



AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ
BİTİRME ÖDEVİ
ARASINAV SORULARI

ADI SOYADI :

NO :

A A A A A A A

SINAV TARİHİ VE SAATİ : 5 Mayıs 2016

Bu sınav 40 sorudan oluşmaktadır ve sınav süresi 90 dakikadır.

SINAVLA İLGİLİ UYULACAK KURALLAR

1. Cevap kağıdınıza soru kitapçığınızın türünü işaretlemeyi unutmayınız.
2. Her soru eşit değerde olup, puanlama yapılırken doğru cevaplarınızın sayısı hesaplanacaktır.
3. Sınavda pergel, cetvel, hesap makinesi gibi yardımcı araçlar ve müsvedde kağıdı kullanılması yasaktır. Tüm işlemlerinizi soru kitapçığı üzerinde yapınız.
4. Sınav süresince görevlilerle konuşulmayacak ve onlara soru sorulmayacaktır. Yanlış olduğunu düşündüğünüz sorularla ilgili, görevlilere soru sormayınız. Bu çok küçük bir olasılık olsa da, jüri bu tür durumları daha sonra değerlendirecektir.
5. Öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.
6. Dışarıya çıkan bir aday tekrar sınava alınmayacaktır.
7. Cep telefonları sınav süresince tamamen kapalı durumda ve masa üstünde bulundurulacaktır.
8. Soru kitapçıkları toplanacaktır.

1. $\alpha(t) = (2t - 1, kt + 2, t - 2)$ ve $\frac{x - 1}{3} = y = z - 1$ doğrularının kesişmesi için k kaç olmalıdır?

- A) 1 B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) 4 E) $\frac{2}{7}$

Çözüm :1. Yol : $u_1 = (2, k, 1)$, $u_2 = (3, 1, 1)$ vektörleriyle $P(-1, 2, -2)$ ve $Q(1, 0, 1)$ ile oluşturulan $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 3)$ vektörü aynı düzlemde olmalıdır. Buna göre,

$$\det \begin{bmatrix} 2 & k & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 2 - 7k = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{7} \text{ bulunur.}$$

2. **Yol.** $x = 2t - 1 = 3\lambda + 1$ ve $z = t - 2 = \lambda + 1$ eşitliklerinden, $\begin{cases} 2t - 3\lambda = 2 \\ t - \lambda = 3 \end{cases}$ denklemleri elde edilir. Buradan, $t = 7$, $\lambda = 4$ olur. Buna göre, $y = 4$ ve $k7 + 2 = 4 \Rightarrow k = 2/7$ bulunur.

2. $\alpha(t) = (2t - 1, t + 2, t - 2)$ ve $\beta(s) = (s, 2s + 1, s + 2)$ doğrularına paralel olan düzlemin normali aşağıdaki vektörlerden hangisine paraleldir?

- A) $(1, -1, 3)$ B) $(1, 1, 3)$ C) $(1, 1, -3)$ D) $(-1, 1, 2)$ E) $(-1, -1, 2)$

Çözüm : $u_1 = (2, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$ olduğundan, $u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 3)$ olur. Yanıt C.

3. A ve B aynı türden iki kare matris olmak üzere, aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

- I. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ II. $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$
 III. $A^2 = I$ ise $A = I$ 'dir. IV. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
 V. $AA^3 = A^2 A^2$

- A) Yalnız V B) II ve V C) Yalnız II D) I, II ve IV E) I, IV ve V

Çözüm : $AB = BA$ eşitliğinin kullanıldığı özdeşlikler geçerli değildir. Buna göre, I ve IV yanlıştır. II doğrudur. III her zaman doğru değildir. Örneğin, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ için, $A^2 = I$ 'dir. V, birleşme özelliğinin sonucu olarak doğrudur.

4. $\varphi(u, v) = (u + 3, u + 2v + 2, 2u + v)$ düzleminin normali, hangisine paraleldir?

- A) $(1, 2, 3)$ B) $(2, -1, 3)$ C) $(1, 3, -2)$ D) $(3, 2, -1)$ E) $(3, 1, -2)$

Çözüm :1. Yol. $x = u + 3$, $y = u + 2v + 2$ ve $z = 2u - v$ eşitliklerinden,
 $u = x - 3 \Rightarrow v = z - 2(x - 3) = z - 2x + 6 \Rightarrow y = x - 3 + 2(z - 2x + 6) + 2 = 2z - 3x + 11$,
 yani $-3x - y + 2z = -11$ olur. Yanıt, E.

