T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



ELİPTİK İÇ ÇARPIM UZAYLARINDA GEOMETRİ

Mert EROL

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2022

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



ELİPTİK İÇ ÇARPIM UZAYLARINDA GEOMETRİ

Mert EROL

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELİPTİK İÇ ÇARPIM UZAYLARINDA GEOMETRİ

Mert EROL
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 27/06/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Danışman)
Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

ELİPTİK İÇ ÇARPIM UZAYLARINDA GEOMETRİ

Mert EROL

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Haziran 2022; 89 sayfa

Genelleştirilmiş iç çarpım uzaylarındaki geometrik problemler afin dönüşümler kullanılarak çözülebilir. Bunun için, verilen bir genelleştirilmiş skaler çarpım uzayındaki elipsoidi (elipsi), birim küreye (çembere) dönüştüren afin dönüşüm ve bu dönüşümün tersinden yararlanılabilir. Bu tezde, afin dönüşümlere gerek duymadan, Öklid uzayında bilinen bağıntıların genelleştirilmiş iç çarpım uzayları için verilmesi amaçlanmıştır. Buna göre, herhangi bir elips veya elipsoid üzerindeki hareket, bu elipsi veya elipsoidi küre kabul eden iç çarpım yardımıyla, doğrusal cebirin bilinen Cayley, Householder ve Rodrigues formülleri kullanılarak incelenmiştir. Bunun için, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $\varepsilon : ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 = 1$ elipsoidini, küre olarak kabul eden, ve $\mathbb{R}^3_{a,b,c}$ ile gösterilen eliptik iç çarpım uzayı tanımlanmış ve Öklid uzayındaki bir çok analitik geometri formülü bu uzayda afin dönüşümler kullanılmadan verilmiştir. Ayrıca, kuaterniyonlara benzer şekilde eliptik kuaterniyon kavramı da verilmiş ve literatürde bu konuda yapılan çalışmalar derlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Eliptik İç Çarpım, Eliptik Vektörel Çarpım, Eliptik Norm, Eliptik Rodriges Formülü, Eliptik Cayley Dönüşümü, Eliptik Householder Dönüşümü, Eliptik Kuaterniyonlar.

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

GEOMETRY IN ELLIPTICAL INNER PRODUCT SPACES

Mert EROL

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

June 2022; 89 pages

Geometric problems in generalized inner product spaces can be solved using affine transformations. For this, the affine transformation that maps the ellipsoid (ellipse) in a given generalized scalar product space to the unit sphere (circle) and the inverse of this transformation can be used.In this thesis, it is aimed to give the known relations in Euclidean space for generalized inner product spaces without the need for affine transformations. Accordingly, the motion on any ellipse or ellipsoid is studied using the well-known Cayley, Householder and Rodrigues formulas of linear algebra, with the help of the inner product that accepts this ellipse or ellipsoid as a sphere. For this, the inner product space, which accepts the ellipsoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ as a sphere and denoted by $\mathbb{R}^3_{a,b,c}$, has been defined and many analytical geometry formulas and methods in Euclidean space are given without using affine transformations in $\mathbb{R}^3_{a,b,c}$, where $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. In addition, the concept of elliptic quaternions, similar to quaternions, is given and studies on this subject in the literature are compiled.

KEYWORDS: Elliptical Inner Product, Elliptical Vektor Product, Elliptical Norm, Elliptical Rodriges Formula, Elliptical Cayley Transformation, Elliptical Householder Transformation, Elliptical Quaternion.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Assoc. Prof. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU
Assoc. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Bu tezde, eliptik iç çarpım uzayları ile ilgili temel çalışmalar derlenerek verilmiştir. Öklid uzayındaki temel formüller, eliptik uzayda da elde edilmiştir. Ayrıca, Özdemir (2016) tarafından verilen eliptik dönme matrislerinin nasıl bulunacağı detaylı olarak incelenmiştir.

Tez konumun belirlenmesinde ve hazırlanmasında, her türlü yardım ve fedakarlığı esirgemeyen, bilgisi, tecrübesi ve destekleri ile çalışmalarımda bana yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR'e en içten duygularla teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu çalışmamı, rahmetli babam Hayrettin EROL'a ithaf ederim. Hayatım boyunca beni destekleyerek cesaretlendiren, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen annem Gülseren EROL'a ve ablam Merve EROL SÜZEN'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
AKADEMİK BEYAN vi
SİMGELER vii
ŞEKİLLER DİZİNİ viii
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK TARAMASI 4
3. MATERYAL VE METOD 23
3.1. Eliptik İç Çarpım Uzayı 23
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 29
4.1. Eliptik İç Çarpımın Geometrik Uygulamaları 29
4.2. Eliptik Vektörel Çarpımın Geometrik Uygulamaları 31
4.3. Eliptik Karma Çarpımın Geometrik Uygulamaları 35
4.4. Eliptik İç Çarpım Uzaylarında Doğrunun Analitik Olarak İncelenmesi 37
4.4.1. Bir noktanın bir doğruya uzaklığı 38
4.4.2. Eliptik iç çarpım uzayında aykırı iki doğru arasındaki uzaklık 39
4.4.3. Eliptik iç çarpım uzayında dikme ayaklarının bulunması 41
4.5. Eliptik İç Çarpım Uzaylarında Düzlemin Analitik Olarak İncelenmesi 42
4.5.1. Bir noktası ve normali bilinen düzlemin denklemi 42
4.5.2. Eliptik iç çarpım uzayında iki düzlemin birbirine göre durumları 44
4.5.3. Eliptik iç çarpım uzayında bir doğru ile bir düzlemin birbirine göre durumları 46
4.5.4. Bir doğru ile bir düzlem arasındaki açı 48
4.5.5. Bir noktanın bir düzleme olan uzaklığı 49
4.5.6. Paralel iki düzlem arasındaki uzaklık 51
4.6. Eliptik İç Çarpım Uzaylarında İzdüşüm ve Simetri 51
4.7. Eliptik İç Çarpım Uzaylarında Dönme Dönüşümü 57
4.8. Eliptik Dönme Matrisi Oluşturma 60
4.8.1. Rogrigues dönme formülü 60
4.8.2. Eliptik cayley dönme matrisi 65

