ x^2 = x + 2}\}$ **D)** $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{ax + b : a, b \in \mathbb{Z}_5,\ x^2 = 2}\}$
E) $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{ax^2 + bx + c : a, b \in \mathbb{Z}_2\ ,\ x^3 = x + 1}\}$

Çözüm : $\mathcal{F}$ bir cisim olmak üzere, katsayıları $\mathcal{F}$ cisminin elemanları olan $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ indirgenemez polinomunun, $\mathcal{F}$ cisminde bir kökü yoksa, bir polinomun, $P(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen kalanların oluşturduğu bir küme cisimdir. Buna göre,

I. $P(x) = x^2 - x - 1 \equiv x^2 + x + 1$ 'nin $\mathcal{F}$=$\mathbb{Z}_2$ de bir kökü olmadığından ($P(0) = 1$, $P(1) = 1$) $\mathcal{A}$ kümesi bir cisimdir.

II. $P(x) = x^2 - 2 \equiv x^2 + 1$ 'nin $\mathcal{F}$=$\mathbb{Z}_3$ de bir kökü olmadığından ($P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 2$) $\mathcal{B}$ kümesi bir cisimdir.

III. $P(x) = x^2 - x - 2 \equiv x^2 + 2x + 1$ 'nin $\mathcal{F}$=$\mathbb{Z}_3$ de kökü olduğundan $\mathcal{C}$ kümesi cisim değildir. $P(2) = 0$ olduğu açıktır.

IV. $P(x) = x^2 - 2 \equiv x^2 + 3$ 'nin $\mathcal{F}$=$\mathbb{Z}_5$ de bir kökü olmadığından ($P(0) = 3$, $P(1) = 4$, $P(2) = 2$, $P(3) = 2$, $P(4) = 4$) $\mathcal{D}$ kümesi bir cisimdir.

V. $P(x) = x^3 - x - 1 \equiv x^3 + x + 1$ 'nin $\mathcal{F}$=$\mathbb{Z}_2$ de bir kökü olmadığından ($P(0) = 1$, $P(1) = 1$) $\mathcal{E}$ kümesi bir cisimdir.

---

21. Bir torbada üzerinde $\boldsymbol{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}$ yazılan 7 top vardır. Torbadan, çekilen top her defasında yine torbaya konulmak koşuluyla 98 kez top çekiliyor. 5'in standart sapması kaçtır?

A) $\boldsymbol{3\sqrt{2}}$ **B)** $\boldsymbol{\sqrt{6}}$ **C)** $\boldsymbol{\sqrt{7}}$ **D)** $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ **E)** $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

Çözüm : Torbadan 5 çekme olasılığı $p = \frac{1}{7}$'dir. Buna göre, $q = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ ve $n = 98$ olduğundan,

$$S.S. = \sigma = \sqrt{p \cdot q \cdot n} = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot 98} = 2\sqrt{3}$$

elde edilir.

---

22. X rastgele değişkeninin standart sapması $\sigma(X) = 3$, beklenen değeri de $E(X) = 4$ olduğuna göre, $E\left(2X^2+3\right)$ kaçtır?

A) 40 **B) 38** **C) 37** **D) 41** **E) 53**

Çözüm : $Var(X) = \sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ eşitliğini kullanacağız. Buna göre,

$$9 = E\left(X^2\right) - 16 \Rightarrow E\left(X^2\right) = 25$$

bulunur. O halde, $E(2X^2+3) = 2E(X^2) + 3 = 2 \cdot 25 + 3 = 53$ elde edilir.

---

23. Bir X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M(t) = 3e^{-2t} + 4e^{3t}$ olduğuna göre, X'in varyansı kaçtır?

A) 10 **B) 13** **C) 12** **D) 14** **E) 8**

Çözüm : $E(X^n) = \dfrac{d^n M}{dt^n}(0)$ ve $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ eşitliklerini kullanacağız. Buna göre,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{dM}{dt}(0) = \frac{d\left(3e^{-2t} + 4e^{3t}\right)}{dt}(0) = \left(-6e^{-2t} + 12e^{3t}\right)(0) = 6, \\ E\left(X^2\right) &= \frac{d^2 M}{dt^2}(0) = \frac{d\left(-6e^{-2t} + 12e^{3t}\right)}{dt}(0) = \left(12e^{-2t} + 36e^{3t}\right)(0) = 48 \end{aligned}$$

olduğundan, $\text{Var}(X) = 48 - 6^2 = 12$ bulunur.