1. Yol. $\varphi_u = (1, 1, 2)$ ve $\varphi_v = (0, 2, 1)$ olduğundan,

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -1, 2) \text{ olur. Yanıt E.}$$

5. Kutupsal veya dik koordinatlarda verilmiş aşağıdaki eğrilerin kaç tanesi çember belirtmez?

I. $r = 2$

II. $r = 2 \cos \theta$

III. $r = \sin 3\theta$

IV. $x^2 + y^2 + 2x = 0$

V. $x^2 + y^2 + 2y + 3 = 0$

VI. $\{x^2 + y^2 + z^2 = 4\} \cap \{x + y + z = 0\}$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Çözüm : Çember I. $r = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

Çember II. $r = 2 \cos \theta \Rightarrow r^2 = 2r \cos \theta \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1.$

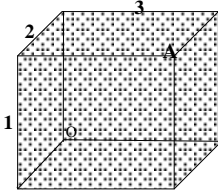
Üç Yapraklı Gül III. $r = \sin 3\theta$

Çember IV. $x^2 + y^2 + 2x = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 1$

Çember Değil V. $x^2 + y^2 + 2y + 3 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 12}$ tanımsız.

Çember VI. $\{x^2 + y^2 + z^2 = 4\} \cap \{x + y + z = 0\}$ $x + y + z = 0$, verilen kürenin merkezinden geçer. O halde arakesit doğrusu bir büyük çemberdir. Yanıt 4.

6. $1 \times 3 \times 2$ boyutlarında dikdörtgenler prizması şeklinde bir odanın üç köşesi birleştirilerek bir üçgen duvar yapılıyor. A köşesinin bu üçgen duvara uzaklığı kaç birimdir?



A) $\frac{9}{7}$

B) $\frac{11}{7}$

C) $\frac{13}{7}$

D) $\frac{6}{7}$

E) $\frac{12}{7}$

Çözüm : Taralı üçgenin bulunduğu düzlemin denklemi : $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1 \Rightarrow 3x + 2y + 6z - 6 = 0$ olduğundan, A (2, 3, 1) noktasının bu düzleme uzaklığı : $\ell = \frac{|3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{12}{7}$ olur.

7. $(x - 1)^2 + y^2 = 9$ çemberine içten teğet olan M (1, 1) yarıçaplı çemberin yarıçapı kaçtır?

A) 1

B) 3

C) 2

D) $\sqrt{3}$

E) $\sqrt{2}$

Çözüm : İstenen çember $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = r_2^2$ olsun. $|OM| = 9 - r_1$ olduğundan, $(1 - 1)^2 + (1 - 0)^2 = 3 - r_1$ ise $r_1 = 2$ bulunur.

8. $xy = 4$ denklemini standart konik denklemi haline getirebilmek için, eksenler kaç derece döndürülmelidir?

- A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) $\arctan 4$

Çözüm : $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ türü ikinci dereceden denklemlerde, xy çarpanını yok etmek için yapılması gereken eksen dönmesi : $\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$ formülüyle bulunur. $A = C$ ise dönme açısı 45° olacaktır. $xy = 4$ denkleminde, $A = C = 0$ olduğundan, yanıt 45° olur.

9. $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsi ile $y = x + n$ doğrusu teğet ise n hangisi olabilir?

- A) 1 B) $\sqrt{5}$ C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

Çözüm : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ile $y = mx + n$ 'nin teğet olma koşulu $m^2a^2 + b^2 = n^2$ olduğundan, $1 \cdot 4 + 1 = n^2 \Rightarrow n = \sqrt{5}$ olur.

10. Kutupsal koordinatlarda verilen $r = 2 \cos \theta - 4 \sin \theta$ çemberine, orjinde teğet olan doğrunun, dik koordinat sistemindeki denklemini bulunuz.

