Geometrik Yer Kavramı ve Olimpiyat Problemleri



Harun Barış Çolakoğlu / hbcolakoglu@akdeniz.edu.tr

Matematikte tanımlar, kendine özgü birtakım özellikleri olan kavramları belirlemek veya diğerlerinden ayırmak için onlara ad vermekten ibarettir ve başka kavramlar yardımıyla yapılır. Ancak sonsuz bir tanım zinciri oluşturulamayacağından bazı kavramları tanımsız bırakma zorunluluğu vardır. Bu kavramlara *ilkel kavram* veya *tanımsız terim* denir.

Geçerli bir mantık sistemiyle doğruluğu ispatlanan önermeler için de durum benzerdir: Sonsuz bir ispat zinciri oluşturulamayacağından bazı önermeleri -doğru kabul ederek- ispatsız bırakma zorunluluğu vardır. İlk kullanıldığı zamanlarda yalnızca gerçeklere işaret eden, ancak günümüzde başlangıç kuralları olarak kullanılabilen bu ispatsız önermelere de *aksiyom*, *postulat* veya *belit* denir[1].

İlk bakışta dezavantaj gibi görülebilen bu zorunlulukların genellik ve serbestlik sağlama gibi avantajları vardır. Örneğin, geometride nokta tanımsız bırakılmıştır; ancak aksiyomatik sisteminize[2] uygun olduğu sürece neye nokta derseniz o, nokta olabilmektedir. Bununla birlikte, aksiyomlarınızı değiştirerek farklı koşullara uygun bambaşka geometrik yapılar türetebilirsiniz. ([1] no.lu kaynağın ilk bölümlerini inceleyebilirsiniz.)

Her aksiyomatik sistemin birinci basamağında tanımlar ve aksiyomlar yer alır. Dolayısıyla, tanım ve aksiyomlar üzerinde yapılacak küçük değişiklikler, sistemin yapısında büyük değişikliklere neden olabilir. Örneğin, sadece iki nokta arasındaki uzaklık tanımının değişimi, çemberleri elipslere, dikdörtgenlere, paralelkenarlara ya da başka geometrik şekillere dönüştürebilir. (Bu durumda elips, hiperbol, küre gibi uzaklıkla ilişkili diğer geometrik yerler, kim bilir nelere dönüşecektir!) Bununla birlikte; nokta, doğru ve düzlem seçimlerinizin değişimiyle uzayınız Öklid aksiyomlarını sağladığı halde bile bambaşka bir forma dönüşebilir. (Bir örnek için bkz: [2])

Bu gerçekler geometrinin ne olduğuna da işaret etmektedir: "Geçerli bir mantık sistemi kullanılarak, tanım ve aksiyomlardan hareketle, nesnelerinin değişmeyen özelliklerinin belirlendiği disiplin" şeklinde verilen bir ifade, geometri için -diğer teorik matematik dallarını da kapsayan- genel bir tanım olarak düşünülebilir.

Burada, aşina olduğumuz Öklid geometrisinde "geometrik yer" kavramını ele alacağım ve konuyla ilişkili birkaç olimpiyat sorusuna yer vereceğim. Yukarıdaki girişin sebebi, bu temel kavramın tanım, aksiyom ve nesnelerin değişmeyen özellikleriyle yakın ilişkide olmasındandır. Daha açık olarak, bir geometride hemen her özellik bir geometrik yere işaret eder ve bu özellikler tanım ve aksiyomların, yani o geometrinin belirlenmesiyle birlikte elde edilmeye başlar. Örneğin, bu yazının hazırlanma tarihi itibarıyla çevrimiçi Üçgen Merkezleri Ansiklopedisi'nde, Öklid geometrisindeki çeşitli özelliklerle belirlenmiş 45.344 tane üçgen merkezi listelenmiştir[3]. Hepsi birer geometrik yerdir. Ek olarak, analitik geometride koordinatları bir veya daha fazla denklem veya eşitsizliği sağlayan her nokta kümesi bir geometrik yer olarak görülebilir.

Yazıyı hazırlamadan önce, MEB matematik ders kitaplarında bu temel konu nasıl işlenmiş diye merak ettim. Kitapları incelediğimde doğrusu çok şaşırdım. Maalesef, 2021 yılı MEB yayınları Fen Lisesi 9, 10, 11 ve 12. sınıf matematik ders kitapları içinde bu konuyla ilgili hiçbir bilgi bulamadım. Geometrik yer terimi tüm bu kitaplar içerisinde sadece bir kez çember tanımının içinde -kendisi tanımlanmamış olarak- geçiyor. Anlaşılan, üçgen inşalarıyla verilen bu konu müfredattan çıkartılmış. Bu sebeple konuyu, olimpiyat ayağına ek olarak onun önemini belirtecek şekilde ele almaya karar verdim. Bunun bir sebebi de bu satırları okuyan, olimpiyatlara gözünü dikmiş çalışkan öğrencilerin dikkatlerini, geometrinin engin dünyasındaki çeşitli güzelliklere çekme isteğimdir.

[1] Öklid (MÖ 330-275), büyük eseri *Elemanlar*'da ispatsız önermelerini aksiyomlar (ortak kavramlar) ve postulatlar olarak ikiye ayırmıştır. Bu durum, geçmişte bir bilime özel olan ispatsız önermelere postulat, genel olan ispatsız önermelere de aksiyom dendiği şeklinde yorumlanabilmektedir. Günümüzde bunlar arasında bir fark gözetilmez.

[2] Tanımsız terim kümeleri, bu terimler arasındaki tanımsız bağıntılar, bu terim ve bağıntılarla ilişkili aksiyomlar topluluğu ve geçerli bir mantık sistemiyle bu aksiyomlardan elde edilebilen tüm teoremler tutarlılık ve bağımsızlık ilkelerini sağlıyorsa bir *aksiyomatik sistem* adını alır.

[3] https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

Geometrik yer kavramı hemen her geometri konusuyla ilişkilendirilebilir bir konu olmasına rağmen, yazının formatı sebebiyle sadece bazı özel geometrik yerlere ve onlara ilişkin birkaç olimpiyat sorusuna değinebileceğim. Konu kapsamı da analitik geometriden ziyade sentetik geometriyle sınırlı olacaktır. Bununla birlikte, yazı içinde geometrik yer kavramına ek olarak, müfredatta yer almayan başka kavramların da bulunabileceğini belirteyim. Ancak öğrencilerin burada geçen kavramlar hakkında küçük araştırmalarla kolayca bilgi sahibi olabileceğine inancım tamdır.

Şekil ve Geometrik Yer

Herhangi bir nokta kümesine bir *geometrik şekil* veya kısaca *şekil* denir. Bu tanıma göre; boş küme, bir doğru parçası, çember, eğri, küre, bir düzlemsel bölge, bir uzaysal bölge birer şekil örneğidir ve iki şeklin arakesitinin ya da birleşiminin yine bir şekil olacağı açıktır[4].

Belirli bazı ortak özelliklere sahip tüm noktaların kümesine de bu noktaların *geometrik yeri* denir. Buna göre, bir özelliğe sahip olan tüm noktaların kümesiyle bu özelliğe sahip olan noktaların geometrik yeri aynı kümeyi ifade eder. Bir geometrik yerin belirlenmesi için noktaları küme teşkil edecek en az bir karakteristik özelliğin verilmesi yeterlidir. Örneğin, düzlemde sabit bir noktadan sabit bir uzaklıkta bulunan tüm noktaların kümesi bir geometrik yer belirler ki bu kümeye *çember* denir.

Bir geometrik yerde verilen özelliklerin tümüne sahip olan her nokta bu geometrik yere aitken, bu özelliklerin en az birine sahip olmayan hiçbir nokta bu geometrik yere ait olmaz. Belirli bir geometri içinde geometrik yer belirtilirken, kümelerde evrensel kümenin verilmesi gibi, önce noktaların ait olduğu yer, sonra da diğer ortak özellikler verilir. Noktaların ait olduğu yer, -ait olduğu geometriden sonra- onların en genel ortak özelliğidir ve verilmediği takdirde karışıklığa neden olabilir. Örneğin, sabit bir noktaya sabit bir uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri düzlemde bir çember belirtirken, uzayda bir küre yüzeyi belirtir[5].

Her nokta kümesi bir şekil olduğundan, her geometrik yer de bir şekildir. Bununla birlikte, bir şekli oluşturan tüm noktaların ortak özellikleri belliyse, o şekil de bir geometrik yerdir. Genel olarak, şekil ve geometrik yer kavramları aynı anlamda kullanılır. Ancak bir şeklin bir geometrik yerle aynı olduğunu, başka bir ifadeyle şekli oluşturan tüm noktaların kümesiyle geometrik yeri oluşturan tüm noktaların kümesinin birbirine eşit[6] olduğunu göstermek için, "şekle ait olan her noktanın geometrik yer özelliklerine sahip olduğu" ve "geometrik yer özelliklerine sahip olan her noktanın şekle ait olduğu" gösterilmelidir. Bu sebeple, bir şeklin bir geometrik yerle aynı olduğunu gösteren ispatlar gerek ve yeter koşullar için iki parçada yapılır[7]. Daha iyi açıklamak için bir örnek verelim: Önce aşağıdaki yarım çemberi göz önüne alalım. Yarım çember üzerindeki her nokta, sabit bir noktadan sabit bir uzaklıktadır. Ancak bu sabit noktadan bu sabit uzaklıkta bulunan her nokta bu yarım çember üzerinde değildir. Şimdi de bir kirişiyle birlikte verilen bir çemberi göz önüne alalım. Çemberin merkezi olan sabit noktadan çemberin yarıçapı olan sabit uzaklıkta bulunan tüm noktalar bu şekle aittir. Ancak şekil üzerindeki her nokta, sabit bir noktadan sabit uzaklıkta değildir. O halde, bu örneklerdeki şekiller, çemberin aksine, ifade edilen geometrik yere eşit değildirler.