---

24. Bir kesikli X rastgele değişkeninin 1,2,3 değerlerini alma olasılıkları sırasıyla $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$'dir. Buna göre, X'in standart sapması kaçtır?

A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ **B)** $\dfrac{\sqrt{11}}{5}$ **C)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{13}}{5}$ **E)** $\dfrac{\sqrt{14}}{5}$

Çözüm : $Var(X) = \sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ eşitliğini kullanacağız.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{5} \quad \text{ve} \quad E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{2}{5} + 2^2 \cdot \frac{2}{5} + 3^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{19}{5}$$

olduğundan, $\sigma^2(X) = \dfrac{19}{5} - \left(\dfrac{9}{5}\right)^2 = \dfrac{14}{25} \Rightarrow \sigma(X) = \dfrac{\sqrt{14}}{5}$ elde edilir.

---

25. x üstel rastgele değişkeni için $f(x) = e^{-x^3}$; $x \geq 0$ ise x rastgele değişkeninin ikinci momenti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{5}$ **B)** $\dfrac{2}{5}$ **C)** $\dfrac{1}{3}$ **D)** $\dfrac{2}{3}$ **E)** $\dfrac{4}{5}$

Çözüm : İkinci Moment $= E(x^2)$ isteniyor. Buna göre, rastgele değişken sürekli fonksiyon olduğundan,

$$\text{İkinci Moment} = E\left(x^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{3}$$

olur.

26. Bir otomobil sürücüsünün yarışı kazanma olasılığı $0,7$ ve kazanamama olasılığı $0,3$ olduğuna göre bu yarışmacı için varyansı hesaplayınız.

A) $0,2$ B) $0,21$ C) $0,22$ D) $0,23$ E) $0,24$

Çözüm : X rastgele değişkeni sürücü yarışı kazandığı zaman 1, kaybettiği zaman 0 değerini alır. Buna göre,

$$P(X) = \begin{cases} 0,7 & ; X = 1 \text{ ise} \\ 0,3 & ; X = 0 \text{ ise} \\ 0 & ; \text{ diğer dr.} \end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz. O halde,

$$E(X) = \sum_x X \cdot P(X) = 0 \cdot (0,3) + 1 \cdot (0,7) = 0,7$$

$$E(X^2) = \sum_x X^2 \cdot P(X) = 0^2 \cdot (0,3) + 1^2 \cdot (0,7) = 0,7$$

olduğundan, $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{7}{10} - \dfrac{49}{100} = 0,21$ elde edilir.

---

27. $\dfrac{x-1}{2} = 1 - y,\ z = 1$ ve $x - 1 = z - 2,\ y = 3$ doğruları arasında en kısa uzaklığı bulunuz.

A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ D) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\dfrac{1}{2}$

Çözüm : $\mathbf{u}_1 = (2,-1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,1)$ ve $\overrightarrow{PQ} = (1,3,2) - (1,1,1) = (0,2,1)$ olduğu kolayca görülür. Buna göre,

$$\ell = \frac{\text{Hacim}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \overrightarrow{PQ})}{\text{Alan}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)} = \frac{\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \overrightarrow{PQ})}{\sqrt{\|\mathbf{u}_1\|^2 \|\mathbf{u}_2\|^2 - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle^2}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{5 \cdot 2 - 2^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

bulunur.

---

28. $\dfrac{x-1}{2} = z,\ y = 1$ ve $x - 2 = \dfrac{2-y}{k},\ z = 1$ doğruları aynı düzlemde bulunduklarına göre k kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 3 D) -2 E) -1

Çözüm : a) $\vec{\mathbf{u}}_1 = (2,0,1)$, $\vec{\mathbf{u}}_2 = (1,-k,0)$, $P(1,1,0)$ ve $Q(2,2,1)$ için,

$$\det\left(\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{PQ}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - k = 0$$

eşitliğinden $k = 1$ elde edilir.