- A) $y=2x$ B) $y=\frac{x}{2}$ C) $y=3x$ D) $y=-2x$ E) $y=-\frac{x}{2}$

Çözüm : Denklemi r ile çarpalım. Buna göre,

$$r^2 = 2r \cos \theta - 4r \sin \theta \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$$

çemberine orjinde teğet olan doğrunun denklemi ;

$$(0 - 1)(x - 1) + (0 + 2)(y + 2) = 5 \Rightarrow y = x/2 \text{ bulunur.}$$

11. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ hiperbolünün bir noktasının, odağa uzaklığı $2\sqrt{2}$ br ise, doğrultmana uzaklığı kaç birim olur? (Yakın odak ve doğrultman için)

- A) $\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) 2 D) 4 E) $\sqrt{3}$

Çözüm : Verilen hiperbolün dış merkezliği, $c^2 = a^2 + b^2 = 4$, $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$ dir. Diğer yandan, $e = \frac{n}{d} = \frac{\text{odağa uzaklık}}{\text{doğrultmana uzaklık}}$ olduğundan, $\frac{2\sqrt{2}}{d} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d = 2$ br olur.

12. $x + y + 3z + 2 = 0$ ve $x + 2z + 3 = 0$ düzlemlerinin arakesitinden ve $A(3, 1, 0)$ noktasından geçen düzlemin normali hangisine paraleldir?

- A) (2, 2, 1) B) (0, 2, -1) C) (1, 3, 1) D) (1, 0, 1) E) (0, 1, 1)

Çözüm : $(x + y + 3z + 2) + \lambda(x + 2z + 3) = 0$ arakesit düzlemlerinin ailesinin denklemini verir. $A(3, 1, 0)$ noktasından geçiyorsa, $(3 + 1 + 0 + 2) + \lambda(3 + 0 + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ olur. O halde, istenen düzlem, $(x + y + 3z + 2) - (x + 2z + 3) = y + z - 1 = 0$ olur. Yanıt E.

13. Aşağıdaki doğruların hangisi $2x + y - z = 3$ düzlemine diktir?

- A) $x = y = \frac{z}{3}$ B) $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{-1}$ C) $x = y = z$
D) $x = y = \frac{z-1}{3}$ E) $x-2 = y = \frac{z}{3}$

Çözüm : Bir doğrunun bir düzleme dik olması için, doğrultmanı, normale paralel olması gerekir. Buna göre, doğru yanıt B seçeneğidir.

14. \mathbb{R}^3 uzayında aşağıdakilerden kaç tanesi bir düzlem denklemi belirtir?

- I. $x + y + z = 5$ II. $\frac{x-1}{2} = y, z = 2$ III. $x = 1$
IV. $x = y = z$ V. $y = 2x - 1$ VI. $\varphi(u, v) = (u, v, u + v)$
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm :

- I. $x + y + z = 5$ Düzlem $N(1, 1, 1)$ II. $\frac{x-1}{2} = y, z = 2$ Doğru
III. $x = 1$ Düzlem $N(1, 0, 0)$ IV. $x = y = z$ Doğru
V. $y = 2x - 1$ Düzlem $N(1, -1, 0)$ VI. $\varphi(u, v) = (u, v, u + v)$ Düzlem $z = x + y, N(1, 1, -1)$

15. $A(1, 2, 3)$ noktası, $\frac{x}{2} = y, z = 1$ doğrusu üzerindeki hangi noktaya en yakındır?

- A) $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ B) $\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{10}, 1\right)$ C) $\left(3, \frac{3}{2}, 1\right)$ D) $(0, 0, 1)$ E) $\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$

Çözüm :1. Yol. İstenen nokta doğru üzerinde olduğundan, $\frac{x}{2} = y = \lambda, z = 1$ ise, $H(2\lambda, \lambda, 1)$ formundadır. $\overrightarrow{AH} = (2\lambda - 1, \lambda - 2, 1 - 3)$ vektörü $\vec{u} = (2, 1, 0)$ doğrultmanına dik olduğundan, $2(2\lambda - 1) + (\lambda - 2) = 0$ eşitliğinden $\lambda = 4/5$ olur. Buradan, $H\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$ elde edilir.

2. Yol. A noktasının doğru üzerindeki dik izdüşüm noktası olan H noktası, istenen en yakın noktadır. Doğru üzerindeki $P(0, 0, 1)$ noktasını alalım.

$$\overrightarrow{PH} = \frac{\langle \overrightarrow{PA}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u} \Rightarrow H - P = \frac{\langle (1, 2, 2), (2, 1, 0) \rangle}{\langle (2, 1, 0), (2, 1, 0) \rangle} (2, 1, 0) = \frac{4}{5} (2, 1, 0)$$

eşitliğinden, $H = \frac{4}{5} (2, 1, 0) + (0, 0, 1) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$ olur.

