AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

BİTİRME ÖDEVİ ARASINAV SORULARI

ADI SOYADI : ....

NO : ....

A	A	A	A	A	A	A

SINAV TARİHİ VE SAATİ :

Bu sınav 40 sorudan oluşmaktadır ve sınav süresi 75 dakikadır.

SINAVLA İLGİLİ UYULACAK KURALLAR

1. Cevap kağıdınıza soru kitapçığınızın türünü işaretlemeyi unutmayınız.

2. Her soru eşit değerde olup, puanlama yapılırken doğru cevaplarınızın sayısından yanlış cevaplarınızın sayısının dörtte biri düşülecektir.

3. Sınavda pergel, cetvel, hesap makinesi gibi yardımcı araçlar ve müsvedde kağıdı kullanılması yasaktır. Tüm işlemlerinizi soru kitapçığı üzerinde yapınız.

4. Sınav süresince görevlilerle konuşulmayacak ve onlara soru sorulmayacaktır. Yanlış olduğunu düşündüğünüz sorularla ilgili, görevlilere soru sormayınız. Bu çok küçük bir olasılık olsa da, jüri bu tür durumları daha sonra değerlendirecektir.

5. Öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.

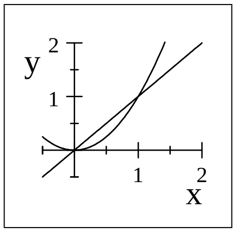
6. Dışarıya çıkan bir aday tekrar sınava alınmayacaktır.

7. Cep telefonuyla sınava girmek yasaktır. Cep telefonunuzu görevliye teslim ediniz.

8. Soru kitapçıkları toplanacaktır.

1. $\boldsymbol{y = x^2}$ **eğrisi ile** $\boldsymbol{y = x}$ **doğrusu arasında kalan alanı iki katlı integralle nasıl ifade ederiz?**

A) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x^2}^{x} dx\,dy$ B) $\int\limits_{x^2}^{x}\int\limits_{0}^{1} dx\,dy$ C) $\int\limits_{\sqrt{y}}^{y}\int\limits_{0}^{1} dx\,dy$ D) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{\sqrt{y}}^{y} dx\,dy$ E) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x^2}^{x} dy\,dx$



Çözüm : Şekilden takip edilirse, $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x^2}^{x} dxdy$ bulunur.

---

2. $\boldsymbol{\int x^2dx + xydy}$ **integralinin** $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ **eğrisi boyunca,** $\boldsymbol{(0,0)}$ **noktasından,** $\boldsymbol{(1,1)}$ **noktasına değerini bulunuz.**

A) $\frac{7}{12}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{11}{12}$ E) $\frac{1}{3}$

Çözüm : $y = \sqrt{x}$ ise $dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ olur. O halde, verilen noktalar için $x = 0$ ve $x = 1$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\int\limits_{0}^{1} x^2dx + xydy = \int\limits_{0}^{1}\left(x^2dx + \frac{x}{2}dx\right) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\Big|_{0}^{1} = \frac{7}{12}$$

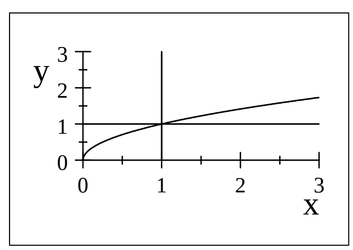
elde edilir.

---

3. $\boldsymbol{\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{y^2}^{1} e^{x^2}dx\,dy}$ **integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\int\limits_{y^2}^{1}\int\limits_{0}^{1} e^{x^2}dy\,dx$ B) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x^2}^{1} e^{x^2}dy\,dx$ C) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x}^{x^2} e^{x^2}dy\,dx$ D) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{\sqrt{x}} e^{x^2}dy\,dx$ E) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{\sqrt{x}}^{1} e^{x^2}dy\,dx$

Çözüm : Şekile göre, $x = y^2$, $x = 1$, $y = 0$ ve $y = 1$ ile sınırlı bölgeyi iki türlü yazmak mümkündür. Birincisi, soruda verilen $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{y^2}^{1} e^{x^2}dxdy$ ifadesidir. Bunun yanında, $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{\sqrt{x}} e^{x^2}dydx$ olarak da yazılabilir.



