DİFERENSİYEL GEOMETRİ 2 - 22.08.2016 - FİNAL
ADI SOYADI : .... NUMARA : ....

1. $\alpha(u) = (\ln u, 0, u)$ **eğrisinin** z **ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin parametrik denklemini, birim normalini ve Gauss dönüşümünü bulunuz. (10 puan)**

2. $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ **yüzeyinin üzerindeki** $\alpha(t) = \varphi(\cosh t, \sinh t)$ **eğrisinin,** $\alpha(0)$ **noktasındaki normal ve geodezik eğriliğini bulunuz. Bu eğrinin** $\alpha(0)$ **noktasındaki eğriliği nedir? (10 puan)**

3. $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ **yüzeyinin,** $p = \varphi(1,1)$ **noktasındaki birinci ve ikinci temel form katsayılarını bulunuz. (10 puan)**

4. $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ **yüzeyinin,** $p = \varphi(1,1)$ **noktasındaki şekil operatörünü bulunuz. (10 puan)**

5. $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ **yüzeyinin,** $p = \varphi(1,1)$ **noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz. (5 puan)**

6. $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ **yüzeyinin** $p = \varphi(1,1)$ **noktasındaki,** $v_p = 2\varphi_u(q) + 3\varphi_v(q)$ **tanjant vektörü doğrultusundaki, normal eğriliğini bulunuz. (10 puan)**

7. Bir yüzeyin bir tanjant vektör doğrultusundaki Normal eğriliğin, tanjant vektörün büyüklüğüne bağlı olmadığını gösteriniz. (5 puan)

8) Bir $\mathbb{M}$ yüzeyinin p noktasındaki şekil operatörü, $S_p = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, a) $k_1(p)$, $k_2(p) = ?$ b) p noktasında yüzeyin karakterini belirtiniz. c) k_1 eğriliğine karşılık gelen asli vektörü bulunuz. (10 puan)

9) Bir Minimal yüzeyin Gauss eğriliğinin negatif olduğunu kanıtlayınız. (10 puan)

10) $\mathbb{M}$ yüzeyi üzerindeki birim hızlı bir α eğrisinin normali ile yüzeyin normali arasındaki açı θ ise, $\kappa_n = \kappa \cos\theta$ olduğunu kanıtlayınız. (10 puan)

11. $\mathbb{M}$, $\mathbb{R}^3$ de bir yüzeyin asli eğrilikleri k_1, k_2; asli vektörleri de $e_{1p}, e_{2p} \in T_p(\mathbb{M})$ olsun. $k_1 \neq k_2$ ise $e_{1p} \perp e_{2p}$ olduğunu kanıtlayınız. (10 puan)

12. $\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$ yüzeyinin Gauss eğriliğinin, $K = \dfrac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{\left(1 + f_u^2 + f_v^2\right)^2}$ olduğunu kanıtlayınız. (10 puan)

Başarılar

Doç.Dr. Mustafa Özdemir

DİFERENSİYEL GEOMETRİ 2 - 22.08.2016 - FİNAL
ADI SOYADI : .... NUMARA : ....

1. $\boldsymbol{\alpha(u) = (\ln u, 0, u)}$ **eğrisinin z ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin parametrik denklemini, birim normalini ve Gauss dönüşümünü bulunuz. (10 puan)**

Çözüm : Dönel yüzeyin denklemi

$$\varphi(u,v) = (\ln u \cos v, \ln u \sin v, u)$$

dir.

$$\varphi_u = \left(\frac{\cos v}{u}, \frac{\sin v}{u}, 1\right) \text{ ve } \varphi_v = (-\ln u \sin v, \ln u \cos v, 0)$$

olduğundan,

$$\varphi_u \times \varphi_v = \frac{\ln u}{u} \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \cos v & \sin v & u \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{\ln u}{u}(-u\cos v, -u \sin v, 1)$$

bulunur. O halde,

$$\mathbf{N} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{(-u\cos v, -u\sin v, 1)}{\sqrt{u^2+1}}$$

olur. Gauss dönüşümü,

$$G(p) = \mathbf{N}(\varphi(q)) = \frac{(-u\cos v, -u\sin v, 1)}{\sqrt{u^2+1}}$$

şeklinde tanımlanır.