29. Parametrik denklemi, $\{x = 2t + 1,\ \ y = 3t - 1,\ \ z = 5t\}$ olan doğruya paralel olan ve $P\,(2, 1, 0)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

A) $x - 2 = 1 - y,\ z = 0$ **B)** $\dfrac{x-2}{2} = z - 3,\ y = 2$ **C)** $\dfrac{2-x}{2} = y - 1 = \dfrac{z}{5}$

D) $2 - x = 1 - y = z$ **E)** $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{5}$

Çözüm : İstenen doğru $x = 2t + 1,\ \ y = 3t - 1,\ \ z = 5t$ doğrusuna paralel ise, doğrultmanı : $\tilde{\mathbf{u}} = (2, 3, 5)$ olacaktır. O halde, istenen doğru

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-0}{5}$$

olur.

---

30. $x + 4y + 2z = 3$ ve $x - y - z = 1$ düzlemlerinin arakesit doğrusundan ve $P\,(1, 1, 1)$ noktasından geçen düzlemin normali hangisidir?

A) $(2, 3, 1)$ **B)** $(2, 3)$ **C)** $(3, 2, 0)$ **D)** $(3, 2)$ **E)** $(2, 3, 4)$

Çözüm : Arakesit doğrusundan geçen düzlem demetinin denklemini

$$(x + 4y + 2z - 3) + \lambda\,(x - y - z - 1) = 0$$

ile ifade edebiliriz. $P\,(1, 1, 1)$ noktasından geçiyorsa,

$$(1 + 4 + 2 - 3) + \lambda\,(1 - 1 - 1 - 1) = 0,$$

eşitliğinden, $\lambda = 2$ olur. O halde, istenen düzlem :

$$(x + 4y + 2z - 3) + 2\,(x - y - z - 1) = 3x + 2y - 5 = 0$$

olduğundan, düzlemin normali : $N = (3, 2, 0)$ olur.

---

31. $\varphi\,(u, v) = (3 + 3\cos u \sin v, 1 + 3\cos u \cos v, 2 + 3\sin u)$ küresinin $P\,(3, 6, 14)$ noktasına en kısa uzaklığı kaç birimdir?

A) 11 **B)** 10 **C)** 5 **D)** 13 **E)** 7

Çözüm : Kürenin kartezyen denkleminin

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

olduğu kolayca görülebilir. Kürenin yarıçapı $R = 3$ ve merkezi $M\,(3, 1, 2)$'dir.

$$|MP| = \sqrt{(3-3)^2 + (6-1)^2 + (14-2)^2} = 13$$

olduğundan, P noktasının küreye uzaklığı : $\ell = |MP| - R = 13 - 3 = 10$ olur.

---

32. $y = 2x - 3\sqrt{2}$ doğrusu 45° saat yönünün tersine döndürülürse denklemi ne olur?

A) $y=6-\sqrt{2}x$ B) $y=\sqrt{2}-3x$ C) $y=3-x$ D) $y=6-3x$ E) $y=3x-\sqrt{2}$

Çözüm : Noktanın döndürülmesi söz konusu olduğu için,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

eşitliği kullanılmalıdır. x ve y yerine, x' ve y' cinsinden değerlerini yazalım.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} (x'+y') \\ (-x'+y') \end{bmatrix}$$

olduğundan, $\boldsymbol{y = 2x - 3}$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y') = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}((x'+y')) - 3\sqrt{2}$$

eşitliğinden, $(-x'+y') - 2(x'+y') + 6 = 6 - y' - 2x' = 0$ elde edilir. Yani, doğrunun denklemi, $y = 6 - 3x$ olur.

---

33. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ küresiyle $2x+y-2z=a$ düzlemi birbirine teğettir. Bu kürenin $2x+y-2z=b$ düzlemiyle kesişimi de bir büyük çember ise $a + b$ toplamı en fazla kaçtır?