---

4. $\boldsymbol{B : \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 3\}}$ **olmak üzere** $\boldsymbol{\int\int\limits_{B}(3 + x + 2y)\,dA = ?}$

A) 15 B) 11 C) 12 D) 13 E) 17

Çözüm : $\int\int\limits_{B}(3 + x + 2y)\,dA = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{1}^{3}(3 + x + 2y)\,dydx = 15$ olduğu görülür.

5. $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy}$ **fonksiyonunun** $\boldsymbol{(2,3)}$ **noktasındaki gradyant vektörü aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\boldsymbol{(-5,2)}$ **B)** $\boldsymbol{(5,3)}$ **C)** $\boldsymbol{(-3,2)}$ **D)** $\boldsymbol{(6,5)}$ **E)** $\boldsymbol{(-5,0)}$

Çözüm : $\mathrm{Grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{dx}, \frac{\partial f}{dy}\right)$ ile bulunur. Buna göre,

$$\mathrm{Grad} f(x,y) = (2x-3y, 2y-3z) \Rightarrow \mathrm{Grad} f(2,3) = (-5,0)$$

bulunur.

---

6. $\boldsymbol{x^2 + yx + z^2 = 3}$ **ile verilen yüzeyin** $\boldsymbol{P(1,1,1)}$ **noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.**

A) $\boldsymbol{3x - y + 2z = 4}$ **B)** $\boldsymbol{x + y - 2z = 0}$ **C)** $\boldsymbol{3x + y + 2z = 6}$

D) $\boldsymbol{3x + y - 2z = 2}$ **E)** $\boldsymbol{x + y + 2z = 4}$

Çözüm : Bir yüzeyin denklemi $F(x,y,z) = 0$ şeklinde ise, bu yüzey üzerinde bulunan bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki teğet düzlemin denklemi, $P(x,y,z)$ düzlemin bir noktası olmak üzere, $\langle \mathrm{Grad} F(P_0), P - P_0 \rangle = 0$ denklemiyle bulunur. Buna göre,

$$F(x,y) = x^2 + yx + z^2 - 3 \Rightarrow \mathrm{Grad} F = (2x+y, x, 2z) \text{ ve } \mathrm{Grad} F(P_0) = (3,1,2)$$

olduğundan, düzlemin denklemi, $3(x-1) + 1(y-1) + 2(z-1) = 3x + y + 2z - 6 = 0$ olur.

---

7. $\displaystyle\boldsymbol{\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{4k^2 - 1}} = ?$

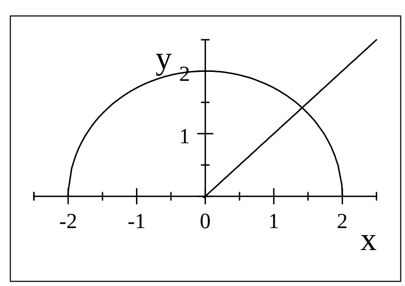
A) $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ **B)** 1 **C)** $\boldsymbol{\frac{1}{5}}$ **D)** $\boldsymbol{\frac{1}{7}}$ **E)** $\boldsymbol{\infty}$

Çözüm : $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{4k^2-1} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5}$ olur.

---

8. $\displaystyle\boldsymbol{\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4 - x^2} - x\right) dx} = ?$

A) $\boldsymbol{\pi}$ **B)** $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$ **C)** $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ **D)** $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ **E)** $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$



Çözüm : İntegrali şekile çevirirsek, istenen integralin taralı bölgenin alanı olduğunu görürüz.

Buna göre, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-x^2} - x\right) dx = \frac{\pi 2^2}{8} = \frac{\pi}{2}$ bulunur.

---

9. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3}{3+\cos^2 x}\,dx = ?$

A) 1 **B)** $1-\dfrac{1}{\pi^2}$ **C)** $1-\dfrac{1}{\pi}$ **D)** $1+\dfrac{1}{\pi}$ **E)** 0

Çözüm : $f(x) = \dfrac{x^3}{3+\cos^2 x}$ bir tek fonksiyon olduğundan, verilen integralin değeri sıfırdır.