2. $\boldsymbol{\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)}$ **yüzeyinin üzerindeki $\boldsymbol{\alpha(t) = \varphi(\cosh t, \sinh t)}$ eğrisinin, $\boldsymbol{\alpha(0)}$ noktasındaki normal ve geodezik eğriliğini bulunuz. Bu eğrinin $\boldsymbol{\alpha(0)}$ noktasındaki eğriliği nedir? (10 puan)**

Çözüm : $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, 1)$ eğrisidir. Yüzeyin $\alpha(t)$ noktasındaki normalini bulalım.

$$\varphi_u = (1, 0, 2u) \text{ ve } \varphi_v = (0, 1, -2v)$$

olduğundan,

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (-2u, 2v, 1) \Rightarrow \mathbf{N}_p = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

bulunur. O halde,

$$\mathbf{N}(\alpha(t)) = \frac{(-2\cosh t, 2\sinh t, 1)}{\sqrt{4\cosh^2 t + 4\sinh^2 t + 1}}$$

olur. Diğer yandan, $\alpha'(t) = (\sinh t, \cosh t, 0)$ ve $\alpha''(t) = (\cosh t, \sinh t, 0)$ olduğundan,

$$\kappa_n(0) = \frac{\langle \alpha''(0), \mathbf{N}(\alpha(0))\rangle}{\|\alpha'(0)\|^2} = \frac{\langle (1,0,0), (-2,0,1)/\sqrt{5}\rangle}{\langle (0,1,0), (0,1,0)\rangle} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\kappa_g(0) = \frac{\det(\alpha'(0), \alpha''(0), \mathbf{N}_p)}{\|\alpha'(0)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

bulunur. Buradan, $\kappa(0) = \sqrt{\kappa_g^2(0) + \kappa_n^2(0)} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 1$ olur.

3. $\boldsymbol{\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)}$ **yüzeyinin, $\boldsymbol{p = \varphi(1,1)}$ noktasındaki birinci ve ikinci temel form katsayılarını bulunuz. (10 puan)**

Çözüm :
$\varphi_u = (1, 0, 2u)$ ise, $E = 1 + 4u^2$ ve $E_p = 5$
$\varphi_v = (0, 1, -2v)$ ise $F = -4uv$, $G = 1 + 4v^2$ ve $F_p = -4$, $G_p = 5$
$\mathbf{N} = \dfrac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$ ise $\mathbf{N}_p = \dfrac{1}{3}(-2, 2, 1)$'dir.
$\varphi_{uu} = (0,0,2)$ ise $e = 2/\sqrt{4u^2+4v^2+1}$ ve $e_p = 2/3$.
$\varphi_{uv} = (0,0,0)$ ise $f = 0$ ve $f_p = 0$
$\varphi_{vv} = (0,0,-2)$ ise $g = -2/\sqrt{4u^2+4v^2+1}$ ve $g_p = -2/3$
olur.

4. $\boldsymbol{\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)}$ **yüzeyinin, $\boldsymbol{p = \varphi(1,1)}$ noktasındaki şekil operatörünü bulunuz. (10 puan)**

Çözüm : $S_p = \begin{bmatrix} E_p & F_p \\ F_p & G_p \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_p & f_p \\ f_p & g_p \end{bmatrix}$ eşitliğinden,

$$S_p = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{bmatrix} = \frac{2}{27}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

bulunur.

5. $\boldsymbol{\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)}$ **yüzeyinin, $\boldsymbol{p = \varphi(1,1)}$ noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz. (5 puan)**

Çözüm : $K(p) = \det S_p = \dfrac{2^2}{27^2}\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -\dfrac{4}{81}$'dir.
$H(p) = \dfrac{1}{2} iz S_p = 0.$

6. $\boldsymbol{\varphi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)}$ **yüzeyinin $\boldsymbol{p = \varphi(1,1)}$ noktasındaki, $\mathbf{v_p} = 1\varphi_u(q) + 1\varphi_v(q)$ tanjant vektörü doğrultusundaki, normal eğriliğini bulunuz. (10 puan)**

Çözüm : 1. Yol. $\mathbf{v}_p = a\varphi_u(q) + b\varphi_v(q)$ için,

$$\kappa_n(p) = \frac{e_p a^2 + 2f_p ab + g_p b^2}{E_p a^2 + 2F_p ab + G_p b^2}$$

eşitliğinde,

$$E_p = 5,\ F_p = -4,\ G_p = 5,\ e_p = 2/3,\ f_p = 0 \text{ ve } g_p = -2/3$$

yazılırsa, $a = 1$ ve $b = 1$ olduğundan,

$$\kappa_n(p) = \frac{(2/3)1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-2/3)1}{5 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) \cdot 1 + 5 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$$

elde edilir.