A) 11 B) 4 C) 5 D) 1 E) 7

Çözüm : Kürenin merkezi $M(1,1,1)$ noktasıdır. Merkezin düzleme uzaklığı :

$$\ell = \frac{|2+1-2-a|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|1-a|}{3}$$

olduğundan, küre ve düzlem birbirine teğet ise, $\ell = r = 1$ olması gerektiğinden, $|1-a| = 3 \Rightarrow a = 4$ veya $a = -2$ elde edilir. Diğer yandan, Küre ile düzlemin kesişiminin bir büyük çember olması için, düzlem kürenin merkezinden geçmeli, yani $\ell = 0$ olmalıdır. Buradan da, $b = 1$ bulunur. O halde, $a + b$ toplamı en fazla $4 + 1 = 5$ olur.

---

34. Parametrik denklemi $\alpha(t) = (\sqrt{2}\sec t, \sqrt{7}\tan t)$ olan koniğin bir odağının, kutupsal koordinatlardaki denklemi $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ olan çemberin merkezine uzaklığı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

Çözüm : $\alpha(t)$, kartezyen denklemi $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ olan, asal ekseni x ekseni olan bir hiperboldür. Bu hiperbol denklemine göre, $a = \sqrt{2}$ ve $b = \sqrt{7}$'dir. $c^2 = a^2 + b^2$ ise $c = 3$ bulunur. O halde, odakların koordinatları, $F_1(3,0)$ ve $F_1(-3,0)$ olur.

Diğer taraftan, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ve $x^2 + y^2 = r^2$ olduğundan,

$$r = 2\cos\theta + 4\sin\theta \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta + 4r\sin\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x + 4y$$

eşitliğinden, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ çemberi elde edilir. Bu çemberin merkezi : $M(1,2)$'dir ve F_1 odağına uzaklığı, $|MF_1| = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$ elde edilir.

35. $\mathbb{R}^3$ **de verilen aşağıdaki denklemlerin kaç tanesi doğru eşleştirilmiştir?**

I. $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ →**Koni**

II. $(z-1)^2 = 1 + x^2 + y^2$ →**Tek Kanatlı Hiperboloid**

III. $(z-1) = x^2 + y^2$ →**Hiperbolik Paraboloid**

IV. $(z-1)^2 + 1 = x^2 + y^2$ →**Küre**

V. $(z-1)^2 + x^2 + 4y^2 = 1$→**Elipsoid**

VI. $x^2 + 4z^2 = 1$→**Elips**

A) 1 **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 5**

Çözüm : I, V doğru, diğerleri yanlış eşleştirilmiştir.

II. $(z-1)^2 - x^2 - y^2 = 1$ →İki Kanatlı Hiperboloiddir.

III. $(z-1) = x^2 + y^2$ →Eliptik Paraboloiddir. ($(z-1) = x^2 - y^2$ olsaydı hiperbolik parabolid olacaktı)

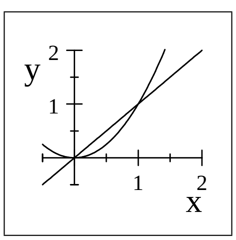
IV. $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 1$ →Tek Kanatlı Hiperboloiddir.

VI. $\mathbb{R}^3$ de $x^2 + 4z^2 = 1$ bir silindirdir.

---

36. $y = x$ **doğrusu ve** $y = x^2$ **parabolü ile sınırlanan bölge** A **olduğuna göre,** $\iint\limits_A y\,dA$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{10}$ **D)** $\frac{1}{15}$ **E)** $\frac{1}{11}$

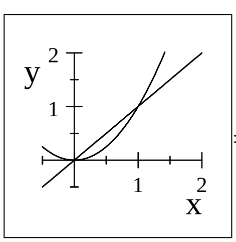


Çözüm : Şekilden de takip edilirse,

$$\iint\limits_A y\,dA = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy = \int_0^1 yx\Big|_y^{\sqrt{y}}\,dy = \int_0^1 \left(y^{3/2} - y^2\right) dy$$

$$= \left(\frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

veya

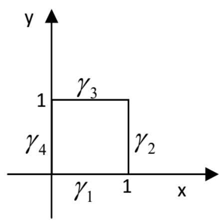


$$\Rightarrow \iint\limits_A y\,dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y\,dy\,dx = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{x}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{1}{15}$$

bulunur.