---

10. $y' + 3x^2 y = x^2$ **diferansiyel denklemi için,** $y(0) = 7/3$ **ise** $y(1) = ?$

A) $\dfrac{2}{e}-\dfrac{1}{3}$ **B)** $\dfrac{2}{e}+\dfrac{1}{3}$ **C)** $\dfrac{3}{e}+\dfrac{1}{3}$ **D)** $\dfrac{3}{e}-\dfrac{1}{3}$ **E)** $\dfrac{1}{e}+\dfrac{2}{3}$

Çözüm : $y' + P(x)y = Q(x)$ formundaki 1. mertebeden lineer dif. denklemlerin çözümü :

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} Q(x)\,dx + c\right]$$

ile bulunur. Buna göre, $P(x) = 3x^2$ ve $Q(x) = x^2$ olduğundan,

$$y(x) = e^{-\int 3x^2 dx}\left[\int e^{\int 3x^2 dx} x^2 dx + c\right] = e^{-x^3}\left(\frac{1}{3}e^{x^3} + c\right) = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}$$

bulunur. $y(0) = 7/3$ ise, $\dfrac{7}{3} = \dfrac{1}{3} + ce^0 \Rightarrow c = 2$ olacağından, $y(1) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{e}$ olur.

---

11. $y'' - y' - 12y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5$ **olduğuna göre** $y(1) = ?$

A) $e^{-3}+2e^4$ **B)** e^3+2e^{-4} **C)** $2e^{-3}+e^4$ **D)** $2e^3+e^{-4}$ **E)** $e^{-3}+e^4$

Çözüm : Verilen dif. denklemin karakteristik denklemi $m^2 - m - 12 = 0$ olduğundan,

$$(m-4)(m+3) = 0$$

ve $m_1 = 4$, $m_2 = -3$ bulunur. Böylece dif. denklemin genel çözümü, keyfi c_1 ve c_2 sabitleri için

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x}$$

bulunur. Buradan başlangıç değer koşulları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 3 \\ 4c_1 - 3c_2 &= 5 \end{aligned}$$

olur ki, bu denklemlerin çözümünden $c_1 = 2$ ve $c_2 = 1$ bulunur. O halde, $y(x) = 2e^{4x} + e^{-3x}$ olacağından, $y(1) = 2e^4 + e^{-3}$ bulunur.

---

12. $y' - 2y = \sin x$ **ve** $y(0) = 4/5$ **olduğuna göre** $y(\pi) = ?$

A) $3e^{2\pi}+\dfrac{1}{5}$ **B)** $2e^{2\pi}+\dfrac{1}{5}$ **C)** $3e^{2\pi}-\dfrac{1}{5}$ **D)** $e^{2\pi}-\dfrac{1}{5}$ **E)** $e^{2\pi}+\dfrac{1}{5}$

Çözüm : Soru 10'daki gibi bir lineer diferansiyel denklemdir. Buna göre, $P(x) = -2$ ve $Q(x) = \sin x$ olduğundan,

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int -2dx}\left[\int e^{\int -2dx}\sin x dx + c\right] = e^{2x}\left(-\frac{1}{5}e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + c\right) \\ &= -\frac{1}{5}(\cos x + 2\sin x) + ce^{2x} \end{aligned}$$

bulunur. $y(0) = 4/5$ ise, $\frac{4}{5} = \frac{-1}{5} + c \Rightarrow c = 1$ olacağından, $y(1) = e^{2\pi} + \frac{1}{5}$ olur.

---

13. $\boldsymbol{\left(2x\cos y + mx^2y\right)dx + \left(x^3 - x^n\sin y - 2y\right)dy = 0}$ **diferansiyel denklemi tam ise** $\boldsymbol{m+n=?}$

A) 1 **B) 3** **C) −2** **D) −1** **E) 5**

Çözüm : $M(x,y) = 2x\cos y + mx^2y$ ve $N(x,y) = x^3 - x^n\sin y - 2y$ olmak üzere, dif. denklem tam ise $M_y = N_x$ olmalıdır. Buna göre,

$$M_y = -2x\sin y + mx^2 \quad \text{ve} \quad N_x = 3x^2 - nx^{n-1}\sin y$$

olduğundan, $m = 3$ ve $n = 2$ olur. O halde, $m + n = 5$ elde edilir.