4.8.3. Eliptik householder dönüşümü 67
4.8.4. Eliptik kuaterniyonlar 72
5. SONUÇLAR 80
6. KAYNAKLAR 87
ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum "*Eliptik İç Çarpım Uzaylarında Geometri*" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

27/06/2022

Mert EROL

SİMGELER

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	: Öklid İç Çarpım Uzayı
$\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$	: Eliptik İç Çarpım Uzayı
$\mathbb{V}$	: Vektör Uzayı
$\mathbb{H}$	: Kuaterniyonlar Cebiri
$\mathbb{H}_1$	: Birim Kuaterniyonlar Kümesi
$\mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$	: Eliptik Kuaterniyonlar Kümesi
$\mathcal{B}$	: Bilineer Form
Ω	: Bilineer Form ile İlişkinlendirilmiş Matris
Δ	: $\mathcal{B}$ Bilineer Formunun Sabiti
$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$	: $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ Vektörlerinin $(\mathbb{V}, \mathcal{B})$ Uzayındaki İç Çarpımı
$\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle$	: $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ Vektörlerinin Öklid Uzayındaki İç Çarpımı
$\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}$	: $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ Vektörlerinin $(\mathbb{V}, \mathcal{B})$ Uzayındaki Vektörel Çarpımı
$\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}$	: $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ Vektörlerinin Öklid Uzayındaki Vektörel Çarpımı
$\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}$	: $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ Vektörünün $(\mathbb{V}, \mathcal{B})$ Uzayındaki Normu
$\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|$	: $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ Vektörünün Öklid Uzayındaki Normu
$\cos\theta_{\mathcal{B}}$	: Eliptik Uzayda $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ Vektörleri Arasındaki Açı
$\cos\theta$	: Öklid Uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ Vektörleri Arasındaki Açı
$\mathbf{O}_{\mathcal{B}}(n)$	: Ortogonal Dönüşümlerin Kümesi veya Ortogonal Matrislerin Kümesi
$\mathbf{SO}_{\mathcal{B}}(n)$	: Dönme Dönüşümlerinin Kümesi veye Dönme Matrislerinin Kümesi
$\mathbf{Y}_{\mathcal{B}}(n)$	: Yansıma Dönüşümlerinin Kümesi veya Yansıma Matrislerinin Kümesi
J	: Simetrik Dönüşümlerin veya Simetrik Matrislerin Kümesi
L	: Ters Simetrik Dönüşümlerin veya Ters Simetrik Matrislerin Kümesi
C	: Cayley Dönüşümü veya Cayley Matrisi
$\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}$	: Householder Dönüşümü veya Householder Matrisi
S_q	: Kuaterniyonun Skaler Kısmı
$\mathbf{V}_q$	: Kuaterniyonun Vektör Kısmı
$\overline{q}$	: Kuaterniyonun Eşleniği

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. ABCD üçgensel piramidi 36

Şekil 4.2. Aykırı d_1 ve d_2 doğruları arasındaki uzaklık 40

Şekil 4.3. Aykırı d_1 ve d_2 doğrularının en yakın olan noktalarının koordinatları 42

Şekil 4.4. P noktasından geçen ve N vektörüne dik olan düzlem 42

Şekil 4.5. Birbirine dik olan ω_1 ve ω_2 düzlemleri 45

Şekil 4.6. $\mathbb{R}^3_{1,2,4}$ uzayında ortogonal iki düzlem 45

Şekil 4.7. ω_1 ve ω_2 düzlemleri arasındaki açı 46

Şekil 4.8. ω düzlemine paralel olan d doğrusu 47

Şekil 4.9. ω düzlemine ile dik olan d doğrusu 47

Şekil 4.10. d doğrusu ile ω düzlemi arasındaki açı 48

Şekil 4.11. P noktasının düzleme uzaklığı 50

Şekil 4.12. A noktasının doğru üzerindeki izdüşüm noktası 52

Şekil 4.13. A noktasının düzlem üzerindeki izdüşüm noktası 53

Şekil 4.14. A noktasının bir doğruya göre simetriği olan nokta 54

Şekil 4.15. A noktasının bir düzleme göre simetriği olan nokta 55

Şekil 4.16. $\mathbb{R}^2_{1/9,1/4}$ eliptik düzlemindeki eliptik dönme 62

Şekil 4.17. $\mathbb{R}^3_{1/4,1/9,1/4}$ eliptik uzayındaki eliptik dönme 65

1. GİRİŞ

Bu tezde temel analitik geometri formüllerinin genelleştirilmiş iç çarpım uzaylarına uyarlaması yapılarak, Öklid uzayı ile aradaki küçük farkların görülmesi ve afin dönüşümlere gerek duymadan, bu uzayın küreleri üzerindeki hareketlerin, Öklid uzayındaki yöntemlerle nasıl incelenebileceği gösterilmiş ve literatürde bu konuda yapılan çalışmalar derlenmiştir. Tezde, $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ ile gösterilen eliptik iç çarpım uzayı ile, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = a_1u_1v_1 + a_2u_2v_2 + a_3u_3v_3$$