16. Kutupsal koordinatlardaki $P\left(5, \arctan\frac{3}{4}\right)$ noktasının, dik koordinatlardaki karşılığı nedir?

- A) $(3, 4)$ B) $(3, 5)$ C) $(4, 5)$ D) $(5, 3)$ E) $(4, 3)$

Çözüm : $\theta = \arctan\frac{3}{4} \Rightarrow \tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$ ve $\sin\theta = \frac{3}{5}$ olur. $x = r \cos\theta = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$

ve $y = r \sin \theta = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$ olduğundan, $(4, 3)$ bulunur.

17. A $(2, 1)$ noktası, $\theta = \arctan \frac{3}{4}$ kadar döndürülürse koordinatları ne olur?

- A) $\left(\frac{-2}{5}, \frac{11}{5}\right)$ B) $(1, 2)$ C) $(-2, 5)$ D) $\left(\frac{11}{5}, \frac{-2}{5}\right)$ E) $(-2, 11)$

Çözüm : $\theta = \arctan \frac{3}{4} \Rightarrow \tan \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{5}$ ve $\sin \theta = \frac{3}{5}$ olduğundan,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

18. $y = 2x$ doğrusu 45° döndürülürse eğimi ne olur?

- A) -2 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{-1}{3}$ D) 3 E) -3

Çözüm : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ eşitliğine göre,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} x' + y' \\ y' - x' \end{bmatrix}$$

olduğu kullanılırsa, $y = 2x \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (y' - x') = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \Rightarrow y' = -3x'$ olur. Yanıt E.

19. Aşağıdaki önermelerden kaçısı doğrudur.

I. Her tamlık bölgesi bir cisimdir.

II. Her cisim tamlık bölgesidir.

III. Reel sayılar bir aykırı cisim oluşturur.

- A) I B) II C) III D) II ve III E) I, II ve III

Çözüm : Her cisim bir tamlık bölgesidir ve ayrıca reel sayılar cisim oluşturduğundan aynı zamanda aykırı cisimdir. Aykırı cisim için çarpımsal değişme özelliğinin olması gerekmez.

20. Aşağıdaki önermelerden kaçısı doğrudur.

I) \mathbb{Z} birimli değişmeli bir halkadır

II) $2\mathbb{Z}$ değişmeli birimli olmayan bir halkadır.

III) $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ sıfır bölensiz bir halkadır.

IV) $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ nin her sağ ideali aslında bir sol idealdir.

V) $2\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ birimli, değişmeli bir halkadır.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm : I, II, V seçenekleri doğrudur.

21. I. Her matrisin tersi bulunabilir..

II. Her matris bir lineer dönüşümü temsil eder.

III. Farklı iki matris aynı lineer dönüşümü temsil edemez.

İfadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) II ve III D) Yalnız II E) Yalnız III

Çözüm : I yanlıştır. Her matrisin tersi olmayabilir. II doğrudur. Her matris bir lineer dönüşümü temsil eder. III yanlıştır. Farklı iki matris farklı tabanlara göre aynı lineer dönüşümü temsil edebilir.

22. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $A = [T]$ olsun.

I. $\text{rank} A = \text{boy}(GörT)$

II. $\text{rank} A = \text{boy}(\ÇekT)$

III. A nın tersi olması için gerek ve yeter şart $\text{rank} A = n$ olmasıdır.

ifadelerden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III D) II ve III E) Hepsi

Çözüm : Bir lineer dönüşümün görüntü uzayının boyutu, bu lineer dönüşüme karşılık gelen matrisin rankına eşittir. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ için, bu matrisin rankı n ise matris tersinir olacaktır. II yanlıştır, diğerleri doğrudur.

23. \mathbb{R}^4 uzayında standart iç çarpıma göre ℓ_1 ve ℓ_2 parametrelerine göre doğru denklemleri,

$$\ell_1 : \{x = 2m, y = -2m, w = -m\} \text{ ve } \ell_2 : \{x = k, y = -k, z = -k, w = k\}$$

ise ℓ_1 ile ℓ_2 doğruları arasındaki açı kaçtır ?