37. $\boldsymbol{C}$ **eğrisi, köşeleri** $\mathbf{(0,0)\,,\,(1,0)\,,\,(1,1)\,,\,(0,1)}$ **olan kare olmak üzere** $\displaystyle\int\limits_C \boldsymbol{x\,dx + y\,dy}$ **integralini hesaplayınız.**

A) $\mathbf{\frac{1}{4}}$ **B)** $\mathbf{\frac{1}{3}}$ **C)** $\mathbf{\frac{1}{2}}$ **D) 0** **E) 1**



Çözüm : Yandaki karenin kenarlarını saat yönünün tersinde $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$ dersek

$$\int\limits_C xdx+ydy=\int\limits_{\gamma_1}...+\int\limits_{\gamma_2}...+\int\limits_{\gamma_3}...+\int\limits_{\gamma_4}...=\underset{\gamma_1:\,y=0}{\int_0^1 xdx}+\underset{\gamma_2:\,x=1}{\int_0^1 ydy}+\underset{\gamma_3:\,y=1}{\int_1^0 xdx}+\underset{\gamma_4:\,x=0}{\int_1^0 ydy}=0$$

2. Çözüm : $\displaystyle\int\limits_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint\limits_B(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy})dB$ (Green Teoremi) eşitliğine göre,

$$P(x,y)=x \quad Q(x,y)=y \text{ ve } P_y=Q_x=0,$$

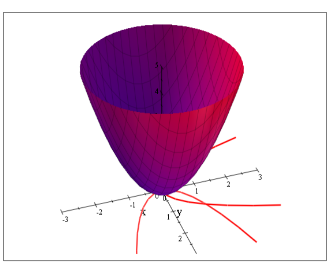
olduğundan, $\displaystyle\int\limits_C xdx+ydy=\iint\limits_B(0)dB=0$ elde edilir.

---

38. $\boldsymbol{z=x^2+y^2}$ **yüzeyinin altında ve** $\boldsymbol{y=x^2}$ **ile** $\boldsymbol{x=y^2}$ **parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin üstünde kalan cismin hacmini veren ifade aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} dy\,dx$ **B)** $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{0} dx\,dy$ **C)** $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)\,dy\,dx$

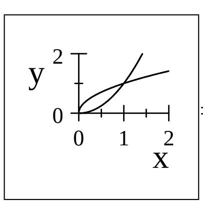
D) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{y}(x^2+y^2)\,dx\,dy$ **E)** $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1}(x^2+y^2)\,dy\,dx$



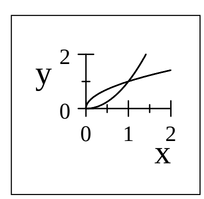
Çözüm : $z=x^2+y^2$ yüzeyinin altında ve $y=x^2$ ile $x=y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin üstünde kalan cismin hacmini iki katlı integralle veya üç katlı integralle ifade edebiliriz. Üç katlı integralle,

$$V=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\int_0^{x^2+y^2}\text{d}z\text{d}y\text{d}x=\frac{6}{35}$$

biçiminde, iki katlı integralle ise



$$\Rightarrow\ V=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)\text{d}y\text{d}x=\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(x^2+y^2)\text{d}x\text{d}y\ \Leftarrow$$



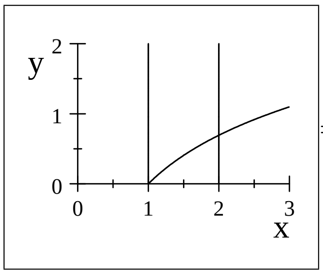
biçimlerinde, ifade edebiliriz. Üç integral de hesaplanarak istenen hacimin $6/35$ br^3 olduğu görülebilir.

39. $\int\limits_1^2 \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)\, dy dx$ **integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

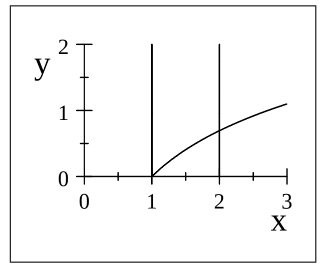
A) $\int\limits_0^1 \int\limits_y^2 f(x,y)\, dx dy$ **B)** $\int\limits_0^1 \int\limits_2^y f(x,y)\, dx dy$ **C)** $\int\limits_0^{\ln 2} \int\limits_0^y f(x,y)\, dx dy$

D) $\int\limits_0^{\ln 3} \int\limits_1^{e^y} f(x,y)\, dx dy$ **E)** $\int\limits_0^{\ln 2} \int\limits_{e^y}^2 f(x,y)\, dx dy$

Çözüm : Şekilden takip edilirse,



$$\Rightarrow \int\limits_1^2 \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)\, \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\ln 2} \int\limits_{e^y}^2 f(x,y)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \Leftarrow$$



elde edilir.