iç çarpımıyla donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayı kastedilmektedir. Açıktır ki bu uzayın birim küresi

$$\varepsilon : a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 1$$

biçimindedir ve bilinen elipsoiddir. Kısaca, eliptik iç çarpım uzayı, Öklid iç çarpım uzayının genelleştirilmiş halidir. Özel olarak $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1$ alınırsa, ε-elipsoidi olarak öklid uzayındaki birim küre**,** üç boyutlu eliptik iç çarpım uzayı olarak da üç boyutlu Öklid iç çarpım uzayı elde edilir. Bu çalışmadaki genel amaç ise eliptik uzayda, yapısı iyi bilinen Öklid uzayının yöntemlerini afin dönüşümlere ihtiyaç duymadan kullanabilmektir. Bu amaçla eliptik uzaydaki formülleri, Öklid uzayındaki formüller yardımıyla ifade edebilmek önemlidir. Bu anlaşılması zor olan eliptik uzayın, yapısı çok iyi bilinen öklid uzayı sayesinde algılanmasını sağlar. Eliptik dönme, bir vektör etrafında bir açı boyunca elips üzerindeki bir noktanın hareketidir. Eliptik dönme matrisi oluşturmak için öncelikle ilgili iç çarpım kullanılarak, eliptik ortogonal matris ve eliptik ters-simetrik matris tanımlanmıştır. Ardından, eliptik dönme matrisi oluşturmak için ünlü Rodrigues, Cayley ve Householder yöntemlerinin eliptik versiyonları kullanılmışıtır. Son olarak eliptik kuaterniyonlar tanımlanmış ve bu kuaterniyonlar kullanarak eliptik bir dönme matrisi oluşturulmuştur. Her yöntem kanıtlanmıştır ve birkaç sayısal örnekle birlikte verilmiştir.

Dönme, aralarındaki mesafeleri değiştirmeden noktaları hareket ettiren bir dönüşüm olan bir izometri örneğidir. Üç boyutlu dönme, katı bir cismin, bir eksen etrafındaki hareketini tanımlayan ve dönme matrisi olarak adlandırılan ortonormal matrisle ifade edilebilen doğrusal bir dönüşümdür. 3×3 dönme matrisleri, $SO(3)$ ile belirtilen özel bir abelian olmayan ortogonal grup oluşturur. 3×3 dönme matrisleri grubu, 3 boyutlu

bir uzayda dönme grubuna izomorfiktir. Bu, dönme matrislerinin çarpımının, dönüşlerin bileşimine karşılık geldiği anlamına gelir. Dönme matrisleri geometri, kinematik, fizik, bilgisayar grafikleri, animasyonlar ve katı cisim dönüşümlerinin tahminini içeren optimizasyon sorunlarının hesaplanması için yaygın olarak kullanılır. Bu nedenle, bir dönme matrisinin üretilmesi matematikte önemli bir problem olarak kabul edilir.

İki boyutlu Öklid uzayında, temel doğrusal cebir veya karmaşık sayılar kullanılarak kolayca bir dönme matrisi oluşturulabilir. Benzer şekilde, Lorentz düzleminde, hiperbolik sayılarla bir dönme matrisi oluşturulabilir. Daha yüksek boyutlu uzaylarda, bir dönme matrisinin her sütunu ve satırı sırasıyla diğer tüm sütunlara ve satırlara dik bir birim vektör olması gerektiğinden, iç çarpım kullanarak bir dönme matrisi elde etmek pratik değildir. Bu kısıtlamalar, iç çarpım kullanarak bir dönme matrisi oluşturmayı zorlaştırır. Bunun yerine daha yüksek boyutlu uzaylarda, birim kuaterniyonlar, Rodrigues formülü, Cayley formülü ve Householder dönüşümü gibi çeşitli yöntemler kullanılarak dönme matrisleri oluşturulabilir.

Aşağıda bahsedilen bu yöntemlerin kısa bir incelemesini yapılıp daha sonra bu yöntemlerin eliptik versiyonları elde edilmiştir.

1. Birim Kuaterniyon: Her birim kuaterniyon, Öklid 3-uzayında bir dönme temsil eder. Bir dönme matrisi oluşturmak için yalnızca dört sayı yeterlidir, tek kısıtlama kuaterniyon normunun 1'e eşit olmasıdır. Ayrıca bu yöntemde dönme açısı ve dönme ekseni kolayca belirlenebilir. Ancak, bu yöntem yalnızca üç boyutlu uzayda geçerlidir (Schmidt ve Nieman 2001; Vicci 2001). Lorentzian uzayında, sıradan kuaterniyonlar yerine timelike split kuaterniyonlar kullanılır (Özdemir ve Ergin 2006; Özdemir vd. 2013).