- A) 30 B) 60 C) 45 D) 120 E) 150

Çözüm : Doğruların doğrultmanları, $u_1 = (2, -2, 0, -1)$ ve $u_2 = (1, -1, -1, 1)$ olduğundan,
 $\cos \theta = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\| \|u_2\|} = \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$ bulunur.

24. $\mathbb{V} = \{(x, y, z, t) : x + y = 0\}$ uzayı ile aşağıdaki uzaylardan kaç tane aynı uzaydır?

I) $\mathbb{V}_1 = \text{Sp}\{(1, 1, -3, 2), (1, 1, -2, 1)\}$

II) $\mathbb{V}_2 = \text{Sp}\{(1, 1, -3, 0), (1, 0, -2, 3), (0, 0, 0, 1)\}$

III) $\mathbb{V}_3 = \text{Sp}\{(1, 1, -3, 2), (1, 0, -2, -1), (1, 0, -1, 1)\}$

IV) $\mathbb{V}_4 = \text{Sp}\{(1, -1, -3, -1), (-1, 1, 1, 2)\}$

V) $\mathbb{V}_5 = \text{Sp}\{(1, -1, 0, -3), (-1, 1, 1, 0), (2, -2, 2, 1)\}$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm :: \mathbb{V}_4 ile \mathbb{V}_5 dışındaki alt uzaylar \mathbb{V} ile karşılaştırılmaz. \mathbb{V}_4 , \mathbb{V} 'nin alt uzayıdır ancak kendisi değildir. Sadece \mathbb{V}_5 ile \mathbb{V} aynıdır.

25. $L(x, y, z) = (x, y - z, x + y + 3z)$ şeklinde tanımlanan $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü için, $L^{10} \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0 \right) = ?$

- A) $\left(\frac{3^5}{2^5}, \frac{3^5}{2^5}, 1 \right)$ B) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0 \right)$ C) $\left(0, 0, \frac{3^5}{2^5} \right)$ D) $\left(\frac{3^5}{2^5}, -\frac{3^5}{2^5}, 0 \right)$ E) $\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right)$

Çözüm : L dönüşümüne karşılık gelen matris : $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisidir.

$$L \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0 \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan, $\lambda = 1$ özdeğer ve $\vec{u} = (1, -1, 0)$ özvektördür. O halde, $L^{10} \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0 \right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0 \right)$ olacaktır.

26. Bir kutuda 2 beyaz, 3 mavi ve 4 kırmızı tebeşir vardır. Bu kutudan rastgele 2 tebeşir alıyoruz. Alınan iki tebeşirin aynı renkte olma olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{5}{18}$

Çözüm : Toplam 9 tebeşirden 2 tanesi $\binom{9}{2}$ farklı şekilde alınabilir. Aynı renkte iki tebeşir $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2}$ farklı şekilde seçilebilir. Buna göre istenen olasılık

$$\frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1 + 3 + 6}{36} = \frac{5}{18}$$

olur. **Cevap E.**

27. Bir X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $m(t) = 4e^{-2t} + 5e^{2t}$, olduğuna göre X 'in varyansı nedir?

- A) 9 B) 36 C) 32 D) 38 E) 40

Çözüm : $E(X) = \frac{dm}{dt} \Big|_{t=0} = -8e^{-2t} + 10e^{2t} \Big|_{t=0} = -8 + 10 = 2$ ve

$$E(X^2) = \frac{d^2m}{dt^2} \Big|_{t=0} = 16e^{-2t} + 20e^{2t} \Big|_{t=0} = 16 + 10 = 36 \text{ olduğundan,}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 36 - 4 = 32$$

bulunur. **Cevap C.**

28. X bir rastgele değişken, $Var(2X + 1) = 20$, $E(3X + 2) = 8$ olduğuna göre $E(2X^2 + 1)$ değeri kaçtır?

- A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

Çözüm : a, b sabitleri için,

$$\begin{aligned}Var(aX) &= a^2 Var(X) \\Var(X + a) &= Var(X) \\E(aX + b) &= aE(X) + b\end{aligned}$$

özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}20 &= Var(2X + 1) = 2^2 Var(X) \implies Var(X) = 5 \\8 &= E(3X + 2) = 3E(X) + 2 \implies E(X) = 2\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$5 = Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - 2^2 \implies E(X^2) = 9$$

olacağından

$$E(2X^2 + 1) = 2E(X^2) + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 19$$

bulunur. **Cevap D.**

29. $\int_C (x + y^2) dx + (y + x^2) dy$ integralini C eğrisi, köşeleri $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -1)$, $D(1, -1)$ karesi olmak üzere hesaplayınız?