---

40. $f(x,y) = x^y$ **fonksiyonu için** $\|\text{Grad} f(1,1)\|$ **değeri kaçtır?**

A) 0 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 1

Çözüm : $\text{Grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial y}\right)$ olduğunu hatırlayınız. Buna göre,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$$

olduğundan, $\text{Grad} f(x,y) = (yx^{y-1}, x^y \ln x)$ ve $\text{Grad} f(1,1) = (1,0)$ olur. O halde, $\|\text{Grad} f(1,1)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ bulunur.

---

41. $\ln(xy) + yz + z^2 = 2$ **ile verilen yüzeyin** $P(1,1,1)$ **noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.**

A) $3x - y + 2z = 4$ **B)** $x + 2y + 3z = 6$ **C)** $3x + 2y + z = 6$

D) $3x + y - 2z = 2$ **E)** $x + y + 2z = 4$

Çözüm : Yüzeyin normali, $F(x,y,z) = \ln(xy) + yz + z^2 - 2 = 0$ olmak üzere $N_p = \frac{(\nabla F)(P)}{\|(\nabla F)(p)\|}$ ile bulunur. Buna göre,

$$\text{Grad}(F) = \nabla(F) = \left(\frac{y}{xy}, \frac{x}{xy} + z, y + 2z\right) \Rightarrow (\nabla F)(P) = (1,2,3)$$

olur. Yani, düzlemin normali $N_p = (1,2,3)$'tür. Buradan, düzlemin denklemi :

$$1(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = x + 2y + 3z - 6 = 0$$

elde edilir.

42. $\boldsymbol{f(x,y,z) = xyz^2 + x^2}$ **olmak üzere,** $\boldsymbol{f}$ **fonksiyonunun** $\boldsymbol{P(1,1,1)}$ **noktasındaki** $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ **vektörü yönündeki türevi kaçtır?**

A) 0 **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 6**

Çözüm : $\mathbf{v}_p[f] = \langle(\nabla f)(P), \mathbf{v}_p\rangle$ ile bulunur. Buna göre, $\nabla f = (yz^2+2x, xz^2, 2xyz)$ ve $\nabla f(P) = (3,1,2)$ olduğundan,

$$\mathbf{v}_p[f] = \langle \nabla f, \mathbf{v}_p\rangle = \left\langle (3,1,2), \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\rangle = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 3$$

elde edilir.

---

43. $\boldsymbol{P(1,0)}$ **noktasının** $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ **eğrisine en kısa uzaklığı kaç birimdir?**

A) $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ **B)** $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ **C)** $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{2}}$ **D)** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ **E)** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Çözüm : $P(1,0)$ noktasının $y=\sqrt{x}$ eğrisine en yakın olduğu nokta $A(x,\sqrt{x})$ olduğundan,

$$g(x) = |AP| = \sqrt{(x-1)^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x + (x-1)^2}$$

ifadesinin minimum değerini bulmak istiyoruz.

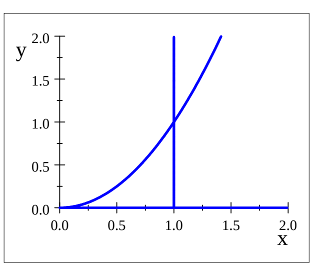
$$g'(x) = \frac{2(x-1)+1}{2\sqrt{x+(x-1)^2}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{x+(x-1)^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

için minimum olacağından, en kısa uzaklık $g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ elde edilir.