2. Rodrigues Formülü: T ters simetrik matris ve dönüş açısı θ olduğu, $e^{\theta T}$ üstel matrisi kullanılarak bir ortonormal matris elde edilebilir. Bu yöntemde, Öklid 3-uzayında bir dönme matrisi oluşturmak için yalnızca üç sayı gerekir (Bracket 1984; Murray 1994; Politi 2001; Kula vd. 2005). Bu üç sayıyla ayarlanan vektör dönme eksenini verir. Bu yöntem n boyutlu Öklid ve Lorentzian uzaylarına genişletilebilir (Gallier ve Xu 2000; Eberly 2007; Mebius 2007; Gallier 2014; Özdemir ve Erdoğdu 2014).

3. Cayley Formülü: T ters simetrik bir matris olmak üzere, $C = (I + T)(I - T)^{-1}$

formülü bir dönme matrisi verir. Dönme matrisleri, trigonometrik işlevler kullanmadan Cayley formülü tarafından verilebilir (Cayley 1889; Selig 2007; Özkaldı ve Gündoğan 2010; Erdoğdu ve Özdemir 2015; Norris 2018).

4. Householder Dönüşümü: Householder dönüşümü bize bir yansıma matrisi verir. İki Householder dönüşümü kullanarak bir dönme matrisi elde edilebilir. Bu yöntem zarif bir yöntemdir ancak uzun ve sıkıcı olabilir. Bu yöntemde, dönme açısı ayrıca hesaplanmalıdır. Bu dönüşüm birkaç skaler çarpım uzayında kullanılabilir (Uhlig 2001; Mackey vd. 2004; Aragón-González vd. 2006; Fuller 2011; Rodríguez-Andrade vd. 2011).

Bu yöntemleri kullanarak, özellikle Öklid ve Lorentz uzaylarında dönme matrisleri üretmeye ilişkin ayrıntılar, bazıları referans bölümünde verilen çeşitli makalelerde bulunabilir. Bu yazarlar çoğunlukla ilişkili matrisleri $diag(\pm 1, ..., \pm 1)$ olan pozitif belirli skaler çarpım uzayındaki dönme matrislerini incelemiş ve sonuçları geometrik olarak yorumlamıştır. Örneğin, ilişkili matrislerin sırasıyla $diag(1, 1, 1)$ ve $diag(-1, 1, 1)$ olduğu üç boyutlu Öklid ve Lorentz uzaylarında dönme matrisleri oluşturmak için kuaterniyonlar ve timelike split kuaterniyonlar kullanılmıştır. Bu uzaylarda, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ küresi veya -$x^2 + y^2 + z^2 = \pm r$ hiperboloidleri üzerinde dönmeler meydana gelir. Yani Öklid ve Lorentz dönme matrisleri küresel ve hiperbolik dönüşleri anlamamıza yardımcı olur. Öklid uzayında, bir dönme matrisi bir noktayı veya katı bir cismi bir eksen etrafında dairesel bir açıyla döndürür. Yani hareket bir daire üzerinde gerçekleşir. Benzer şekilde, Lorentzian uzayında, bir dönme matrisi, dönme ekseninin sırasıyla timelike veya spacelike olmasına bağlı olarak bir noktayı bir eksen etrafında dairesel veya hiperbolik bir açıyla döndürür.

2. KAYNAK TARAMASI

Tezin bu kısmında ilerleyen bölümlerde gerekli olacak bazı temel tanım ve teoremler ifade edilmektedir. Ayrıntılı bilgi için Özdemir (2016, 2019) kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.1. *$\mathbb{V}$, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere*

$$\mathcal{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}, (\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \to \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$$

dönüşümü, her $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \in \mathbb{V}$ için,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(a\overrightarrow{\mathbf{u}} + b\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) &= a\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) + b\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, c\overrightarrow{\mathbf{v}} + d\overrightarrow{\mathbf{w}}) &= c\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) + d\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \end{aligned}$$

*eşitliklerini sağlıyorsa, $\mathcal{B}$ 'ye $\mathbb{V}$ vektör uzayı üzerinde bir **bilineer form** denir (Özdemir 2019).*

Örnek 2.2. *$\mathbb{R}^3$ uzayındaki $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için*

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 2u_1v_1 - 5u_1v_2 - u_2v_1 + 4u_2v_3$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir bilineer formdur.

Tanım 2.3. *$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı ve $\mathbf{S} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}\right\}$ kümesi bu uzayın bir tabanı olmak üzere, her $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ vektörü,*

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = k_1\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + k_2\overrightarrow{\mathbf{e}}_2 + \ldots + k_n\overrightarrow{\mathbf{e}_n}$$

olacak şekilde, $\mathbf{S}$ tabanının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Buradaki $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sayıları ile oluşturulan

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

$n \times 1$ tipindeki matrise, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörünün $\mathbf{S}$ tabanındaki koordinatı denir (Özdemir 2019).