- A) 1 B) 0 C) 2 D) -1 E) -2

Çözüm : $\int_C (x + y^2) dx + (y + x^2) dy = \int_{AB} \dots + \int_{BC} \dots + \int_{CD} \dots + \int_{DA} \dots$

$$= \int_1^{-1} (x + 1) dx + \int_1^{-1} (y + 1) dy + \int_{-1}^1 (x + 1) dx + \int_{-1}^1 (y + 1) dy = 0 \text{ olur.}$$

30. $F = (2y) \mathbf{i} + (3x) \mathbf{j} + (5y^2) \mathbf{k}$ vektör alanı ve $C : r(t) = (\cos t) \mathbf{i} + (\sin t) \mathbf{j} + (t) \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ eğrisi için $\int_C F \cdot dr$ integralini hesaplayınız?

- A) 3π B) 5π C) 6π D) 7π E) 4π

Çözüm : $\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (2 \sin t, 3 \cos t, 5 \sin^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt$

$$= \int_0^{2\pi} (-2 \sin^2 t + 3 \cos^2 t + 5 \sin^2 t) dt = 6\pi \text{ elde edilir.}$$

31. $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$ integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$ E) $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$

Çözüm :Sınır değişimi ile

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dy dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \\ &= -\frac{1}{3} (1 + \cos^2 x)^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}\end{aligned}$$

bulunur.

32. R bölgesi $\frac{\pi^2}{16} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}$ ile verilen halka bölge ise $\int_R \int \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\pi(\sqrt{2}-1)$ B) $\sqrt{2}$ C) $\pi - 1$ D) $\sqrt{2}-1$ E) π

Çözüm : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\frac{\pi}{4} \leq r \leq \frac{\pi}{3}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ kutupsal koordinatlar dönüşümü ile

$$\int_R \int \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_0^{2\pi} \frac{\sin r}{r} r d\theta dr = 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin r dr = -2\pi \cos r \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \pi(\sqrt{2} - 1)$$

elde edilir.

33. $(x^2 - 3y^2) dx + (2xy) dy = 0$ homogen diferensiyel denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y^2 = cx^3$ B) $y^2 - x^2 = cx^4$ C) $y^2 - x^2 = cx^3$
D) $y^3 - x^3 = cx^3$ E) $y^3 = cx^3$

Çözüm :Verilen denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3(y/x)^2 - 1}{2(y/x)}$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla denklem homogendir ve $y = ux$ dönüşümü yapılırsa $y' = u'x + u$ olur. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa

$$y' = u'x + u = \frac{3u^2 - 1}{2u}$$

ve buradan

$$\frac{2udu}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

elde edilir. Buna göre her iki tarafı integrallersek

$$\ln |u^2 - 1| = \ln |x| + \ln c$$

bulunur. u değeri yerine yazılırsa $y^2 - x^2 = cx^3$ elde edilir. Cevap C şıkkıdır.

34. Aşağıdaki denklemlerden hangisi $y = ux$ dönüşümü ile değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir.

- A) $xy' = y + xe^{-y/x}$ B) $y' = y + xe^{-y/x}$ C) $y' = y + xe^{-x/y}$
D) $xy' = y + xe^{-x/y}$ E) $y' = \frac{y}{x} + xe^{-x/y}$

Çözüm : A şıkkı homogen denklem formundadır ve $y = ux$ dönüşümü ile değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir.