Tanım ve Geometrik Yer

Kendine özgü, genel ve değişmeyen bir özelliğe sahip tüm şekillerin oluşturduğu aileyi bu karakteristik özellikle tanımlamak mümkündür. Böyle bir genel şeklin bir geometrik yere eşit olduğunun gösterilmesiyle onun bir karakteristik özelliği belirlenmiş olur. Böylece şekli bu geometrik yerle de tanımlama imkânı doğar. Ek olarak, şekil, farklı karakteristik özelliklere sahip birden fazla geometrik yere de eşit olabilir. Bu durumda, aynı şeklin birden fazla geometrik yer tanımı olabilecektir. Örneğin, elips ve hiperbolün[8], "iki

[4]Bu tanımın işlevsellik dikkate alınarak yapıldığını not edelim. Tanımlarda, çeşitli nedenlerden, büyük kavram kargaşalarına sebep olmayacak şekilde bir esneklik sağlanabileceğini, hatta aksiyomlarda da pedagojik sebeplerden bağımsızlık ilkesinin esnetilebileceğini belirtelim. Ancak yapılan tanımlara ve aksiyomlara sadık kalmak değişmez bir zorunluluktur.

[5]Bu geometrik yerler, örneğin taksikab geometride bir kare ve düzgün sekizyüzlü belirtir. (Bkz: [3]) Ancak yazının başında, aşina olduğumuz Öklid geometrisinde çalışacağımızı belirtmiştik.

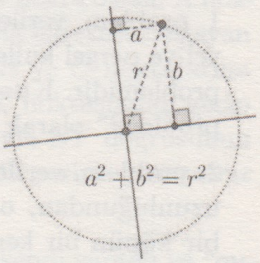
[6]Burada şekli ve geometrik yeri birer küme olarak tanımladık. Ancak şekil ve geometrik yerle uzaydaki biçimler de ifade edilebilmektedir. Bu durumda bunların eşliğinden de söz edilebilir.

[7]Bu ispatlarda "olmayana ergi" yöntemi kullanışlıdır. Örneğin, "şekle ait olan her noktanın geometrik yer özelliğine sahip olduğu" ispatlandıktan sonra "geometrik yer özelliğine sahip olan her nokta şekle aittir" önermesi yerine, doğruluk değeri ona denk olan "şekle ait olmayan hiçbir nokta geometrik yer özelliğine sahip değildir" önermesi ispatlanabilir.

[8]Genel adları *konik* olan elips, hiperbol ve parabol maalesef müfredatta yer almıyor. Sadece parabol, analitik düzlemde ve özel durumlarında, daha açık olarak kolları yukarı, aşağı, sağa ya da sola bakan şekliyle, ikinci dereceden bir bilinmeyenli fonksiyonların grafiği olarak ele alınıyor. Bu eğrilerin temel tanım ve özellikleri için bakınız: [4] ve [5].

nokta", "nokta ve doğru", "iki doğru", "nokta ve çember", "iki çember", "çember ve doğru" ve "bir yüzeyle bir düzlemin arakesiti" kullanılarak -hatta eğer analitik düzlemde tanımlanacaklarsa bir denklem kullanılarak- tanımları yapılabilir. (Bkz: [4], [5], [6], [7])

Daha basit bir örnek vermek gerekirse, çember, bilinen tanımından farklı olarak "düzlemde sabit ve dik kesişen iki doğruya uzaklıklarının kareleri toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri" olarak da tanımlanabilir[9]. Aşağıdaki şekli dikkate alarak bunu gösterelim: Düzlemde sabit ve dik kesişen herhangi iki doğruya uzaklıklarının kareleri toplamı, verilen sabit bir r^2 değerine eşit olan her noktanın, Pisagor teoremi gereğince, bu doğruların kesişme noktasına olan uzaklığının karesi de r^2 değerine eşittir.

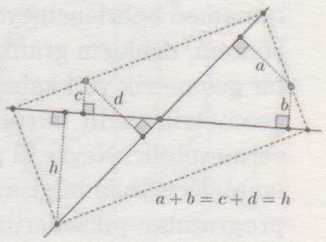


Bir uzaklığın karesi sabitse o uzaklığın kendisi de sabit olacağından bu noktaların, doğruların kesişme noktasına uzaklığı olan r değeri de sabittir. Buna göre, düzlemde sabit ve dik kesişen herhangi iki doğruya uzaklıklarının kareleri toplamı sabit olan tüm noktalar, sabit bir noktaya sabit bir uzaklıktadır.

Karşıt olarak, sabit bir noktaya sabit bir r uzaklığında bulunan her noktanın, sabit noktadan geçen sabit ve dik kesişen herhangi iki doğruya uzaklıklarının kareleri toplamı, yine Pisagor teoremi gereğince, r^2 değerine eşittir. Sabit bir uzaklığın karesi de sabit olacağından bu noktaların, sabit noktadan geçen ve dik kesişen herhangi sabit iki doğruya uzaklıklarının kareleri toplamı sabit olur. Buna göre, sabit bir noktaya sabit bir uzaklıkta bulunan tüm noktaların, sabit noktadan geçen sabit ve dik kesişen herhangi iki doğruya uzaklıklarının kareleri toplamı sabittir.

Yani, her çember böyle bir geometrik yerdir ve her böyle bir geometrik yer de bir çember belirtir. O halde, bu geometrik yer çemberin bir tanımına işaret eder.

Örnekler çoğaltılabilir. Bir örnek daha vereyim: Dikdörtgen, "düzlemde sabit ve kesişen iki doğruya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri" şeklinde, hatta bir özel durum olarak, kare de "düzlemde sabit ve dik kesişen iki doğruya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri" şeklinde tanımlanabilir. Yukarıdaki şekli inceleyebilirsiniz. Bunun ispatını size bırakıyorum.



Burada şunu belirtmek gerekir: Bu şekilde yapılan tanımlar ancak işlevsel olursa veya bir açıdan değerli bulunursa anlamlı olur, kullanılır veya kabul görür. Çünkü tanımlar mümkün olduğunca yalın olmalıdır ve olabildiğince az kavram içermelidir. Aksi takdirde, bir şekle ait birçok farklı, uzun, karmaşık veya gereksiz tanımlara sahip oluruz[10]. Bununla birlikte, bir şekle ait geometrik yerin belirlenmesi ya da bir geometrik yere ait şeklin belirlenmesi her zaman anlamlıdır.

Düzlemsel Geometrik Yerin Belirlenmesi

Birden çok özellikle belirtilen bir geometrik yerin belirlenmesi için her bir özelliğin ayrı ayrı oluşturduğu geometrik yerler belirlenip bunların kesişimi alınabilir. Bir tek özelliğin oluşturduğu düzlemsel bir geometrik yeri belirlemek içinse, geometrik yerin inşa edilmesine yarayan bir araç kullanılması, nokta-nokta inşa edilmesi veya bir düzlemle bir yüzeyin arakesiti olarak ifade edilmesi gerekir. Örneğin, uç noktaları belli olan bir doğru parçası; cetvel gibi düz kenarlı herhangi bir nesne aracılığıyla sürekli olarak, nokta-nokta inşa edilerek kabaca veya bir düzlemle başka bir düzlem parçası kesiştirilerek belirlenebilir. Merkezi ve yarıçapı belli olan bir çember de pergel gibi sabit bir açıklığı olabilen herhangi bir nesne aracılığıyla sürekli olarak, nokta-nokta inşa edilerek kabaca veya bir düzlemle bir küre yüzeyi kesiştirilerek belirlenebilir.

Ancak temel geometrik yerler dışında düzlemsel bir geometrik yeri inşa eden bir aletin bulunması veya onun bir düzlemle bir yüzeyin arakesiti olarak ifade edilebilmesi nadir olarak mümkün olabilir.

[9] Bu tanım, [7]'de, elipsin iki doğru yardımıyla verilen "sabit ve kesişen iki doğruya uzaklıklarının kareleri toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri" tanımının özel halidir. Aslında, çember için verilen ilk tanım da elipsin iki nokta yardımıyla verilen "sabit iki noktaya uzaklıklarının toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri" tanımının özel halidir.