---

14. $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2 - 1}$ **ve** $\boldsymbol{x = \cos t,\ y = \sin 2t}$ **ise** $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial t}}$ **türevinin** $\boldsymbol{t = \frac{\pi}{12}}$ **noktasındaki değerini hesaplayınız.**

A) $\boldsymbol{\sqrt{3} - \frac{1}{2}}$ **B)** $\boldsymbol{\sqrt{3} + \frac{1}{2}}$ **C)** $\boldsymbol{2\sqrt{3} + \frac{1}{2}}$ **D)** $\boldsymbol{2\sqrt{3} - \frac{1}{2}}$ **E)** $\boldsymbol{2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Çözüm : 1. Yol : $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial\left(\cos^2 t + \sin^2 2t - 1\right)}{\partial t} = -2\sin t\cos t + 4\sin 2t\cos 2t$ $= 4\sin 2t\cos 2t - \sin 2t$ olduğundan, $\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=\pi/12} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$ olur.

2. Yol : $\frac{\partial f}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2x(t)(-\sin t) + 2y(2\cos 2t) = -2\cos t\sin t + 4\sin 2t\cos 2t = 2\sin 4t - \sin 2t$ olduğundan, $\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$ olur.

---

15. $\boldsymbol{f, g \in C[0,1]}$ **olmak üzere,** $\boldsymbol{\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx}$ **ikili işlemi** $\boldsymbol{C[0,1]}$ **vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım belirtir. Buna göre,** $\boldsymbol{f(x) = x^{3/2} \in C[0,1]}$ **vektörünün uzunluğunu bulunuz.**

A) $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **B)** $\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{2}}}$ **C)** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **D)** $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ **E)** $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

Çözüm : $\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle}$ olduğundan,

$$\left\|x^{3/2}\right\| = \sqrt{\langle x^{3/2}, x^{3/2}\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^{3/2}x^{3/2}} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

16. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ **toplamsal grubunda** $(\mathbf{2,2,3})$ **elemanının mertebesi kaçtır?**

A) 60 **B) 15** **C) 30** **D) 10** **E) 12**

Çözüm : $|(2,2,3)| = OKEK\,(|2|\,,|2|\,,|3|) = OKEK\,(3,2,5) = 30$'dur.

---

17. $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ **halkasının kaç tane sıfır böleni vardır?**

A) 6 **B) 8** **C) 5** **D) 9** **E) 7**

Çözüm : 12≡ 0 haricinde, 12 ile aralarında asal olmayan elemanlar, halkanın sıfır bölenleridir. Buna göre, sıfır bölenleri, 2,3,4,6,8,9,10 olacağından. Yanıt :7.

---

18. Aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

I. Her cisim bir halkadır

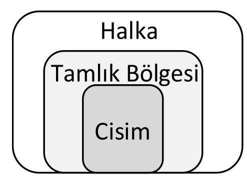
II. Her tamlık bölgesi bir cisimdir.

III. Her tamlık bölgesi bir halkadır.

IV. Her halka birinci işleme göre bir gruptur.

V. Her birimli halka bir cisimdir.

A) 1 **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 0**



Çözüm : I doğrudur, II. Yanlıştır, (tersi doğru) III. Doğrudur, IV. doğrudur, V. Yanlıştır. (Her elemanın tersi olmayabilir, Örneğin $\mathbb{Z}$ kümesi.) **Not :** Tamlık bölgesi, halka ile cisim arasında bir cebirsel yapıdır. Tamlık bölgesi sıfır böleni içermeyen bir halkadır. Yani sıfırdan farklı iki elemanın çarpımı sıfırdan farklıdır. Bu tamlık bölgesinde sadeleştirme yapılabilir. Yani, $xy = xz$ ise $y = z$ dir. Her cisim bir tamlık bölgesidir. Fakat, her tamlık bölgesi bir cisim olmayabilir. Eğer tamlık bölgesi sonlu ise, bir cisimdir. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinde herhangi sıfırdan farklı iki elemanın çarpımı daima sıfırdan farklı olduğundan, $\mathbb{Z}$ kümesi bir tamlık bölgesidir. Fakat, $\mathbb{Z}$ bir cisim değildir.