Tanım 2.4. *$\mathbb{V}$ vektör uzayının bir tabanı $\mathbf{S} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}\}$ ve a_{ij}=B($\overrightarrow{\mathbf{e}_i}, \overrightarrow{\mathbf{e}_j}$) olmak üzere $\Omega_{\mathbf{S}} = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi tanımlnasın. $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörlerinin $\mathbf{S}$ tabanına göre koordinatları sırasıyla*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{u}}\right]_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \; ve \; \left[\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

olsun. Eğer, $\mathcal{B}$ bir bilineer form ise

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \left[\overrightarrow{\mathbf{u}}\right]_{\mathbf{S}} \Omega_{\mathbf{S}} \left[\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]_{\mathbf{S}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i v_j$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki

$$\Omega_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \cdots & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \cdots & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \cdots & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}) \end{bmatrix}$$

*matrisine, $\mathcal{B}$ **bilineer formunun $\mathbf{S}$ tabanıyla ilişkilendirilmiş matrisi** denir. $\Delta_{\mathbf{S}} = \sqrt{|\det \Omega_{\mathbf{S}}|}$ sayısına da $\mathcal{B}$ **bilineer formunun $\mathbf{S}$ tabanına göre sabiti** denir. $\mathbb{V}$ vektör uzayı olarak $\mathbb{R}^n$ uzayı alındığında $\mathbf{S}$ tabanı yerine standart taban alınırsa, $\Omega_{\mathbf{S}}$ matrisine kısaca $\mathcal{B}$ **bilineer formuyla ilişkilendirilmiş matris** veya $\mathcal{B}$ 'nin **temel matrisi** ve $\Delta_{\mathbf{S}}$ sayısına da $\mathcal{B}$ **bilineer formunun sabiti** denir (Özdemir 2019).*

Örnek 2.5. *$\mathbb{R}^3$ uzayındaki $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için, $\mathcal{B}$ bilineer formu*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = u_1 v_1 - 7u_1 v_2 - 3u_2 v_1 + 4u_2 v_3 - u_3 v_3$$

şeklinde tanımlansın. $\mathbb{R}^3$ uzayının standart tabanı $\mathbf{S} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$ ve a_{ij} =B($\overrightarrow{\mathbf{e}_i}, \overrightarrow{\mathbf{e}_j}$) olmak üzere, $\mathcal{B}$ bilineer formu

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \left[\overrightarrow{\mathbf{u}}\right]_{\mathbf{S}} \Omega_{\mathbf{S}} \left[\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]_{\mathbf{S}} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} u_i v_j$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_3, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_3, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_3, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathcal{B}$ bilineer formuyla ilişkilendirilmiş matris

$$\Omega_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $\mathcal{B}$ bilineer formunun sabiti ise

$$\Delta_{\mathbf{S}} = \sqrt{|\det \Omega_{\mathbf{S}}|} = \sqrt{21}$$

'dir.

Bu çalışmanın kalan bölümünde notasyon sadeliğini sağlamak adına $\Omega_{\mathbf{S}}$ yerine Ω ve $\Delta_{\mathbf{S}}$ yerine ise Δ yazılacaktır. $\mathbf{S}$ 'nin standart veya standart olmayan taban olup-olmadığına bakılmaksızın, bilineer formun $\mathbf{S}$ tabanı ile ilişkilendirilmiş matris ifadesi yerine yalnızca bilineer form ile ilişkilendirilmiş matris denilecektir. Ayrıca $\left[\overrightarrow{\mathbf{u}}\right]_{\mathbf{S}}$ notasyonu yalnızca $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ şeklinde yazılacaktır.

Tanım 2.6. *$\mathcal{B}$, $\mathbb{V}$ vektör uzayı üzerinde tanımlanan bir bilineer form olmak üzere, $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ için*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 0$$

*ise $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörlerine, $\mathbb{V}$ uzayında $\mathcal{B}$ bilineer formuna göre **ortogonal vektörler** veya kısaca $\mathcal{B}$-**ortogonal vektörler** denir (Özdemir 2019).*

Örnek 2.7. *$\mathbb{R}^3$ uzayındaki $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için, $\mathcal{B}$ bilineer formu*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 - u_3v_3$$

şeklinde tanımlansın. $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 0, 3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (3, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$ vektörleri $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 0$ eşitliğini sağladığından dolayı, $\mathbb{R}^3$ uzayında $\mathcal{B}$ bilineer formuna göre ortogonal vektörlerdir.

Tanım 2.8. *$\mathcal{B}$ bir bilineer form olmak üzere, her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ için*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})$$

*ise $\mathcal{B}$ 'ye **simetrik bilineer form**,*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = -\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})$$

*ise $\mathcal{B}$ 'ye **ters simetrik bilineer form** denir. Buna bağlı olarak bilineer form ile ilişkilendirilmiş Ω matrisi de simetrik veya ters simetrik olacaktır. Diğer yandan, bir bilineer form ile ilişkilendirilmiş matris tersinir ise, bu bilineer forma **nondejenere bilineer form** aksi halde **degenere bilineer form** denir. O halde*

$$\det \Omega \neq 0$$

ise, $\mathcal{B}$ bilineer formuna nondejeneredir denir. Bu ise

$$\text{her } \overrightarrow{\mathbf{u}} \neq 0 \in \mathbb{V} \text{ için } \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \neq 0$$

olacak şekilde bir $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ vektörünün olduğu anlamına gelir. Başka bir ifadeyle

$$\text{her } \overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V} \text{ için } \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 0$$

*eşitliği sadece $\overrightarrow{\mathbf{v}} = 0$ iken sağlanıyorsa, $\mathcal{B}$ 'ye **nondegenere(bozulmamış) bilineer form** denir. Aksi halde, **dejenere(bozuk) bilineer form** denir. Kısaca, bir nondegenere bilineer formda, tüm vektörlere ortogonal olan tek vektörün sıfır vektörü($\overrightarrow{\mathbf{0}}$) olması gerekir (Özdemir 2019).*

Örnek 2.9. *$\mathbb{R}^3$ uzayındaki $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için;*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = u_1v_1 - 7u_1v_2 - 7u_2v_1 + u_2v_2 + 4u_2v_3 + 4u_3v_2 - u_3v_3$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{B}$ bilineer formu simetrik ve nondejenere,

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = u_1v_1 - 7u_1v_2 + 7u_2v_1 + u_2v_2 + 4u_2v_3 - 4u_3v_2 - u_3v_3$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{B}$ bilineer formu ters simetrik,

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = u_1v_1 + 2u_1v_2 - 3u_2v_1$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{B}$ bilineer formu ise dejeneredir.