[10] "Hayatta en hakiki mürşit ilimdir, fendir." sözleriyle bilime verdiği önemi iyi bildiğimiz, Cumhuriyetimizin kurucusu Mustafa Kemal Atatürk, içerisinde bugün bile kullanılan birçok Türkçe matematik terimini önerdiği bir geometri kitabı yazmıştır. Konumuzla ilişkili olduğu için, kitabı okuduğumda hoşuma giden bir tanımı burada alıntılamak istiyorum. Mustafa Kemal Atatürk, geometri kitabında bir *tanım*ın, o günkü kullanımıyla *tarif*in, ne olduğunu ve nasıl yapılması gerektiğini aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

Tarif: Tarif, geometrik veya genel olarak herhangi bir bilgiye ait şeyin derli toplu kısa anlatımına denir. Bu kısa anlatım, o şeyin ne olduğu uzun uzadıya düşünüldükten, arandıktan, tarandıktan sonra derlenen öz anlamı kapsayan sözlerden kurulan kapsadır. (Mustafa Kemal Atatürk, Geometri, Kültür Bakanlığı Yayınları, 1937, sayfa 44.)

Ek olarak, sonsuz nokta içeren bir geometrik yerin tüm noktalarının nokta-nokta inşa edilerek tamamen belirlenemeyeceği de aşikârdır. Ayrıca bu yöntem, denklem grafiklerinden de bildiğimiz üzere, bir geometrik yeri kabaca ortaya çıkarabileceği gibi, geometrik yerin bütünü hakkında hiçbir fikir de vermeyebilir. Neyse ki günümüzde bu işler için kullanabileceğimiz bilgisayar programları mevcut. Bu programlar piksellerin oluşturduğu sınırlı tanım kümelerinde, sürekli olan geometrik yerleri nokta-nokta inşa yöntemiyle hızlı bir biçimde belirleyebiliyor. MEB yayınlarının 2021 yılı matematik kitaplarında geometrik yer kavramına yer verilmemiş olsa da geometrik yer belirlemek için kullanılabilen bir dinamik matematik/geometri yazılımı olan GeoGebra'nın tanıtımı yapılmış ve kullanımıyla ilgili küçük notlara yer verilmiş. Bu programın, geometrik yer konusunda kullanışlı olmasına ek olarak temel geometri eğitimi için de oldukça yararlı olduğunu belirtelim.

Yukarıdaki geometrik yer belirleme yöntemleri için, doğru parçası ve çemberden başka, tarihsel olarak da önemi olan birer örnek daha vermek istiyorum. Ancak MÖ 4. ve 3. yüzyıllara ait olan bu örnekleri daha iyi anlayabilmek için öncesini de hızlıca tarayalım:

Tarihte ilk kullanılan geometrik şekillerin, şüphesiz, doğru parçası ve çember olduğunu düşünürüz. En eski mimari yapılarda ve bilinen en eski ispatlı geometri teoremlerinde bu şekiller veya bunlar yardımıyla elde edilen temel geometrik şekiller karşımıza çıkar. Örneğin, MÖ 10.000'lerden kalma Göbeklitepe ören yerinin mimari yapısının planında eşkenar üçgen ve çember kullanıldığı belirlenmiştir. MÖ 3000'lerden kalma Stonehenge anıtı çember şeklindedir. MÖ 2500'lerden kalma Mısır piramitleri kare ve çemberle ilgili çeşitli özelliklere sahiptir. "Bir doğru parçasını dik olarak gören açının köşesi bu doğru parçasını çap kabul eden çember üzerindedir" teoremi doğru parçaları ve çemberle ilgilidir ve Miletli Thales'ten (MÖ 624-548) bu yana bilinir.

Dolayısıyla, doğru parçası ve çemberin ideal formlarına yakın şekillerini çizmeye yarayan ve oldukça basit araçlar olan işaretsiz cetvel, pergel ve ip[11], geometrik yer inşası için kullanılan ilk araçlardan olmuştur.

M.Ö. 5'inci yüzyılda "yalnız cetvel ve pergel kullanılarak yapılan inşalar" ile ilgili, antik Yunan matematikçilerine atfedilen bir alan oluşur[12]. Şekillerin ideal formlarıyla değerlendirildiği bu dönemde işaretsiz bir cetvel ve pergel yardımıyla yapılan bu geometrik inşalara oldukça önem verilir. Çok geçmeden, geometrik inşalarla ilgili üç meşhur problem ortaya çıkar[13]:

1. problem, verilen herhangi bir açının yalnız cetvel ve pergel kullanarak üç eşit parçaya bölünmesi problemidir. Kısaca, "açıyı üç eşit parçaya bölme problemi" olarak ifade edilir.

2. problem, verilen herhangi bir küpün bir kenar uzunluğundan, o küpün iki katı hacmine sahip bir küpün bir kenar uzunluğunu yalnız cetvel ve pergel kullanarak inşa etme problemidir. Kısaca, "küpü iki katına çıkarma problemi" olarak ifade edilir[14].

3. problem, verilen herhangi bir çemberin alanına eşit alanlı bir kareyi yalnız cetvel ve pergel kullanarak inşa etme problemidir. Kısaca, "çemberi kareleştirme problemi" olarak ifade edilir[15].

Amatöründen profesyoneline her kesim matematikçilerin 2300 yılı aşkın bir zaman uğraştığı bu problemlerin tamamının sonuca kavuşması, ancak 1882'de mümkün olabilmiştir. Sonuçta, bu problemlerin yalnız cetvel ve pergel yardımıyla çözülmesinin imkânsız olduğu anlaşılmıştır. Ancak bu sonuca varılmadan önce bazı matematikçiler, yalnız cetvel ve pergel yardımıyla çözülemeyip meşhur olan ve çözüm bekleyen bu problemlere, cetvel ve pergel kısıtlamasını bir kenara bırakıp bir eğri ya da bir araç yardımıyla çözüm bulma arayışına girmiştir. Eğrilerse geometrik yerlerden başka bir şey değildir.

Şimdi geometrik yer belirleme yöntemleri için

[11] İp, çember ve doğru parçası inşa etmek için kullanılabildiği gibi, işaretlenerek veya düğümlenerek, dik açı, ikizkenar üçgen ve eşkenar üçgen inşa etmek için kullanılabilen, cetvel ve pergelden daha güçlü bir alettir. İp yarımıyla elips, hiperbol ve parabol çizilebilmekte, antik çağın meşhur "çemberin kareleştirilmesi" problemi çözülebilmektedir.

[12] Antik Yunan matematiği Tales'ten Öklid'e (MÖ 330-275) kadar olan dönemi ifade eder. Pisagor (MÖ 570-495) ve takipçileri, Sofistler (MÖ 5. ve 4. yüzyıllar), Platon (MÖ 427-347) ve akademisi bu dönemin önemli kesimleridir. Yunan matematiği antik, Helenistik ve Roma dönemleriyle birlikte, Neo-Platoncuların kurduğu akademinin kapanmasına (MS 529) kadar matematik tarihinde önemli bir yer teşkil eder.

[13] Aslında meşhur problemler dört tanedir, ancak bunların ilk üçü daha çok bilinir. Bazı özel durumlarının çözümleri o dönemde de bilinen dördüncü problem, "verilen herhangi bir çemberi yalnız cetvel ve pergel kullanarak n eşit parçaya bölme" başka bir ifadeyle, "yalnız cetvel ve pergel kullanarak düzgün n-gen çizme" problemidir.

[14] Bu problem "Delos problemi" olarak da bilinir. Kaynaklara göre, Eratosthenes (MÖ 276-195)'in Kral III. Ptolemy'ye yazdığı bir mektupta, bir kâhinin Delos halkına, mevcut bir salgın hastalıktan kurtulmak için küp şeklindeki bir sunağı iki katına büyütmeleri gerektiğini bildirmesi sonucu ortaya çıkmıştır.

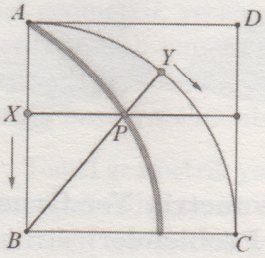
[15] Bu problem, aslında çemberin sınırladığı bölgenin alanını belirleme problemidir. Ancak o dönemde henüz belirli bir birim yoktur ve bir geometrik şeklin alanı, o alana eşit alanda olan bir kareyle ifade edilmektedir. Bu problemin cetvel ve pergel kısıtlaması olmadan çok daha eski zamanlarda ifade edildiğini, hatta yaklaşık bir çözüm de verildiğini MÖ 1550 yıllarına ait Rhind papirüsünden biliyoruz. Papirüste verilen çözüm ilgi çekicidir: Çözümde, çemberin alanının, çapının dokuzda sekizi üzerine inşa edilen karenin alanına eşit olduğu ifade edilir.

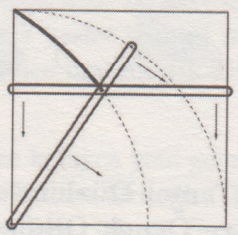
tarihsel sırasıyla vereceğim örneklere geçebilirim. İlk önce, bir araç kullanarak geometrik yer inşa edilmesi örneğini verelim.