---

19. $(\boldsymbol{A}, +, \cdot)$ **cebirsel yapısı için aşağıda verilen özelliklerden kaç tanesi hem cisim, hem tamlık bölgesi, hem de halka için sağlanır.**

I. "$\cdot$" işlemine göre sıfırdan farklı her elemanın tersi var.

II. "$\cdot$" işleminin sıfır böleni yok.

III. "$\cdot$" işleminin birim elemanı vardır.

IV. "$\cdot$" işleminin değişme özelliği var.

V. "$\cdot$" işleminin birleşme özelliği var.

A) 1 **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 0**

Çözüm : I. Cisim için sağlanır. II. Tamlık Bölgesi ve Cisim için sağlanır. III. Tamlık Bölgesi ve Cisim için sağlanır. IV. Tamlık Bölgesi ve Cisim için sağlanır. V. Tümü için sağlanır. Yanıt A.

20. $4,4,5,7$ sayılarının standart sapmasını bulunuz.

A) $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{6}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 2 **E)** $\sqrt{5}$

Çözüm : $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ ise S.S.$= \sigma = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_i - \overline{x})}$ ile bulunur. Buna göre, $\overline{x} = \dfrac{4+4+5+7}{4} = 5$ olduğundan,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4-1}\sum_{k=1}^{4}(x_i - \overline{x})} = \sqrt{\frac{1}{3}\left((4-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (5-7)^2\right)} = \sqrt{2}$$

elde edilir.

---

21. $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{3x + 2y + 2z = 0} \\ \mathbf{mx - y + 3z = 0} \\ \mathbf{x + 2z = 0} \end{array}\right.$ **homojen denkleminin sonsuz çözümü olması için m kaç olmalıdır.**

A) $1/2$ **B)** $1/3$ **C)** $1/4$ **D)** $-1/3$ **E)** $-1/2$

Çözüm : $n \times n$ türünden bir homojen lineer denklem sisteminin bir tek çözümü olması için, katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. Aksi halde sonsuz çözüm olacaktır. Buna göre,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ m & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

için sonsuz çözüm olacaktır.

---

22. $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ **lineer dönüşümü için,** $\boldsymbol{T}(1,0,0) = (2,3)$, $\boldsymbol{T}(0,1,0) = (1,1)$ **ve** $\boldsymbol{T}(0,0,1) = (2,-1)$ **olduğuna göre,** $\boldsymbol{T}(2,3,1) = ?$

A) $(9,8)$ **B)** $(8,5)$ **C)** $(4,7)$ **D)** $(3,7)$ **E)** $(7,5)$

Çözüm : T lineer olduğundan, $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$ özelliği kullanılabilir.

$$\begin{aligned} T(2,3,1) &= 2T(1,0,0) + 3T(0,1,0) + T(0,0,1) \\ &= 2(2,3) + 3(1,1) + (2,-1) = (9,8). \end{aligned}$$

---

23. $\left[(p' \vee q)' \Rightarrow (q' \Rightarrow p)\right]'$ **önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?**

A) $p' \vee q$ **B)** 1 **C)** $p' \wedge q$ **D)** 0 **E)** $p \vee q'$

Çözüm : $a \Rightarrow b \equiv a' \vee b$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} [(p' \vee q)' \Rightarrow (q' \Rightarrow p)]' &\equiv [(p' \vee q)' \Rightarrow (q \vee p)]' \equiv [(p' \vee q) \vee (q \vee p)]' \\ &\equiv [(p' \vee p) \vee (q \vee q)]' \equiv [1 \vee q]' \equiv 1' \equiv 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

24. $P(2,1)$ noktası $\theta = \arccos\frac{4}{5}$ açısı kadar saat yönünün tersine döndürülürse yeni koordinatları ne olur?

A) $\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$ **B)** $\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$ **C)** $\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)$ **D)** $\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$ **E)** $(1,2)$

Çözüm : $\theta = \arccos\frac{4}{5}$ ise $\cos\theta = \frac{4}{5}$ ve $\sin\theta = \frac{3}{5}$ olur. O halde,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olur

---

25. $i = \sqrt{-1}$, π, $0{,}\overline{3}$ (devirli) ve $\sqrt{2}$ sayıları için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I- Dördü de cebirsel sayıdır.

II- π transandant (aşkın) ve $0{,}\overline{3}$, i ve $\sqrt{2}$ cebirsel sayıdır.

III- Sadece π irrasyonel sayıdır.

IV- π, $0{,}\overline{3}$ ve $\sqrt{2}$ irrasyonel sayıdır.