Tanım 2.10. *$\mathcal{B}$ bir bilineer form olmak üzere, her $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ için*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) \geq 0$$

ise ve

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) = 0$$

*olması yalnızca $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ iken mümkün ise, $\mathcal{B}$ **bilineer formuna pozitif tanımlıdır** denir. Eğer*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) \geq 0$$

koşulu sağlanıyorsa, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ iken

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) = 0$$

eşitliği sağlanıyor ancak

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) = 0$$

*iken, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ vektöründen başka bir vektör de olabiliyorsa, $\mathcal{B}$, **yarı pozitif tanımlıdır** denir (Özdemir 2019).*

Örnek 2.11. *$\mathbb{R}^3$ uzayındaki $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 2u_1v_1 + u_1v_2 + u_3v_2$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{B}$ bilineer formu pozitif tanımlı,

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 2u_1v_1 - u_1v_2 + u_3v_2$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{B}$ bilineer formu ise yarı pozitif tanımlıdır.

Tanım 2.12. *$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı olmak üzere, $\mathcal{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan dönüşüm,*

-Bilineer

-Simetrik

-Nondejenere(Bozulmamış)

*ise, $\mathcal{B}$ dönüşümüne $\mathbb{V}$ uzayı üzerinde bir **skaler çarpım**, $\mathbb{V}$ vektör uzayına da $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir **skaler çarpım uzayı** denir ve bu uzay $(\mathbb{V}, \mathcal{B})$ şeklinde gösterilir (Özdemir 2019).*

Literatürde, bazen skaler çarpım uzayına, iç çarpım uzayı da denilmektedir. Fakat, bu çalışmada iç çarpım uzayı denilince, pozitif tanımlı, simetrik, bilineer form anlaşılacaktır. Skaler çarpım uzayı tanımında görüldüğü gibi, pozitif tanımlılık koşulu yoktur. İç çarpımda ise bu koşul aranacaktır. Örnek (2.13)'ün ardından iç çarpım uzayının tanımı verilmiştir.

Örnek 2.13. $\mathbb{R}^3$ *uzayındaki* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ *vektörleri için*

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir skaler çarpımdır. Bu çarpıma ***Lorentz skaler çarpımı*** *denir. Literatürde, Lorentz iç çarpımı şeklinde de kullanılır. Fakat, pozitif tanımlı olmadığı için, aşağıda verilen Tanım (2.14)'teki şekliyle bir iç çarpım değildir. Lorentz skaler çarpımıyla birlikte,* $\mathbb{R}^3$ *uzayına* ***Lorentz uzayı*** *denilir ve* $\mathbb{R}^3_{-1,1,1}$ *şeklinde gösterilir.* $\mathbb{R}^3$ *uzayının standart tabanı* $\mathbf{S} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$ *ve* a_{ij}=$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$ *olmak üzere,* $\mathcal{B}$ *skaler çarpımı,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) &= \overrightarrow{\mathbf{u}}^T \Omega \overrightarrow{\mathbf{v}} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} u_i v_j \\
&= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_3, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_3, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_3, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathcal{B}$ *skaler çarpımıyla ilişkilendirilmiş matris,*

$$\Omega = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $\mathcal{B}$ *skaler çarpımının sabiti ise,*

$$\Delta = \sqrt{|\det \Omega|} = 1$$

'dir.

Tanım 2.14. *$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı olmak üzere, $\mathcal{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan dönüşüm, her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \in \mathbb{V}$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki koşulları sağlarsa, $\mathcal{B}$ dönüşümüne $\mathbb{V}$ üzerinde bir **iç çarpım**, $\mathbb{V}$ vektör uzayına da $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir **iç çarpım uzayı** denir ve bu uzay $(\mathbb{V}, \mathcal{B})$ şeklinde gösterilir. $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörlerinin iç çarpımı, $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$ ile gösterilir.*

İ1. (Bilineerlik Özelliği)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(a\overrightarrow{\mathbf{u}} + b\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) &= a\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) + b\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, a\overrightarrow{\mathbf{v}} + b\overrightarrow{\mathbf{w}}) &= a\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) + b\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \end{aligned}$$

İ2. (Simetri)

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})$$

İ3. (Pozitif Tanımlılık-1)

$$\text{Her } \overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V} \text{ için, } \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) \geq 0$$

İ4. (Pozitif Tanımlılık-2)

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

(Özdemir 2019).