Çemberden sonra bulunan ilk eğri, bir sofist olan Hippias (MÖ 460-399) tarafından, açıyı üç eşit parçaya bölme problemini çözmek üzere MÖ 420'li yıllarda geliştirilmiştir ve *quadratrix eğrisi* olarak bilinir[16]. Eğrinin tanımı aşağıdaki gibi verilebilir:

Düzlemde bir $ABCD$ karesi ve yarıçapı bu karenin bir kenar uzunluğuna eşit olan B merkezli çeyrek çember aşağıdaki şekildeki gibi verilsin. X, $[AB]$ doğru parçası üzerinde, Y de AC çeyrek çemberi üzerinde hareketli birer nokta olsun. A noktasından aynı anda sabit hızlarla harekete başlayan X ve Y noktaları aynı anda B ve C noktalarına varsın. Bu hareket boyunca, X noktasından geçip AB doğrusuna dik olan doğruyla BY doğrusunun kesişme noktalarının geometrik yerine *quadratrix eğrisi* denir.

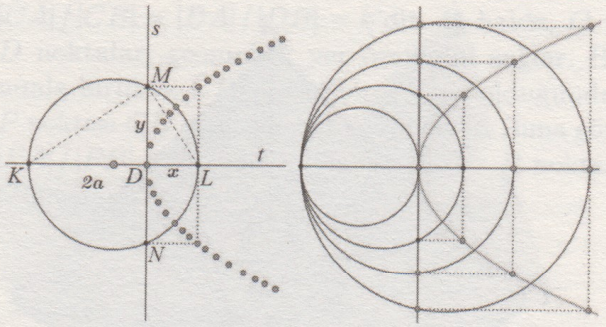
Hippias bu geometrik yeri, kendi yaptığı ve "quadratrix pergeli" olarak bilinen şekildeki gibi bir araç yardımıyla belirlemiştir.





Şimdi, geometrik yerin nokta-nokta inşa edilmesiyle ilgili örneği verelim.

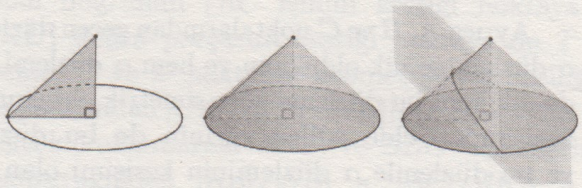
Çemberden sonra bulunan ikinci eğri, bugün parabol olarak bilinen eğridir[17] ve Menaechmus (MÖ 380-320) tarafından küpü iki katına çıkarma problemini çözmek için bulunmuştur. Menaechmus, Sakız adalı Hipokrates'in (MÖ 470-410) bu meşhur problemi çözmek için geliştirdiği özel bir orantıdan ($b = 2a$ için $a/x = x/y = y/b$) elde edilen üç denklemin birer eğri belirtebileceğini düşünmüş ve bunların aynı tipte olan ikisini ($x^2 = ay$ ve $y^2 = 2ax$ denklemlerini) göz önüne alarak, onların geometrik yerlerini nokta-nokta inşa yöntemiyle kabaca inşa etmeyi başarmıştır. Menaechmus'un, $y^2 = 2ax$ denkleminin geometrik yerini aşağıdaki gibi nokta-nokta inşa yöntemiyle kabaca belirlediği ifade edilir.



Yukarıdaki şekilde t ve s, birbirine D noktasında dik olan iki doğrudur ve $|KD| = 2a$'dır. K noktasından geçen, merkezi $[KD$ ışını üzerinde yer alan ve çapı $2a$'dan küçük olmayan bir çember, t doğrusunu bir L noktasında ve s doğrusunu da M ve N noktalarında kessin. $|DM| = y$ ve $|DL| = x$ alınırsa, çap $2a$'dan büyükken KDM ve MDL dik üçgenlerinin benzerliklerden $y^2 = 2ax$ elde edilir. M, N ve L noktalarından üzerinde bulundukları doğrulara çizilen dikmelerin kesişme noktaları denklemi sağlayan iki nokta belirler. Her yeni çember $y^2 = 2ax$ denklemini sağlayan iki yeni nokta belirler. Ayrıca, çap $2a$'ya eşitken de $y^2 = 2ax$ denklemi sağlanır. Böylece, $y^2 = 2ax$ denklemini sağlayan noktaların belirlediği eğri kabaca elde edilmiş olur. Bu denklemin $a = 0$ için bir doğru belirttiğine dikkat ediniz.

Son olarak, bir geometrik yerin, bir düzlemle bir yüzeyin arakesiti olarak ifade edilmesi örneğini verelim.

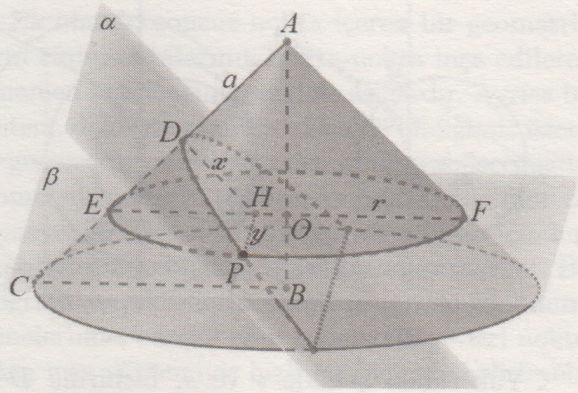
Kaynaklara göre, küpü iki katına çıkarma problemi için, nokta-nokta inşa yöntemiyle kabaca ortaya çıkan bu eğri yardımıyla Menaechmus'un verdiği çözüm Platon tarafından kabul edilmez. Menaechmus da bu eğriyi, aşağıdaki şekildeki gibi, ikizkenar bir dik üçgenin bir dik kenarı etrafında tam tur döndürülmesiyle elde edilen dik koni yüzeyini, üçgenin hipotenüsüne dik bir düzlemle kesiştirerek elde eder.



Denklemin belirttiği eğrinin bu kesişimden elde edilebileceğini, Menaechmus'un nasıl gösterdiği bilinmiyor. Ancak biz bunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

[16]Bu özelliğe sahip birçok eğri vardır ve bu tür eğrilerin genel adı "üçe bölen" anlamına gelen trisectrix'tir. Ancak Dinostraus (MÖ 390-320) aynı eğri yardımıyla çemberi kareleştirme probleminin de çözülebileceğini göstermiştir. Bu sebeple eğriye "kareleyen" anlamında quadratrix denmektedir.

[17]Bir dik koni yüzeyinin ekseniyle bir ana doğrusu arasındaki dar açı sabittir. Bu açıya θ diyelim. Bu koni yüzeyinin, eksenle yaptığı dar açı θ'ya eşit olan bir düzlemle kesişiminden elde edilen eğriye *parabol* denir. Eğer düzlem, koninin tepe noktasından geçiyorsa kesişimden bir doğru elde edilir. Bu tanıma göre, doğru parabolün özel (dejenere) halidir.



Şekildeki gibi, bir ABC ikizkenar dik üçgenini AB kenarı etrafında tam tur döndürerek bir dik koni yüzeyi elde edelim. AC hipotenüsü üzerinde $|AD| = a$ olacak şekilde D noktasını belirleyelim ve dik koni yüzeyini hipotenüse D noktasında dik olan α düzlemiyle kesiştirelim. Kesişimden elde edilen eğri üzerinde herhangi bir P noktası alalım. P noktasından geçen ve koni tabanına paralel olan β düzlemiyle de koni yüzeyini kesiştirelim. Bu düzlem AC hipotenüsünü E noktasında, AB kenarını da O noktasında kessin. β düzlemiyle dik koni yüzeyinin kesişimi olan O merkezli çemberin yarıçapı $|OE| = r$ olsun. Çemberin E noktasındaki çapının diğer ucu F noktası, P noktasının EF çapı üzerindeki dik izdüşümü de H noktası olsun.

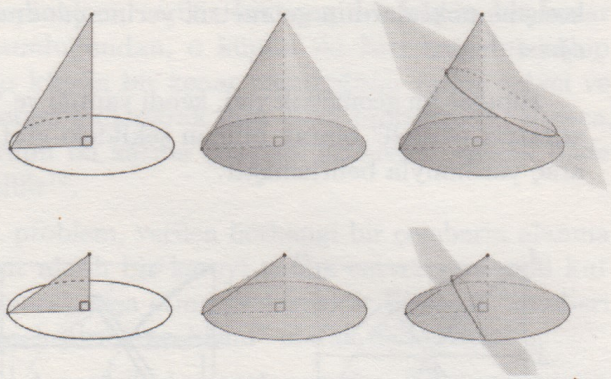
Burada, PH doğrusu, A, B ve C noktalarından geçen düzleme diktir, dolayısıyla bu düzlemde bulunan ve H noktasından geçen her doğruya da dik olur. O halde, PH doğrusu DH doğrusuna diktir. Benzer şekilde, AD doğrusu, α düzleminde bulunan ve D noktasından geçen her doğruya diktir. O halde, AD doğrusu da DH doğrusuna diktir.