A) Yalnız II **B) I, III** **C) II, III** **D) Yalnız IV** **E) II, IV**

Çözüm :i sayısı $x^2+1=0$ denkleminin, $0,\overline{3}$, $3x-1=0$ denkleminin ve $\sqrt{2}$ de $x^2-2=0$ denklemlerinin kökleri olduğundan cebirsel sayıdır. Ancak π cebirsel değil, aşkın(transcendant) sayıdır. Ek olarak π ve $\sqrt{2}$ irrasyonel, $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ rasyonel sayıdır. i ise gerçel sayı olmadığı için, irrasyonel sayı da değildir. Buna göre I-III-IV yanlış, II doğrudur. Doğru yanıt A şıkkıdır.

---

25. $\frac{n}{200}$ formunda, 1'den küçük sadeleşmeyen kaç pozitif rasyonel sayı vardır?

A) 16 **B) 20** **C) 60** **D) 80** **E) 72**

Çözüm : ϕ, Euler fonksiyonu olmak üzere,

$$\varphi\left(p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}\right) = \left(p_1^{r_1} - p_1^{r_1-1}\right)\left(p_1^{r_2} - p_1^{r_2-1}\right)\cdots\left(p_1^{r_k} - p_1^{r_k-1}\right)$$

olduğu kullanılırsa, $\phi(200) = \phi(2^3 5^2) = \phi(2^3)\,\phi(5^2) = (2^3-2^2)(5^2-5) = 80$ bulunur.

---

27. Aritmetik ortalaması 50 puan ve standart sapması $3,\overline{5}$ olan bir sınavdan bir öğrenci 42 puan aldığına göre bu öğrencinin Z ve T puanının toplamı kaçtır?

A) $25,2$ **B) $25,5$** **C) $24,5$** **D) $25,25$** **E) $24,2$**

Çözüm : $A.O. = 50$ ve $S.S. = 3,\overline{5}$ olduğundan, Z puanı :

$$Z(x) = \frac{x - A.O.}{S.S.} = \frac{42-50}{3,\overline{5}} = \frac{-8}{(35-3)/9} = -\frac{9}{4}$$

elde edilir. T puanı ise, $T = 10Z + 50 = 27,5$ olduğundan, $Z+T = 25,25$ bulunur.

28. x üstel rastgele değişkeni için $f(x) = 2e^{-2x}$; $x \geq 0$ ise x rastgele değişkeninin beklenen değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** 1 **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

Çözüm : $E(x) = \int\limits_0^\infty x f(x)\,dx = \int\limits_0^\infty x2e^{-2x}dx$ değerini bulalım. Kısmi integrasyon ile bulacağız.

$u = 2x$ ve $e^{-2x}dx = dv$ denilirse, $du = 2dx$ ve $\frac{-1}{2}e^{2x} = v$ olduğundan, $\int udv = uv - \int vdu$ kısmi integrasyon formülünden,

$$\int\limits_0^\infty 2xe^{-2x}dx = 2x \cdot \left.\frac{-e^{-2x}}{2}\right|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{-e^{-2x}2dx}{2} = 0 + \int\limits_0^\infty e^{-2x}dx = \left.\frac{e^{-2x}}{-2}\right|_0^\infty = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

---

29. $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$ ve $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ çemberlerinin arakesitinden ve orjinden geçen çemberin yarıçapı kaçtır?

A) $\sqrt{11}$ **B)** $\sqrt{13}$ **C)** $2\sqrt{3}$ **D)** $\sqrt{14}$ **E)** $\sqrt{10}$

Çözüm : İki çemberin kesim noktalarından geçen çember demetinin denklemi :

$$[x^2 - 2x + y^2 - 4y - 4] + \lambda[x^2 + y^2 - 2y - 8] = 0$$

dır. Orjinden geçiyorsa, $-4 - 8\lambda = 0$ eşitliğinden $\lambda = -1/2$ olur. O halde, istenen çemberin denklemi :

$$2(x^2 - 2x + y^2 - 4y - 4) - (x^2 + y^2 - 2y - 8) = x^2 - 4x + y^2 - 6y = 0$$

olur. Buradan, $r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36} = \sqrt{13}$ olur.