---

44. $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,dx\,dy$ **integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{7} - \frac{2}{7}}$ **B)** $\boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}}$ **C)** $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}}$ **D)** $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{1}{9}}$ **E)** $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{1}{3}}$



Çözüm : Çözüm : İntegralin sırasını değiştirelim. Şekilden takip ediniz. Buna göre,

$$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{2(x^3+1)^{3/2}}{9}\right|_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}$$

bulunur.

45. Aşağıdaki fonksiyonların kaç tanesinin $(0,0)$ noktasında limiti yoktur?

I. $f(x,y)=\dfrac{x\left(x^4-y^4\right)}{x^4+y^4}$ **II.** $f(x,y)=\dfrac{xy^4}{x^2+y^8}$ **III.** $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{xy}$

IV. $f(x,y)=\dfrac{\ln\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2+y^2+2}$ **V.** $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+y)}{\arcsin y^2}\cdot\dfrac{(\tan y)^2}{\sin x}$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Çözüm : Sadece, II.'deki fonksiyonun limiti yoktur. Diğerlerinin limiti vardır.

I. Limit var : Sıkıştırma teoremiyle kolayca görülebilir.

$$0\le\left|\frac{x\left(x^4-y^4\right)}{x^4+y^4}\right|\le|x|\underbrace{\left|\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}\right|}_{\le 1}\le|x|\to 0$$

olduğundan, $(x,y)\to(0,0)$ için, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\left(x^4-y^4\right)}{x^4+y^4}=0$ olur.

II. Limit Yok : $(0,0)$ noktasına iki farklı eğri üzerinden yaklaşarak, farklı limitler elde edeceğimizi, ve bu nedenle limitin olmadığını görelim.

$x=y^4$ eğrisi üzerinden yaklaşırsak, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^4}{x^2+y^8}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^8}{y^8+y^8}=\frac{1}{2}$,

$x=0$ doğrusu üzerinden yaklaşırsak, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^4}{x^2+y^8}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{0}{y^8}=0$

olduğu görülebilir.

III. Limit var : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}=1$'dir.

IV. Limit var : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2+y^2+2}=\frac{\ln 1}{2}=0$

V. Limit var : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x+y+1)}{\arcsin y^2}\cdot\frac{(\tan y)^2}{\sin x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x+y+1)}{\sin x}\cdot\frac{(\tan y)^2}{\arcsin y^2}=1\cdot 1=1.$

---

46. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=0$**,** $y(0)=0$**,** $y'(0)=1$ **olduğuna göre,** $y'(1)=?$

A) $-e^3+e^2$ **B)** $2e^3-3e^2$ **C)** e^3-e^2 **D)** $2\sin 1$ **E)** e^1-e^2

Çözüm : Sabit katsayılı, homojen bir denklemdir. Karakteristik denklemi

$$m^2-5m+6=0$$

'dır. Buradan kökleri $m_1=2$ ve $m_2=3$ olur. Bunlara karşılık gelen reel çözümler e^{2x} ve e^{3x} dir. O halde, genel çözüm : $y(x)=Ae^{2x}+Be^{3x}$ formundadır. $y(0)=0$ ve $y'(0)=1$ olduğundan,

$$A+B=0 \text{ ve } 2A+3B=1$$

olmalıdır. Buradan, $A=-1$ ve $B=1$ bulunur. Buradan, $y(x)=-e^{2x}+e^{3x}$ olduğundan, $y(1)=e^3-e^2$ bulunur. Cevap C) seçeneğidir.

47. Aşağıdaki diferensiyel denklemlerinin türleri hangi seçenekte doğru verilmiştir?

I. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

II. $(y \sin x - \sin y)dx - (x \cos y + \cos x)dy = 0$

III. $(2y - x^3)dx + xdy = 0$

IV. $(y - xy^3)dx + dy = 0$

A) I: Tam II: Bernoulli III: Homojen IV: Lineer

B) I: Homojen II: Tam III: Bernoulli IV: Lineer

C) I: Tam II: Homojen III: Lineer IV: Bernoulli

D) I: Homojen II: Tam III: Lineer IV: Bernoulli

E) I: Bernoulli II: Lineer III: Tam IV: Homojen

Çözüm : I denklemini

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{x}{y} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\frac{1}{y/x} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} = f(\frac{y}{x})$$

şeklinde yazabildiğimizden homojen diferansiyel denklemdir.