Bu durumda, DEH üçgeni ikizkenar dik üçgendir ve α düzleminde DH doğrusuna D noktasında dik olan doğruya s doğrusu, DH doğrusuna da t doğrusu denirse, PH doğrusu s doğrusuna paralel olur ve nokta-nokta inşada olduğu gibi bir koordinat sistemi elde edilir.

Ayrıca A, B ve C noktalarından geçen düzlemin α düzlemine dik olduğunu ve hem α düzlemi hem de dik koni bu düzleme göre simetrik olduğundan, kesişimden elde edilen eğrinin de bu düzleme ve bu düzlemle α düzleminin kesişimi olan DH doğrusuna göre simetrik olduğunu belirtelim.

Şimdi, $|PH| = y$ ve $|DH| = x$ denirse, $|ED| = x$ ve $|EH| = x\sqrt{2}$ olur. EHP ve PHF üçgenlerinin benzerliklerinden $y^2 = x\sqrt{2}(2r - x\sqrt{2})$ veya $y^2 = 2x(r\sqrt{2} - x)$ olduğu görülür. Her P noktası için $(r\sqrt{2} - x) = |AE| - |DE| = |AD| = a$ olduğundan $y^2 = 2ax$ elde edilir. Böylece, kesişim eğrisi üzerindeki her noktanın denklemi sağladığı gösterilmiş oldu. Karşıt olarak, denklemde her y değerine karşılık tek bir x değeri elde edilebileceği için denklemi sağlayan her nokta kesişim üzerindedir. Çünkü aksi durum çelişkidir.

Menaechmus'un, ikizkenar olmayan bir dik üçgen alıp dik kenarları üzerinde tam tur döndürerek elde ettiği dik koni yüzeylerini, yine hipotenüse dik bir düzlemle aşağıdaki şekildeki gibi kesiştirerek elips ve hiperbolü de ilk bulan kişi olduğunu belirtelim[18].



Temel Düzlemsel Geometrik Yer Örnekleri ve Örnek Olimpiyat Problemleri

Bir geometrik yer belirleme problemini çözmek için, genelde, bilinen başka geometrik yer ve özelliklerden yararlanılır. Ek olarak, verilen problem analitik düzleme aktarılarak koordinat, vektör ve karmaşık sayı özelliklerinden de yararlanılabileceğini belirtelim. Düzlemde bazı temel geometrik yer örnekleri ve bunlarla ilgili şekiller aşağıda verilmiştir.

1. Sabit ve farklı iki noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının orta dikmesidir[19].

2. Kesişen sabit iki doğruya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, bu doğruların

[18] Menaechmus, hiperbolü tek kanatlı olarak elde edebilmiştir. Büyük geometrici olarak bilinen Pergeli Apollonius'a (MÖ 262-190) kadar bu eğriler -koninin tepe noktasında oluşan açı dikkate alınarak- *dik açılı koni kesiti* (parabol), *dar açılı koni kesiti* (elips) ve *geniş açılı koni kesiti* (hiperbol) olarak ifade edilmiştir. Eğrilere bugünkü isimlerini veren Apollonius'tur. Apollonius koniklerle ilgili kendinden önceki bilgileri bir araya getirerek ve kendi buluşlarını da ekleyerek *Konikler* adlı sekiz ciltlik bir kitap yazmıştır.

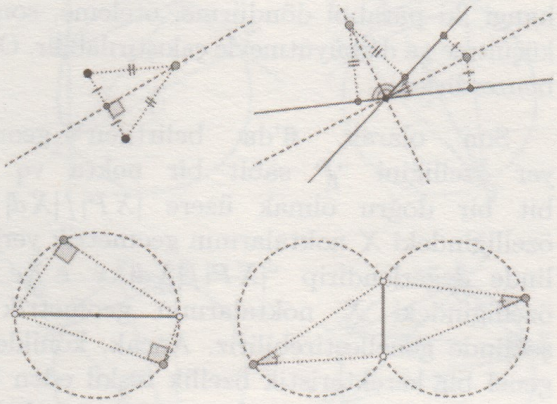
[19] Bu geometrik yerden yararlanarak, bir üçgenin köşelerine eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerinin bir tek noktadan ibaret olduğunu ve bu noktanın üçgenin köşelerinden geçen çemberin -yani, üçgenin çevrel çemberinin- merkezi olduğunu görebilirsiniz.

[20] Bu geometrik yerden yararlanarak, bir üçgenin kenarlarını taşıyan doğrulara eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerinin dört tane noktadan ibaret olduğunu ve bu noktaların, bu doğruların üçüne birden teğet olan dört çemberin -yani, üçgenin iç teğet ve dış teğet çemberlerinin- merkezleri olduğunu görebilirsiniz.

oluşturduğu açıları ikiye bölen açıortay doğrularının birleşimidir[20].

3. Bir doğru parçasını dik açı altında gören noktaların geometrik yeri, bu doğru parçasının uç noktaları hariç, doğru parçasını çap kabul eden çemberdir.

4. Bir doğru parçasını sabit bir açı altında gören noktaların geometrik yeri, doğru parçasının uç noktaları hariç, doğru parçasını kiriş kabul eden iki çember yayının birleşimidir.

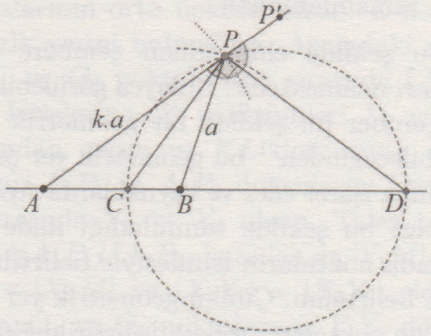


İyi bilinen geometrik özelliklerle ilgili bu temel geometrik yerlerin ispatını size bırakıyorum. Benzer çeşitli temel geometrik yerler için [8] no.lu kaynağa veya eski müfredat lise matematik kitaplarına başvurabilirsiniz.

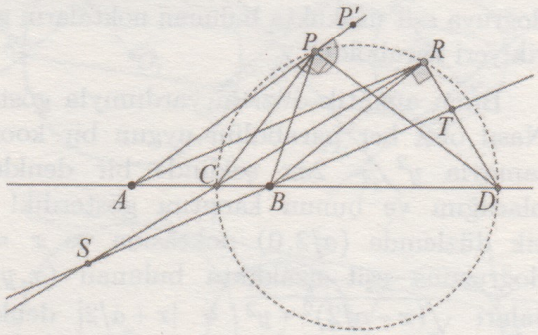
Temel geometrik yerlerden kolayca yeni geometrik yerler elde etmek mümkündür. Örneğin, **1**'de belirtilen geometrik yer özelliği, "A ve B sabit ve farklı iki nokta olmak üzere $|XA|/|XB| = 1$ özelliğindeki X noktalarının geometrik yeri" şeklinde değerlendirilip "$|XA|/|XB| = k$ $(k > 0)$ özelliğindeki X noktalarının geometrik yeri" şeklinde genelleştirilebilir. Aşağıda daha açık olarak ifade edilen bu geometrik yer $k \neq 1$ için bir çember belirtir ve olimpiyat sorularında zaman zaman karşımıza çıkar.

5. A ve B sabit ve farklı iki nokta, k 1'den farklı sabit ve pozitif bir reel sayı olmak üzere, $|XA|/|XB| = k$ özelliğindeki X noktalarının geometrik yeri, AB doğrusu üzerinde bu özelliği sağlayan iki noktayı birleştiren doğru parçasını çap kabul eden çemberdir.

İspat için şekildeki gibi, düzlemde sabit ve farklı A ve B noktaları, 1'den büyük sabit ve pozitif bir k reel sayısı ve $|PA|/|PB| = k$ özelliğini sağlayan bir P noktası alalım. Bu noktayı, uygun bir a değeri için, B merkezli a yarıçaplı çemberle A merkezli $k.a$ yarıçaplı çemberin bir kesişme noktası olarak elde edebiliriz. APB ve BPP' açılarının açıortaylarının AB doğrusunu kestiği noktalar şekildeki gibi C ve D olsun. İç ve dış açıortay teoremlerinden $|CA|/|CB| = |DA|/|DB| = k$'dir. O halde, C ve D noktaları geometrik yer özelliğini sağlar. Bununla birlikte, CPD açısı bir dik açı olduğundan P noktası CD çaplı çember üzerindedir. Buna göre, $|PA|/|PB| = k$ özelliğini sağlayan her P noktası, CD çaplı çember üzerindedir.



Buraya kadar olan ispat, geometrik yer özelliğini sağlayan noktaların CD çaplı çember üzerinde olduğunu gösterir. Ancak bu noktaların tam bir çember teşkil edeceğini göstermez. Bunun için, CD çaplı çember üzerindeki her noktanın da geometrik yer özelliğini sağladığı gösterilmelidir. Aşağıdaki şekildeki gibi, CD çaplı çember üzerinde C ve D noktalarından farklı herhangi bir R noktası alalım.