2. Yol. $S(\mathbf{v}_p) = \dfrac{2}{27}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{2}{27}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ olur.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p &= 1\varphi_u(q) + 1\varphi_v(q) = ((1,0,2) + (0,1,-2)) = (1,1,0) \\ S(\mathbf{v}_p) &= \frac{2}{27}(\varphi_u(q) - \varphi_v(q)) = \frac{2}{27}((1,0,2) - (0,1,-2)) \\ &= \frac{4}{27}(1,-1,4). \end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa,

$$\kappa_n(p) = \frac{\langle S(\mathbf{v}_p), \mathbf{v}_p\rangle}{\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_p\rangle} = \frac{(4/27)\langle (1,-1,4), (1,1,0)\rangle}{2} = 0$$

elde edilir.

7. Bir yüzeyin bir tanjant vektör doğrultusundaki Normal eğriliğin, tanjant vektörün büyüklüğüne bağlı olmadığını, sadece doğrultuya bağlı olduğunu gösteriniz. (5 puan)

Çözüm : $p \in \mathbb{M}$ ve $\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \in T_p(\mathbb{M})$ olsun. $\lambda \neq 1$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\mathbf{v}_p = \lambda \mathbf{w}_p$ olduğunu kabul edelim. Yani, $\mathbf{v}_p$ ve $\mathbf{w}_p$ vektörleri aynı doğrultudaki birbirinden farklı iki vektör olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}\kappa_n(\mathbf{v}_p) &= \frac{\langle S(\mathbf{v}_p), \mathbf{v}_p\rangle}{\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_p\rangle} = \frac{\langle S(\lambda \mathbf{w}_p), \lambda \mathbf{w}_p\rangle}{\langle \lambda \mathbf{w}_p, \lambda \mathbf{w}_p\rangle} \\ &= \frac{\lambda^2 \langle S(\mathbf{w}_p), \mathbf{w}_p\rangle}{\lambda^2 \langle \mathbf{w}_p, \mathbf{w}_p\rangle} = \frac{\langle S(\mathbf{w}_p), \mathbf{w}_p\rangle}{\langle \mathbf{w}_p, \mathbf{w}_p\rangle} = \kappa_n(\mathbf{w}_p)\end{aligned}$$

bulunur.

8) Bir $\mathbb{M}$ yüzeyinin p noktasındaki şekil operatörü, $S_p = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, a) $k_1(p)$, $k_2(p) = ?$
b) p noktasında yüzeyin karakterini belirtiniz. c) k_1 eğriliğine karşılık gelen asli vektörü bulunuz. (10 puan)

Çözüm : **a)** $\det(\lambda I - S_p) = 0$ denkleminden,

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \text{ ise } \lambda = -2 \text{ ve } \lambda = 4$$

olur. $k_1 = -2$ ve $k_2 = 4$ bulunur.
b) $K(p) = k_1 k_2 = -8 < 0$ olduğundan, yüzey p noktasında hiperboliktir.
c) $k_1 = -2$ için,

$$-2I - S_p = \begin{bmatrix} -2-1 & -3 \\ -3 & -2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan, $x + y = 0$, $y = t$ ise $x = -t$ olur. O halde,

$$e_{1p} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}}$$

bulunur.

9) Bir Minimal yüzeyin Gauss eğriliğinin negatif olduğunu kanıtlayınız. (10 puan)

Çözüm : $H = 0$ ise, $H = (k_1 + k_2)/2 = 0$ ise $k_1 = -k_2$ olur. Bu durumda,

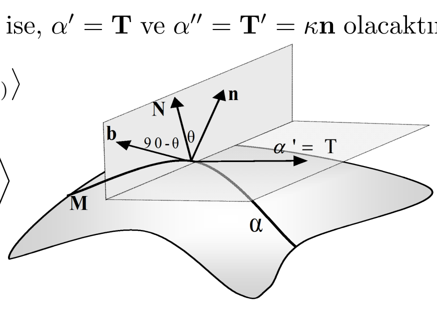
$$K = k_1 k_2 = (-k_2) k_2 = -k_2^2 \leq 0$$

elde edilir.