II denklemi için $M(x,y) = y \sin x - \sin y, N(x,y) = -(x \cos y + \cos x)$ seçimi ile $M_y = \sin x - \cos y = N_x$ olduğundan tam diferansiyel denklemdir.

III denklemi $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}y = x^2$ şeklinde yazılabilir. Bu da lineer diferansiyel denklemdir.

IV denklemi $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}y = y^3$ olarak Bernoulli diferansiyel denklemi biçiminde yazılabilir. Yani denklem Bernoulli diferansiyel denklemidir.

---

48. c_i'ler reel sabitler olmak üzere $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$ diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ **B)** $c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ **C)** $c_1 \sin x + c_2 \cos x$

D) $c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3x$ **E)** $c_1 \sin x + c_2 \cos x + x$

Çözüm : Sabit katsayılı, homojen olmayan bir denklemdir. Karakteristik denklemi

$$m^2 + 1 = 0$$

Buradan kökleri

$$m_1 = i \text{ ve } m_2 = -i$$

olur. Bunlara karşılık gelen reel çözümler $\sin x$ ve $\cos x$ dir. Ayrıca denklemin bir özel çözümünün $y = x$ olduğu görülmektedir. O halde, genel çözüm :

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x$$

elde edilir. Buradan genel çözüm E) seçeneğinde verilendir.

---

49. $\boldsymbol{(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\sin y-y)dy=0}$ **diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdakilerin hangisidir?**

A) $\boldsymbol{x^2\sin y+xy^2-y^2/2=C}$ B) $\boldsymbol{x^2\cos y+2x^3-y^2=C}$

C) $\boldsymbol{x^2\cos y+x^3y-y^2/2=C}$ D) $\boldsymbol{-x^2\sin y+x^3y-y^2=C}$

E) $\boldsymbol{x^2\cos y-2x^3+y^2/2=C}$

Çözüm : $M(x,y)=2x\cos y+3x^2y$, $N(x,y)=x^3-x^2\sin y-y$ olmak üzere $M_y=-2x\sin y+3x^2=N_x$ olduğundan denklem tam diferansiyel denklemdir. Gruplandırma yöntemi ile çözelim:

$$\left[2x\cos y\ \mathrm{d}x-x^2\sin y\ \mathrm{d}y\right]+\left[3x^2y\ \mathrm{d}x+x^3\ \mathrm{d}y\right]-y\ \mathrm{d}y=0.$$

İlk terim $x^2\cos y$'nin, ikinci terim ise x^3y'nin tam diferansiyelidir, dolayısıyla aynı eşitlik

$$\mathrm{d}(x^2\cos y)+\mathrm{d}(x^3y)-\mathrm{d}(\frac{y^2}{2})=0$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin integralinin alınmasıyla

$$x^2\cos y+x^3y-\frac{y^2}{2}=C$$

çözümü elde edilir.

---

50. $\boldsymbol{y'=-e^{y/x}+\frac{y}{x}}$ **diferansiyel denklemi için** $\boldsymbol{y(1)=0}$ **ise** $\boldsymbol{y(e)=?}$

A) $\boldsymbol{1-e}$ B) $\boldsymbol{1+e}$ C) $\boldsymbol{e^2}$ D) $\boldsymbol{0}$ E) $\boldsymbol{e}$

Çözüm : $u=y/x$ dönüşümü yapılırsa, $y=xu\Rightarrow y'=u+xu'$ olduğundan,

$$u+xu'=-e^u+u\Rightarrow u'=\frac{-e^u}{x}\Rightarrow-\frac{du}{e^u}=\frac{dx}{x}$$

ayrılabilir diferansiyel denklemi elde edilir. Buradan,

$$-\int\frac{du}{e^u}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow e^u=\ln x+c\Rightarrow e^u-\ln x=c$$

eşitliğinden, $c=e^{y/x}-\ln x$ bulunur. $y(1)=0$ ise, $c=0$ olur. O halde, $x=e$ için,

$$e^{y/e}=\ln e\Rightarrow e^{y/e}=1\Rightarrow\frac{y}{e}=\ln 1\Rightarrow y=0$$

elde edilir.