Tanım (2.14)'te **İ1**, **İ2** ve **İ3** şartları ile birlikte, **İ4** şartından sadece yeter şart sağlanırsa yani,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) = 0$$

koşulu sağlanırsa, $\mathcal{B}$ dönüşümüne, $\mathbb{V}$ üzerinde bir **pseudo (yarı) iç çarpım** denir (Özdemir 2019).

Tanım 2.15. *$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere*

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

*şeklinde tanımlanan dönüşüm bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma **Öklid iç çarpımı**, Öklid iç çarpımıyla birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına ise **n-boyutlu Öklid iç çarpım uzayı** veya kısaca **Öklid uzayı** denir. Öklid iç çarpımı $\mathcal{B}$ sembolü yerine $\langle , \rangle$ sembolü ile gösterilecektir. $\mathbb{R}^n$*

uzayının standart tabanı $\mathbf{S} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots \overrightarrow{\mathbf{e}_n}\}$ *ve* a_{ij}=$\langle \overrightarrow{\mathbf{e}_i}, \overrightarrow{\mathbf{e}_j} \rangle$ *olmak üzere, Öklid iç çarpımı,*

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle &= \overrightarrow{\mathbf{u}}^T \Omega \overrightarrow{\mathbf{v}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i v_j \\
&= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 \rangle & \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 \rangle & \cdots & \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}_n} \rangle \\ \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 \rangle & \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 \rangle & \cdots & \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}_n} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 \rangle & \langle \overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 \rangle & \cdots & \langle \overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}_n} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Öklid iç çarpımıyla ilişkilendirilmiş matris,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

olarak bulunur. Bu matris $n \times n$ *tipindeki birim matristir. Öklid iç çarpımının sabiti ise*

$$\Delta = \sqrt{|\det \Omega|} = 1$$

'dir (Özdemir 2019).

Özel bir durum olarak, $n = 3$ için $\mathbb{R}^3$ uzayındaki $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerinin öklid iç çarpımı $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ şeklindedir. $\mathbb{R}^3$ uzayının standart tabanı $\mathbf{S} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$ ve a_{ij}=$\langle \overrightarrow{\mathbf{e}_i}, \overrightarrow{\mathbf{e}_j} \rangle$ olmak üzere, Öklid iç çarpımı,

$$\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle = \overrightarrow{\mathbf{u}}^T \Omega \overrightarrow{\mathbf{v}} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} u_i v_j$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 \rangle & \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 \rangle & \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3 \rangle \\ \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 \rangle & \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 \rangle & \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3 \rangle \\ \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_3, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 \rangle & \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_3, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 \rangle & \langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_3, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Öklid iç çarpımıyla ilişkilendirilmiş matris,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

olarak bulunur. Öklid iç çarpımının sabiti ise $\Delta = \sqrt{|\det \Omega|} = 1$'dir.

Örnek 2.16. $\mathbb{R}^3$ *öklid iç çarpım uzayındaki* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (7, 5, 2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1, 3, 5)$ *vektörlerinin öklid iç çarpımı* $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle = 32$ *olarak bulunur.*

Tanım 2.17. $\mathbb{V}$ *kümesi,* $\mathbb{R}$ *reel sayılar cismi üzerinde* n *boyutlu bir vektör uzayı ve* $\mathcal{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *bir skaler çarpım olsun.* $\mathbf{S} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}\}$ *kümesi* $\mathbb{V}$ *uzayının bir ortogonal tabanı olsun. Yani*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}_i}, \overrightarrow{\mathbf{e}_j}) = \mathcal{B}_{ij}$$

olmak üzere

$$\mathcal{B}_{ij} = 0, i \neq j \text{ ise,}$$
$$\mathcal{B}_{ij} \neq 0, i = j \text{ ise,}$$

koşulları sağlansın. $\mathbf{S}$ *tabanına göre,* $\mathcal{B}$ *skaler çarpımıyla ilişkilendirilmiş matris,*

$$\Omega = diag(\mathcal{B}_{11}, \mathcal{B}_{22}, \ldots, \mathcal{B}_{nn})$$

ve

$$\Delta = \sqrt{|\det \Omega|} = \sqrt{\left| \prod_{k=1}^{n} \mathcal{B}_{kk} \right|}$$

sayısı, $\mathcal{B}$ skaler çarpımının $\mathbf{S}$ tabanına göre sabiti olsun. $(\mathbb{V}, \mathcal{B})$ uzayındaki $n-1$ tane $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ vektörü ile oluşturulan $(n-1)\times n$ türündeki matrisin k 'ıncı kolonunun silinmesiyle elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ matrisin determinantını Δ_k ile gösterelim. Buna göre, $\mathbb{V}$ uzayındaki

$$\mathcal{V}(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}) = \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1} = \Delta \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{1+k}\overrightarrow{\mathbf{e}_k}}{\mathcal{B}_{kk}} \Delta_k$$

*vektörüne, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ vektörlerinin, $(\mathbb{V}, \mathcal{B})$ uzayındaki **vektörel çarpımı** denir (Özdemir 2019).*

Bu vektörel çarpım tanımı biraz daha açık yazılabilir. $(\mathbb{V}, \mathcal{B})$ uzayında verilen $(n-1)$ tane $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\Delta = \sqrt{|\det \Omega|}$ iç çarpım sabiti olmak üzere

$$\mathcal{V} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \cdots \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$$

$$(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}) \to \mathcal{V}(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}) = \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1} = \Delta \begin{vmatrix} \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1)} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2)} & \cdots & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}_n}}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}_n})} \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{(n-1)1} & u_{(n-1)2} & \cdots & u_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlanır. Elde edilen vektör $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u_{n-1}}}$ vektörlerinin tamamına ortogonal bir vektördür. Yani, $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$ eşitliği sağlanır. Burada $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için $\overrightarrow{\mathbf{u}}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in})$ dir.