---

30. A matrisinin karakteristik denklemi $P(x) = x^3 - 3x - 2$ ve $\det(A^2 - 3I) = 4$ olduğuna göre, $\det A^3$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{9}$ **B)** 4 **C)** 8 **D)** 9 **E)** $\frac{1}{8}$

Çözüm : Her matris kendi karakteristik denklemini sağlar. Buna göre, $A^3 - 3A - 2I = 0$ ve $A(A^2 - 3I) = 2I$ yazılabilir. Determinant özelliklerinden,

$$\det A \cdot \det\left(A^2 - 3I\right) = \det(2I) \Rightarrow 4 \cdot \det A = 8 \Rightarrow \det A = 2$$

elde edilir. Buradan $\det A^3 = 2^3$ bulunur. (Not : Arasınavdaki 30'uncu soru, soruda verilenleri sağlayan bir matris olamayacağından iptal edilmiştir)

2. Yol : Herhangi bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin karakteristik denklemi

$$P(x) = x^n - (izA)\,x^{n-1} + \cdots + (\pm 1)^n(\det A)$$

formundadır. Buna göre, $\det A = 2$ olduğu kolayca görülebilir. Buradan, $\det A^3 = 8$ elde edilir.

---

31. $\boldsymbol{A(1,2,3)}$ **noktasının** $\boldsymbol{x=y=\frac{z}{2}}$ **doğrusuna uzaklığını bulunuz.**

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm : $x=y=\frac{z}{2}$ doğrusu için, doğrultman $\vec{u}=(1,1,2)$ ve üzerindeki bir nokta $P(0,0,0)$'dir. $\overrightarrow{PA}=(1,2,3)$ olduğundan,

$$\ell=\frac{Alan(\overrightarrow{PA},\vec{u})}{Taban\,(\|\vec{u}\|)}=\frac{\sqrt{<\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PA}><\vec{u},\vec{u}>-<\overrightarrow{PA},\vec{u}>^2}}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{14\cdot 6-9^2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

olur. Not : $\ell=\frac{Alan(\overrightarrow{PA},\vec{u})}{Taban\,(\|\vec{u}\|)}=\frac{\left\|\overrightarrow{PA}\times\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$ ile de bulunabilir.

---

32. $\boldsymbol{A(1,2,3)}$ **noktasının** $\boldsymbol{2x+y-2z=5}$ **düzlemine uzaklığını bulunuz.**

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 1 E) 2

Çözüm : $\ell=\frac{|2\cdot 1+2-2\cdot 3-5|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{7}{3}$ olur.

---

33. $\boldsymbol{2x-3y+z=5}$ **düzlemine dik olan ve** $\boldsymbol{(2,3,1)}$ **noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.**

A) $x-2=y-3=z-1$ B) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2},\ z=1$ C) $x-2=3-y=z$

D) $x-2=3-y=z-1$ E) $\frac{x-2}{2}=\frac{3-y}{3}=z-1$

Çözüm : Düzlemin normali, bu düzleme dik olan istenen doğrunun doğrultmanı olarak alınabilir. Buna göre $\vec{u}=\vec{N}=(2,-3,1)$ olduğundan,

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-1}{1}$$

elde edilir.

---

34. Elemanları $\mathbb{Z}_5$ cismine ait olan $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}$ **matrisinin tersi yoksa** $\boldsymbol{a=?}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

Çözüm : $\det A\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,5)$ olmalıdır.

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}=26-3a\equiv 2a+6\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,5)$$

denkliğinden, $a\equiv -3\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,5)$ elde edilir.

---

35. $\boldsymbol{u_1 = (1,0,2)}$, $\boldsymbol{u_2 = (1,1,2)}$ **vektörlerine dik olan ve** $\boldsymbol{A\,(1,2,3)}$ **noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.**

A) $\dfrac{1-x}{2} = z-3,\ y=2$ **B)** $\dfrac{x-1}{2} = z-3,\ y=2$ **C)** $\dfrac{1-x}{2} = y-3 = z-2$

D) $\dfrac{1-x}{2} = z-3 = y-2$ **E)** $\dfrac{1-x}{2} = z-3 = \dfrac{y-2}{2}$

Çözüm : İstenen doğrunun doğrultmanı $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ ile bulunabilir. (Çünkü, istenen doğru u_1 ve u_2 vektörlerine dik.) Buna göre,

$$\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2,0,1)$$

olduğundan, doğrunun denklemi :

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{z-3}{1},\ y=2$$

bulunur.