Bu R noktası için $|RA|/|RB| = k$ olduğunu göstermek istiyoruz. Şekilde $[RA]$, $[RB]$, $[RD]$ doğru parçalarını ve $[RC$ ışınını çizelim. B noktasından geçen ve RA doğrusuna paralel olan doğrunun $[RC$ ışınını kestiği noktaya S, $[RD]$ doğru parçasını kestiği noktaya da T diyelim. C ve D noktaları geometrik yer özelliğini sağladığından $|CA|/|CB| = |DA|/|DB| = k$'dir. Bu eşitlik kullanılarak, RAC ve SBC üçgenlerinin benzerliğinden $|RA|/|SB| = |AC|/|BC| = k$; RAD ve TBD üçgenlerinin benzerliğinden $|RA|/|TB| = |AD|/|BD| = k$ elde edilir. Bu durumda $|RA|/|SB| = |RA|/|TB|$ ve böylece $|SB| = |TB|$ bulunur. CRD bir dik açı olduğundan, RST bir dik üçgendir ve B noktası $[TS]$ hipotenüsünün orta noktası olduğundan $|BR| = |SB|$ ve $m(\widehat{BSR}) = m(\widehat{BRS})$'dir. Ek olarak, AR ve SB doğruları paralel olduğundan $m(\widehat{ARC}) = m(\widehat{BSR})$ ve böylece $m(\widehat{ARC}) = m(\widehat{BRC})$ elde edilir. O halde, RC doğrusu ARB açısının iç açıortayıdır.

Bu durumda, $|RA|/|RB| = |AC|/|BC| = k$ bulunur ki göstermek istediğimiz de budur.

Pozitif k sayısı 1'den küçükse $|PA| < |PB|$ olur ve P noktası A noktasına daha yakın olur. Dolayısıyla şekil A ve B noktalarının orta noktasına göre sağ yerine sol tarafta oluşur. Fakat ispat değişmez. İspat tamamlanmıştır.

Bu şekilde elde edilen çembere *Apollonius çemberi* denmektedir. Kolayca görülebileceği üzere, her çember bu şekilde bir geometrik yerle ifade edilebileceğinden[21] bu geometrik yer çemberin bir tanımına işaret eder ve kaynaklarda Apollonius'un, çemberi bu şekilde tanımladığı ifade edilir. Bu tanımda noktaların isimleriyle belirtilmesi gerektiğini belirtelim. Çünkü geometrik yer özelliğinde yer alan noktaların rolleri değiştirildiğinde ilkinden farklı bir çember daha elde edilecektir. Yani, verilen her farklı iki nokta için aynı k değerine sahip iki tane Apollonius çemberi vardır.

Verilen temel geometrik yerlerden elde edilen geometrik yerlere başka bir örnek daha verelim: **1**'de ifade edilen geometrik yer özelliğinde iki nokta yerine, bir nokta ve bir doğru alalım. Bu durumda elde edilen geometrik yer bir parabol olacaktır:

6) Düzlemde sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri paraboldür.

Bunu analitik düzlem yardımıyla gösterelim. Nasıl olsa her parabolün uygun bir koordinatlamayla $y^2 = 2ax$ şeklinde bir denkleminin olacağını ve bunun karşıtını gösterdik! Analitik düzlemde $(a/2, 0)$ noktasına ve $x = -a/2$ doğrusuna eşit uzaklıkta bulunan (x, y) noktaları $\sqrt{(x - a/2)^2 + y^2} = |x + a/2|$ denklemini sağlar. Denklemde her iki tarafın karesi alınıp sadeleştirmeler yapılırsa $y^2 = 2ax$ elde edilir. O halde, düzlemde sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bir parabol üzerindedir. Karşıt olarak, $y^2 = 2ax$ parabolü üzerinde alınan noktaların $(a/2, 0)$ noktası ve $x = -a/2$ doğrusuna eşit uzaklıkta olacağı da koordinatlar yardımıyla kolayca gösterilebilir; bunu size bıraktım. O halde, parabol üzerindeki noktalar, sabit bir nokta ve sabit bir doğruya eşit uzaklıktadır[22].

Burada ispatın özel bir parabol için yapılmış olduğu kanısında olabilirsiniz. Ancak dejenere olmayan tüm parabollerin, çemberler, kareler, eşkenar üçgenler, ikizkenar dik üçgenler gibi birbirine benzer şekiller olduğunu belirteyim. Yani, onlardan birini döndürüp, yansıtıp, öteleyip, sonra da küçülterek ya da büyüterek diğeri üzerine tam olarak çakıştırabilirsiniz. Bu gerçeği, parabolün nokta-doğru karakteristik özelliğiyle kolayca gösterebiliriz: Her dejenere olmayan parabol, düzlemde sabit bir nokta ve bu noktadan geçmeyen sabit bir doğruya eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yeridir. Böyle bir nokta-doğru çiftinin döndürme, öteleme, sonra da küçültme ya da büyütmeyle başka böyle bir nokta-doğru çiftine çakıştırılabileceği açıktır. Bu durumda bu iki nokta-doğru çiftinin belirlediği paraboller de çakışır. Yani, dejenere olmayan herhangi iki parabol döndürme, öteleme, sonra da küçültme ya da büyütmeyle çakıştırılabilir. O halde benzerdirler.

Son olarak, **6**'da belirtilen geometrik yer özelliğini "P sabit bir nokta ve d sabit bir doğru olmak üzere $|XP|/|Xd| = 1$ özelliğindeki X noktalarının geometrik yeri" şeklinde değerlendirip "$|XP|/|Xd| = e$ $(e > 0)$ özelliğindeki X noktalarının geometrik yeri" şeklinde genelleştirebiliriz. Ancak, konikler için genel bir karekteristik özellik teşkil eden bu geometrik yerin, özel olarak, $e = 1$ için parabol, $e < 1$ için elips, $e > 1$ için hiperbol belirttiğini ve bunun Dandelin küreleri yardımıyla yapılan şık bir ispatı olduğunu belirtmekle yetineceğiz.

Şimdi, çeşitli matematik olimpiyatlarından, temel geometrik özellikler ve burada verilen geometrik yerler dışına çıkmadan çözülebilen birer soru örneği verelim:

1) Amerika Matematik Olimpiyatı Sorusu (1973 CAMO)

$[AB]$ bir C çemberinin çap olmayan sabit bir kirişi ve $[XY]$ bu çemberin değişken bir çapıysa, AX ve BY doğrularının kesişiminin geometrik yerini bulunuz.

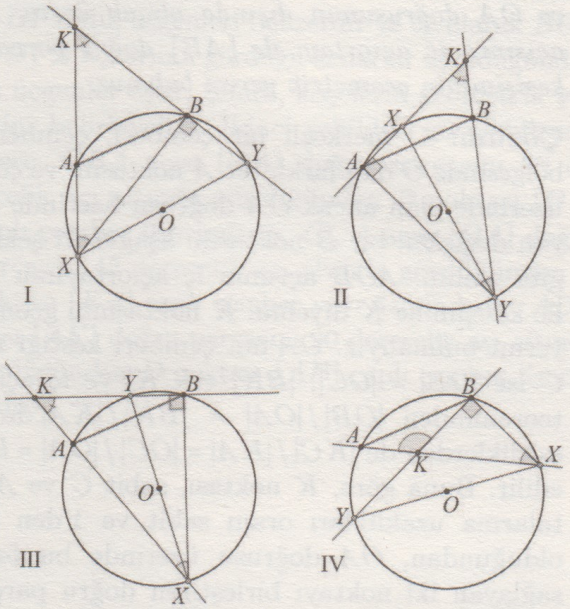
Çözüm: $[AB]$ doğru parçası, O merkezli bir C çemberinin çap olmayan sabit bir kirişi ve $[XY]$ de bu çemberin değişken bir çapı olsun. X ve Y noktalarının aşağıdaki şekillerde görüldüğü gibi A ve B noktalarına göre 4 farklı pozisyonu için AX ve BY doğrularının kesişim noktası olan K noktasının geometrik yerini belirleyelim.

Küçük AB yayının ölçüsü $2a$ derece olsun; $[AB]$ doğru parçası sabit olduğundan $2a$ değeri de sabittir. I. şekilde AXB açısı a ve XBY açısı 90 derece olduğundan AKB açısı sabit $90 - a$ derecedir. II. şekilde AYB açısı a ve XAY açısı 90 derece olduğundan AKB açısı sabit $90 - a$ derecedir. III. şekilde AXB açsısı a ve YBX açısı 90

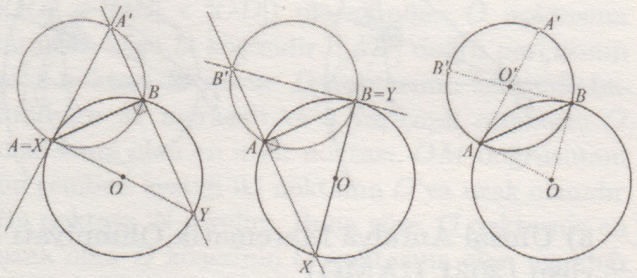
[21] Yani, verilen her çember için öyle A ve B noktaları ve 1'den farklı pozitif bir k sayısı vardır ki $|XA|/|XB| = k$ özelliğindeki X noktalarının geometrik yeri bu çemberdir.