10) $\mathbb{M}$ yüzeyi üzerindeki birim hızlı bir α eğrisinin, eğriliği κ, Frenet çatısı ise $\{\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olsun. Yüzeyin normali $\mathbf{N}$ ve $\alpha(t)$ noktasında, yüzeyin normali ile eğrinin normali arasındaki açı θ ise, $\kappa_n = \kappa \cos\theta$ olduğunu kanıtlayınız. (10 puan)

Çözüm : α birim hızlı ise, $\alpha' = \mathbf{T}$ ve $\alpha'' = \mathbf{T}' = \kappa \mathbf{n}$ olacaktır. Buna göre,
$\kappa_n(\alpha'(t)) = \langle \alpha''(t), \mathbf{N}_{\alpha(t)} \rangle$
olduğundan,

$$\begin{aligned} &= \left\langle \kappa \mathbf{n}(\alpha(t)), \mathbf{N}_{\alpha(t)} \right\rangle \\ &= \kappa(t) \left\langle \mathbf{n}_p, \mathbf{N}_{\alpha(t)} \right\rangle \\ &= \kappa(t) \cos\theta(t) \end{aligned}$$



elde edilir.

11. $\mathbb{M}$, $\mathbb{R}^3$ de bir yüzey olmak üzere, k_1 ve k_2 asli eğrilikleri birbirinden farklı olmak üzere, k_1 ve k_2'ye karşılık gelen asli vektörler $\mathbf{e}_{1p}, \mathbf{e}_{2p} \in T_p(\mathbb{M})$ ise $\mathbf{e}_{1p} \perp \mathbf{e}_{2p}$ olduğunu kanıtlayınız. (15 puan)

Çözüm : $S(\mathbf{e}_{1p}) = k_1(p)\mathbf{e}_{1p}$ ve $S(\mathbf{e}_{2p}) = k_2(p)\mathbf{e}_{2p}$ yazabiliriz. Diğer yandan, S_p self-adjoint olduğundan,

$$\langle S(\mathbf{e}_{1p}), \mathbf{e}_{2p}\rangle = \langle \mathbf{e}_{1p}, S(\mathbf{e}_{2p})\rangle$$

eşitliği vardır. Buradan,

$$\begin{aligned}\langle k_1(p)\mathbf{e}_{1p}, \mathbf{e}_{2p}\rangle &= \langle \mathbf{e}_{1p}, k_2(p)\mathbf{e}_{2p}\rangle \\ k_1(p)\langle \mathbf{e}_{1p}, \mathbf{e}_{2p}\rangle &= k_2(p)\langle \mathbf{e}_{1p}, \mathbf{e}_{2p}\rangle\end{aligned}$$

eşitliğinden, $(k_1(p) - k_2(p))\langle \mathbf{e}_{1p}, \mathbf{e}_{2p}\rangle = 0$ elde edilir. Buna göre, $k_1(p) \neq k_2(p)$ ise $\mathbf{e}_{1p} \perp \mathbf{e}_{2p}$ olur.

12. $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ yüzeyinin Gauss eğriliğinin, $K = \dfrac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}$ olduğunu kanıtlayınız. (10 puan)

Çözüm : $\varphi_u = (1, 0, f_u)$, $\varphi_v = (0, 1, f_v)$ ve

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1)$$

olduğundan,

$$\mathbf{N} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}$$

olur. $\varphi_{uu} = (0, 0, f_{uu})$, $\varphi_{uv} = (0, 0, f_{uv})$ ve $\varphi_{vv} = (0, 0, f_{vv})$ olduğundan,

$$E = 1 + f_u^2,\ F = f_u f_v,\ G = 1 + f_v^2$$

ve $\lambda = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}$ olmak üzere,

$$e = \frac{f_{uu}}{\lambda},\ f = \frac{f_{uv}}{\lambda},\ g = \frac{f_{vv}}{\lambda}$$

elde edilir. Buradan,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\dfrac{f_{uu}}{\lambda}\dfrac{f_{vv}}{\lambda} - \left(\dfrac{f_{uv}}{\lambda}\right)^2}{(1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - f_u^2 f_v^2} = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{(f_u^2 + f_v^2 + 1)^2}$$

olur.

Doç.Dr. Mustafa Özdemir