---

36. $\boldsymbol{x \circ y \circ z \circ w}$ **dik koordinat sisteminde** $\boldsymbol{A\,(1,2,1,3)}$ **noktasından geçen ve** $\overrightarrow{\mathbf{N}} = \boldsymbol{(2,3,1,4)}$ **vektörüne dik olan hiperdüzlem,** $\boldsymbol{y}$ **eksenini hangi noktada keser?**

A) 4 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 7 **E)** 5

Çözüm : Hiperdüzlemin denklemi

$$2\,(x-1) + 3\,(y-2) + 1\,(z-1) + 4\,(w-3) = 4w + 2x + 3y + z - 21 = 0$$

olduğundan, y eksenini

$$3y = 21 \Rightarrow y = 7$$

noktasında keser.

---

37. $\boldsymbol{\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2},\ z=1}$ **ve** $\boldsymbol{x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{k}}$ **doğrularının içinde bulunduğu düzlemin denklemini bulunuz.**

A) $-x+y-z=4$ **B)** $y+z=2$ **C)** $-8x+5y+5z=10$

D) $-4x+3y+3z=6$ **E)** $-x+y+z=2$

Çözüm : İstenen düzlemin normali : $\vec{N} = u_1 \times \overrightarrow{PQ}$ ile bulunabilir. $P\,(0,1,1)$, $Q\,(0,0,2)$ ve $u_1 = (2,2,0)$ olduğundan,

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-2,-2)$$

olur. O halde düzlem denklemi :

$$2\,(x-0) - 2\,(y-1) - 2\,(z-1) = 2x - 2y - 2z + 4 = 0$$

olur.

---

38. Kutupsal koordinatlardaki denklemi $\boldsymbol{r = \dfrac{12}{4 - 3\cos\theta}}$ olan konik aşağıdakilerden hangisidir?

A) Çember B) Elips C) Hiperbol D) Parabol E) Nokta

Çözüm : Konikler kutupsal formda $r = \dfrac{ep}{1 - e\cos\theta}$ şeklinde gösterilebilir. Burada e sayısı dış merkezliği, p sayısı da odak ile doğrultman arasındaki uzaklığı göstermektedir.

$0 < e < 1 \Rightarrow Elips$

$e > 1 \Rightarrow Hiperbol$

$e = 1 \Rightarrow Parabol$

olduğundan,

$$r = \frac{3}{1 - \frac{3}{4}\cos\theta} = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$$

şeklinde yazılırsa, $e = \dfrac{3}{4} < 1$ olduğundan, verilen denklem elipstir.

---

39. Aşağıdakilerden hangisi bir koni yüzeyinin denklemidir?

A) $\boldsymbol{z^2 + 1 = x^2 + y^2}$ B) $\boldsymbol{(z-1)^2 = x^2 + y^2}$ C) $\boldsymbol{z = x + y^2}$

D) $\boldsymbol{z = x^2 - y^2}$ E) $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$

Çözüm : $ax^2 + by^2 + cy^2 = 1$ türündeki yüzeyler elipsoid.

$\pm ax^2 \pm by^2 \pm cz^2 = 1$ türündeki yüzeyler hiperboloiddir. (Eşitliğin sol tarafında iki terim negatifse iki kanatlı, 1 terim negatifse tek kanatlı paraboloiddir.)

$ax^2 \pm by^2 \pm cz^2 = 0$ türündeki yüzeyler konidir.

$z = \pm ax^2 \pm by^2$ türündeki yüzeyler paraboloiddir.

Buna göre, $\boldsymbol{(z-1)^2 = x^2 + y^2}$ bir konidir.

---

40. $\boldsymbol{x^2 + 2y^2 = 22}$ elipsine üzerindeki $\boldsymbol{P(2,3)}$ noktasından çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\boldsymbol{9x + 16y = 66}$ B) $\boldsymbol{6x + 7y = 33}$ C) $\boldsymbol{2x + 3y = 22}$

D) $\boldsymbol{x - 3y = -7}$ E) $\boldsymbol{x + 3y = 11}$

Çözüm : $xx_0 + 2yy_0 = 22 \Rightarrow 2x + 2 \cdot 3y = 22 \Rightarrow x + 3y = 11$ olur.