[22] Parabol bu karakteristik özelliğiyle, "düzlemde sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri" şeklinde tamımlanabilir. Sabit nokta, sabit doğrunun üzerindeyse bu geometrik yer bir doğru belirtir.

derece olduğundan AKB açısı sabit $90 - a$ derecedir. IV. şekilde AXB açısı a ve YBX açısı 90 derece olduğundan AKB açısının ölçüsü sabit $90+a$ derecedir. K noktası $[AB]$ doğru parçasını, AB doğrusunun her iki tarafında birbirini 180 dereceye tamamlayan iki sabit açı altında gördüğü için bir çember üzerindedir.



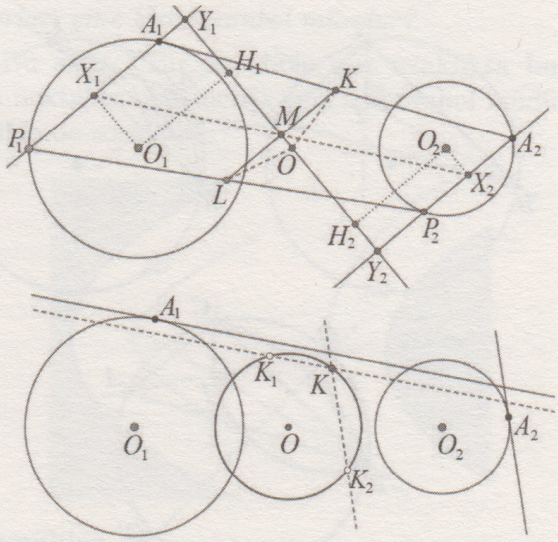
Ancak $A = X$ için AX doğrusu ve $B = Y$ için BY doğrusu oluşmaz. Bu durumda K noktası da oluşmaz. $A = X$ için BY doğrusunun çemberi kestiği A' noktası ve $B = Y$ için AX doğrusunun çemberi kestiği B' noktası geometrik yerden çıkarılmalıdır. Bu durumlarda ABA' ve BAB' açıları 90 derece olacağından $[AA']$ ve $[BB']$ doğru parçaları geometrik yeri belirleyen çemberin iki çapıdır. Bu doğru parçalarının kesişimi O' noktası ise, K noktasının geometrik yeri O' merkezli, A ve B noktalarından geçen çemberden A' ve B' noktalarının atılmasıyla elde edilir.



2) İngiltere Matematik Olimpiyatı Sorusu (1986 BMO 2. Aşama)

A_1 ve A_2, sırasıyla C_1 ve C_2 çemberleri üzerinde sabit noktalar; P_1 de C_1 çemberi üzerinde değişken bir noktadır. C_2 çemberinin $[A_2P_2]$ kirişi, C_1 çemberinin $[A_1P_1]$ kirişine paralel olduğuna göre $[P_1P_2]$ doğru parçasının orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: A_1 ve A_2, sırasıyla, O_1 ve O_2 merkezli C_1 ve C_2 çemberleri üzerinde sabit noktalar; P_1, C_1 çemberi üzerinde değişken bir nokta; C_2 çemberinin $[A_2P_2]$ kirişi, C_1 çemberinin $[A_1P_1]$ kirişine paralel; K ve L, sırasıyla $[A_1A_2]$ ve $[P_1P_2]$ doğru parçalarının orta noktaları; M noktası da K ve L noktalarının orta noktası olsun. L noktasının geometrik yerini bulmalıyız. Aşağıdaki şekildeki gibi, O_1 ve O_2 noktalarının sırasıyla $[A_1P_1]$ ve $[A_2P_2]$ kirişlerine dik izdüşümleri X_1 ve X_2; M noktasından geçen ve KL doğrusuna dik olan doğrunun A_1P_1 ve A_2P_2 doğrularını kestiği noktalar sırasıyla Y_1 ve Y_2 olsun. Tales teoreminden $KL//A_1P_1//A_2P_2$, buradan da $|Y_1M| = |Y_2M|$, $|X_1M| = |X_2M|$ ve $|X_1Y_1| = |X_2Y_2|$ elde edilir. O halde, O_1 ve O_2 noktalarının Y_1Y_2 doğrusuna uzaklıkları eşittir. Yani O_1 ve O_2 noktalarının orta noktası bu doğru üzerindedir. Bu noktaya O diyelim. Buna göre, O noktası $[KL]$ doğru parçasının orta dikmesi üzerindedir. O halde, $|OK| = |OL|$'dir. O ve K sabit noktalar olduğundan $|OL|$ de sabittir, yani L noktası O merkezli $[OK]$ yarıçaplı çember üzerindedir.

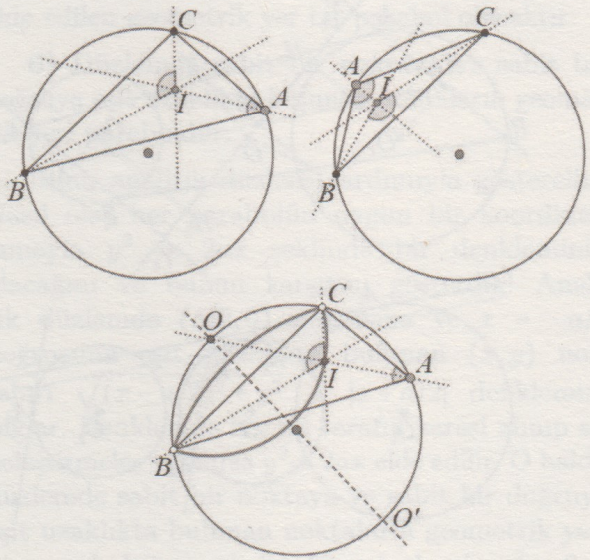


Ancak P_1 noktası A_1 noktası üzerine geldiğinde ve P_2 noktası A_2 noktası üzerine geldiğinde sırasıyla $[A_1P_1]$ ve $[A_2P_2]$ kirişleri oluşmaz, paralellikten de söz edilemez. Bu durumlarda elde edilen L noktaları geometrik yere dahil edilmez. P_1 noktası A_1 noktasına yaklaşırken P_1A_1 doğrusu C_1 çemberinin A_1 noktasındaki teğetine, KL doğrusu da K noktasından geçen ve bu teğete paralel olan doğruya yaklaşır; ancak bu doğru elde edilemez. Benzer durum P_2 ve A_2 noktaları için de geçerlidir. K noktasından geçen ve bu teğetlere paralel olan doğruların, merkezi O noktası olan ve K noktasından geçen çemberi kestiği noktalar K_1 ve K_2 olsun. O halde, L noktasının geometrik yeri, merkezi O noktası olan ve K noktasından geçen çemberden K_1 ve K_2 noktalarının çıkarılmasıyla elde edilir.

3) Meksika Matematik Olimpiyat Sorusu (1988 OMM)

B ve C bir çember üzerinde sabit iki noktadır. A da aynı çember üzerinde değişken bir noktadır. A değişirken ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezinin geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: B ve C bir çember üzerinde sabit iki nokta; A, aynı çember üzerinde değişken bir nokta ve I, değişken ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi -yani, üçgenin iç açıortaylarının kesişme noktası- olsun. A açısı $[BC]$ doğru parçasını BC doğrusunun her iki tarafında sabit açı altında görür. B ve C noktalarının ayırdığı yaylardan küçük veya eşit olanının ölçüsü 2α derece olsun. Aşağıdaki ilk şekilde $m(A) = \alpha$, dolayısıyla $m(BIC) = 90 + \alpha/2$; ikinci şekilde $m(A) = 180 - \alpha$, dolayısıyla $m(BIC) = 180 - \alpha/2$'dir. O halde, BIC açısı da $[BC]$ doğru parçasını BC doğrusunun her iki tarafında sabit açı altında görür. Bu durumda I, iki yay üzerindedir. İlk şekilde, I noktasının üzerinde olduğu yayın ölçüsü $180 - \alpha$'dır.

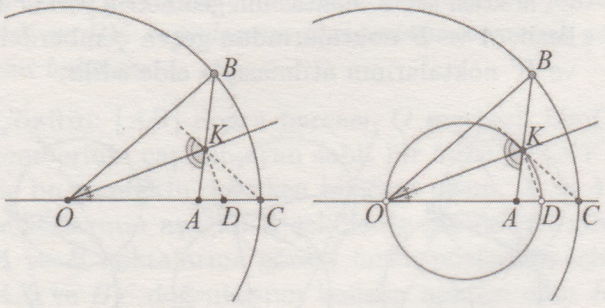


Ancak ikinci şekilde A açısı da $180 - \alpha$ olduğundan, ilk şekilde A'nın gördüğü BC yayının orta noktası bu çember yayının merkezidir. Yine ikinci şekilde, I noktasının geometrik yerinin oluşturduğu yayın ölçüsü α'dır. Ancak ilk şekilde A açısı da α olduğundan, ikinci şekilde A nın gördüğü BC yayının orta noktası bu çember yayının merkezidir. Burada A noktası B ve C üzerine geldiğinde üçgen oluşmayacağından B ve C noktaları yaylara ait olmaz. O halde, $[BC]$ doğru parçasının orta dikmesinin verilen çemberi kestiği noktalar şekildeki gibi O ve O' ise, I noktasının geometrik yeri O merkezli B noktasından geçen çemberin, verilen çemberin iç bölgesinde kalan yayı ile O' merkezli B noktasından geçen çemberin, verilen çemberin iç bölgesinde kalan yayının birleşimidir.