35. $y'' - 10y' + 9y = 5t$ diferansiyel denklemini Laplace dönüşümü ile çözmek istediğimizi düşünelim. $L\{y(t)\} = Y(s)$ Laplace dönüşümünü göstermek üzere, denkleme Laplace dönüşümü uygulandığında aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

- A) $(s^2 - 10s + 9)Y(s) + (10 + s)y(0) + y'(0) = \frac{5}{s}$
B) $(s^2 - 10s + 9)Y(s) + (10 + s + s^2)y(0) - sy'(0) = \frac{5}{s}$
C) $(s^2 - 10s + 9)Y(s) + (10 + s)y(0) + y'(0) = \frac{5}{s^2}$
D) $(s^2 - 10s + 9)Y(s) + (10 - s - s^2)y(0) + sy'(0) = \frac{5}{s^2}$
E) $(s^2 - 10s + 9)Y(s) + (10 - s)y(0) - y'(0) = \frac{5}{s^2}$

Çözüm : $L\{y''Y(s) - sy(0) - y'(0)$ ve $L\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$ özdeşlikleri ve Laplace dönüşümünün doğrusallığı kullanılarak, eşitliğin sol tarafının Laplace dönüşümü

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 10(sY(s) - y(0)) + 9Y(s)$$

olur. Sağ tarafın Laplace dönüşümü ise $L\{5t\} = \frac{5}{s^2}$ ile verilir. Bu iki eşitlik düzenlenirse

$$Y(s)(s^2 - 10s + 9) + (10 - s)y(0) - y'(0) = \frac{5}{s^2}$$

elde edilir. Doğru cevap E'dir.

36. $x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümü olan $y(x)$ fonksiyonu için $y(1) = 1$ ve $y'(1) = 3$ ise $y(3) = ?$

- A) 9 B) 12 C) 15 D) 17 E) 19

Çözüm : Denklem ikinci mertebeden bir Cauchy-Euler denklemdir. $x = e^t$ dönüşümünün yapılmasıyla birinci ve ikinci türevler için

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

elde edilir. Bu eşitliklerin denklemde yazılıp düzenlenmesiyle

$$y''(t) - 3y'(t) - 2y(t) = 0$$

sabit katsayılı denklemi elde edilir. Genel çözümü $y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}$ şeklindedir. Burada $t = \ln(x)$ yazarsak çözüm fonksiyonu x cinsinden $y(x) = c_1x + c_2x^2$ olarak bulunur. Başlangıç koşullarının devreye sokulmasıyla

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 + 2c_2 &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Sistemin çözümü $c_1 = -1, c_2 = 2$ olduğundan diferansiyel denklemin çözümü $y(x) = 2x^2 - x$ 'tir. Dolayısıyla $y(3) = 15$ olur. Doğru cevap C'dir.

37. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2, g(x) = x - 1$ ise $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ise $(f \circ g)(A)$ nedir?

A) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$

Çözüm : $g(A) = A - I$ olduğundan

$$(f \circ g)(A) = f(g(A)) = f(A - I) = (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

38. $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$ matrisinin determinant değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(ac - bd)^2$ B) 0 C) $(ad - bc)^2$ D) $(ab - cd)^2$ E) $a^2c^2 - b^2d^2$

Çözüm : Determinantı 1. satıra göre açarsak

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} b \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix} \\ &= a \left[(-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} b \begin{vmatrix} 0 & d \\ c & 0 \end{vmatrix} \right] \\ &\quad + b \left[(-1)^{1+2} a \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} b \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} \right] \\ &= a(ad^2 - bcd) + b(-acd + bc^2) \\ &= ad(ad - bc) - bc(ad - bc) \\ &= (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

39. $D = \{(x, y) \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ kümesi verilsin. $\iint_D y dx dy$ integralinin değeri nedir?

- A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{3\pi}{2}$

Çözüm : $\iint_D y dx dy = 2 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y dx dy = 2 \int_0^1 \left(yx \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} \right) dy = 2 \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} dy = \frac{2}{3}$ olur.

40. $D = \{(x, y) \mid \frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi, \ln y \leq x \leq \ln(2y)\}$ kümesi olmak üzere,

$\iint_D \frac{e^x \sin y}{y} dx dy$ integralinin değeri nedir?

- A) 1 B) π C) 2 D) 2π E) 3

Çözüm : $\iint_D \frac{e^x \sin y}{y} dx dy = \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{\ln y}^{\ln 2y} \frac{e^x \sin y}{y} dx dy = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{e^x \sin y}{y} \Big|_{\ln y}^{\ln 2y} \right) dy$

$= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{e^{\ln 2y} \sin y}{y} - \frac{e^{\ln y} \sin y}{y} \right) dy = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin y dy = 1$ olur.