4) Tübitak Ulusal Matematik Olimpiyatı Sorusu (2000-2. Aşama)

Merkezi O ile gösterilen bir çember ve bu çemberin iç bölgesinde O noktasından farklı bir A noktası alınıyor. B noktası çemberin üzerinde ve OA doğrusunun dışında olmak üzere, AOB açısının iç açıortayı ile [AB] doğru parçasının kesişiminin geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: O merkezli bir çemberi, çemberin iç bölgesinde O'dan farklı bir A noktasını ve çember üzerinde olan ancak OA doğrusu üzerinde olmayan değişken bir B noktasını aşağıdaki şekildeki gibi alalım. AOB açısının iç açıortayının $[AB]$ ile kesişimine K diyelim. K noktasının geometrik yerini bulmalıyız. OA'nın çemberi kestiği nokta C ise $|OB| = |OC|$, $|BK| = |CK|$ ve iç açıortay teoreminden $|OB|/|OA| = |BK|/|KA|$'dır. Bu eşitliklerden de $|KC|/|KA| = |OC|/|OA| = k$ elde edilir. Buna göre, K noktası, sabit C ve A noktalarına uzaklıkları oranı sabit ve 1'den farklı olduğundan, OA doğrusu üzerinde bu özelliği sağlayan iki noktayı birleştiren doğru parçasını çap kabul eden Apollonius çemberi üzerindedir. Burada OK doğrusu AKC üçgenindeki K açısının dış açıortayıdır. Ayrıca K açısının iç açıortayının OA doğrusunu kestiği noktayı D ile gösterirsek $|DC|/|DA| = |OC|/|OA| = k$ elde edilir. K noktası $[OD]$ çaplı çember üzerindedir. Ancak B noktası OA dışında olduğundan K noktası, O veya D olamaz. O halde, K noktasının geometrik yeri, OD çaplı çemberden O ve D noktalarının çıkarılmasıyla elde edilir.



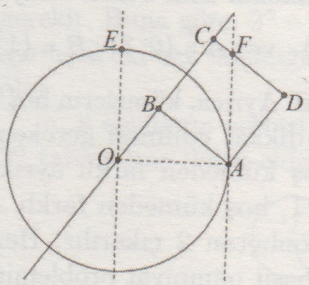
5) Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatı Sorusu (2021 UAMO)

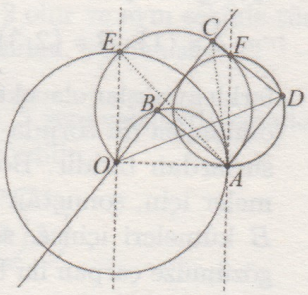
Düzlemde yarıçapı 10 olan O merkezli bir çember ve bu çemberin üzerinde sabit bir A noktası verilsin. Bir ABCD karesinin BC kenarından geçen doğrunun O noktasından geçtiği bilindiğine göre, bu karenin bir köşesinin O noktasına olan uzaklığı tamsayı olarak en çok kaç olabilir?

Çözüm: Aşağıdaki ilk şekli göz önüne alabiliriz. B ve C noktalarının rolleri değişse de sonuç

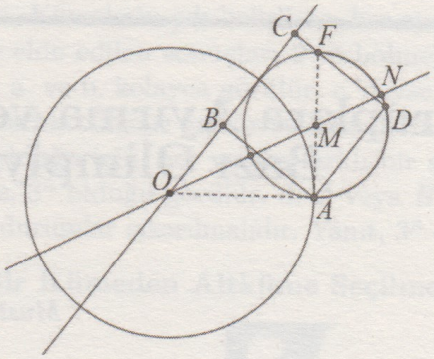
değişmeyecektir. Ayrıca simetriden, sadece OA doğrusunun üstünde kalan geometrik yerleri dikkate almak yeterlidir.

Şimdi, O ve A noktalarından OA doğrusuna dik olan doğruları çizelim. Bu doğruların sırasıyla çemberi ve CD doğrusunu kestiği noktalara şekildeki gibi E ve F diyelim. Bu durumda BOA ve DFA dik üçgenleri benzerdir ve ek olarak BOA ve DFA açılarının gördüğü kenarlar eş olduğundan bu üçgenler eştir. Şimdi, köşelerin geometrik yerlerini belirleyelim. İkinci şekilden görülebileceği üzere, OBA açısı $[OA]$ doğru parçasını 90 derecelik açı altında gördüğünden B noktası $[OA]$ çaplı çember üzerindedir. OCA açısı $[OA]$ doğru parçasını 45 derecelik açı altında gördüğünden C noktası $[EA]$ çaplı çember yayı üzerindedir. ADF açısı $[AF]$ doğru parçasını 90 derecelik açı altında gördüğünden D noktası $[AF]$ çaplı çember üzerindedir.





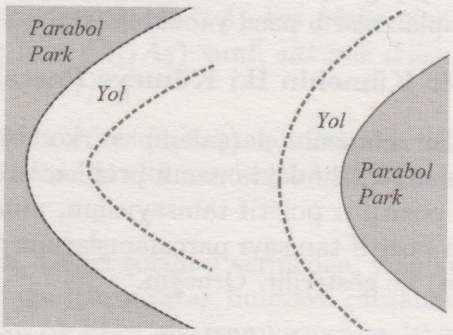
D noktası O merkezli çember dışında kaldığında $|OB| < |OC| < |OD|$ (veya köşenin seçimine göre $|OC| < |OB| < |OD|$) olacağından O noktasına en uzak köşe D köşesidir. $[AF]$ doğru parçasının orta noktası M olsun. D noktasının üzerinde bulunduğu M merkezli ve 5 yarıçaplı çemberin O noktasına olan en uzak noktası, OM doğrusunun bu çemberi kestiği iki noktanın O'ya uzak olanıdır. Bu noktaya N diyelim. Buna göre, O noktasına en uzak olan D köşesinin O noktasına olan uzaklığı $|OD| \leq |ON| = |OM| + |MN| = 5\sqrt{5} + 5$'tir. Bu durumda, x tamsayı ve $x \leq \sqrt{125}$ ya da $x \leq 11$ olduğundan, $|OD|$ uzaklığı tamsayı olarak en çok 16 olabilir.



Geometride hemen her özellik bir geometrik yere işaret edebildiğinden, geometrik yer kavramı çok çeşitli geometri konularıyla ilişkilendirilebilir ve bu konular özelinde sınıflandırılabilen geometrik yer örnekleri de istenildiği kadar çoğaltılabilir. Burada Ali Nesin'in, dergide yeni başladığı geometrik yer problemleri serisine de dikkatinizi çekmek isterim: [9]. Çözümünü size bıraktığım bir geometrik yer sorusuyla yazıyı bitiriyorum:

Soru: *Sınırları, aşağıda gösterildiği gibi birer parabol olan çocuk parklarının dışına sabit genişlikte bisiklet yolları yapılacaktır. Yapılacak yolların yeni sınırları yine birer parabol mü olur?*

Bu soru, "Bir parabole eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri iki parabol müdür?" şekilde de sorulabilir[23].



Kaynaklar

[1] R. Kaya, Projektif Geometri, Anadolu Üniversitesi Yayınları, 1992.
[2] A. Mader, A Euclidean model for Euclidean geometry, The American Mathematical Monthly, 96 (1989), No. 1, 43-49.
[3] E. F. Krause, Taxicab Geometry, Dover Publications, 1986.
[4] R. Kaya, Analitik Geometri, Platform Yayınları, 2020.
[5] M. Özdemir, Analitik Geometri, Altın Nokta Yayınları, 6.Baskı, 2021.
[6] T. M. Apostol, M.A. Mnatsakanian, "New Horizons In Geometry", The Mathematical Association of America, 2012.
[7] H. B. Çolakoğlu, A generalization of the Minkowski distance and new definitions of the central conics, Turkish Journal of Mathematics, 44 (2020), No.1, 319-333.
[8] B. V. Kutuzov (Çeviren: Hüseyin Demir), Geometri (Cilt I), Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı 19, Bölüm 2.
[9] A. Nesin, Geometrik yer problemleri, Matematik Dünyası Dergisi, 110 (2021), 91-93.

[23] Genel olarak, bir N noktasının bir S şekline uzaklığı $\min\{|NX| : X \in S\}$ şeklinde tanımlanır. A noktası, parabol üzerindeki bir P noktasından çizilen normalin (o noktadaki teğete dik olan doğru) üzerinde ve parabolün kollarına göre altında kalan bölgedeyse, A noktasının parabole olan uzaklığının $|AP|$'ye eşit olduğunu kolayca görebilirsiniz. Parabolün kollarının baktığı tarafta da durum benzerdir, ancak diğer kola olan uzaklıkla karşılaştırmak gerekir. Sorumuzda bu karşılaştırmaya gerek kalmayacak şekilde bir yol yapılacağını kabul edebilirsiniz.