Tanım 2.18. *$i = 1, 2, \ldots, n-1$ için $\overrightarrow{\mathbf{u}}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}) \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{S} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}\right\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayının standart tabanı olsun. Öklid iç çarpım uzayında verilen $(n-1)$ tane $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ vektörlerinin vektörel çarpımı,*

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1} = \Delta \begin{vmatrix} \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1}{\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 \rangle} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2}{\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 \rangle} & \cdots & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}_n}}{\langle \overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}_n} \rangle} \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{(n-1)1} & u_{(n-1)2} & \cdots & u_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

eşitliğiyle tanımlanır ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ *vektörüne,* $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ *vektörlerinin* ***öklid vektörel çarpımı*** *denir.* $\mathbb{R}^n$ *uzayında Öklid iç çarpımı*

$$\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

ve öklid iç çarpım sabiti $\Delta = \sqrt{|\det \Omega|} = 1$ *olduğundan,,* $\mathbb{R}^n$ *iç çarpım uzayında* $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ *vektörlerinin Öklid vektörel çarpımı,*

$$\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}) \rightarrow \mathcal{V}(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}) = \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1} = \Delta \begin{vmatrix} \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1}{\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 \rangle} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2}{\langle \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 \rangle} & \cdots & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}_n}}{\langle \overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}_n} \rangle} \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{(n-1)1} & u_{(n-1)2} & \cdots & u_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 & \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 & \cdots & \overrightarrow{\mathbf{e}_n} \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{(n-1)1} & u_{(n-1)2} & \cdots & u_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlanır. Elde edilen $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ *vektörü,* $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ *vektörlerinin tamamına ortogonal bir vektördür. Yani,* $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k \rangle = 0$*,* $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$ *eşitliği sağlanır (Özdemir 2019).*

Özel bir durum olarak, $\mathbb{R}^3$ uzayının baz vektörleri $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}$ olmak üzere, $\mathbb{R}^3$ Öklid iç çarpım uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerinin Öklid vektörel çarpımı,

$$\mathcal{V} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \rightarrow \mathcal{V}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}} = \Delta \begin{vmatrix} \frac{\overrightarrow{\mathbf{i}}}{\langle \overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{i}} \rangle} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{j}}}{\langle \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{j}} \rangle} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{k}}}{\langle \overrightarrow{\mathbf{k}}, \overrightarrow{\mathbf{k}} \rangle} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. Burada $\Delta = \sqrt{|\det \Omega|} = 1$ dir. Elde edilen $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörü, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörlerinin her ikisine de ortogonal bir vektördür. Yani $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle = 0$ ve $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle = 0$ eşitlikleri sağlanır.

Örnek 2.19. $\mathbb{R}^3$ *öklid iç çarpım uzayında,* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (7, 5, 2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1, 3, 5)$ *vektörlerinin öklid vektörel çarpımı, (2.1) formülünden*

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 7 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (19, -33, 16)$$

olarak bulunur.

Tanım 2.20. $\mathbb{V}$, $\mathbb{R}$ *reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.* $\mathbb{V}$ *üzerinde tanımlanan* $\|.\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu, her* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ *vektörü ve* λ *skaleri için, aşağıdaki koşulları sağlarsa* $\|.\|$ *fonksiyonuna* ***norm****,* $\mathbb{V}$ *uzayına da* ***normlu uzay*** *denir.*

N1.(Pozitif Tanımlılık-1)

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| > 0$$

N2.(Pozitif Tanımlılık-2)

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

N3.(Skalerin Dışarı Çıkması)

$$\left\|\lambda \overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| = |\lambda| \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|$$

N4.(Üçgen Eşitsizliği)

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| + \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|$$

(Özdemir 2019).

Tanım (2.20)'da **N1**, **N3** ve **N4** şartları ile birlikte, **N2** şartından sadece yeter şart sağlanırsa, yani

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| = 0$$

koşulu sağlanırsa, bu durumda $\|.\|$ fonksiyonuna **pseudo (yarı) norm** denir (Özdemir 2019).

Teorem 2.21. *$\mathbb{V}$ bir iç çarpım uzayı ise $n : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^+$ $n(\overrightarrow{\mathbf{u}}) = \sqrt{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}$ fonksiyonu $\mathbb{V}$ üstünde bir normdur (Özdemir 2019).*

Teorem (2.21)'ye göre her iç çarpım uzayı, normlu uzaydır. Fakat tersi doğru değildir. Yani bir normlu uzay, iç çarpım uzayı olmak zorunda değildir.

Tanım 2.22. *$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı olsun. $\mathcal{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{V}$ uzayı üzerinde bir iç çarpım olmak üzere*

$$\|.\|_{\mathcal{B}} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^+, \ \overrightarrow{\mathbf{u}} \to \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}} = \sqrt{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{V}$ üzerindeki $\mathcal{B}$ iç çarpımına karşılık gelen norm fonksiyonu denir. $\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^+$ sayısına ise $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ vektörünün normu denir (Özdemir 2019).

Tanım 2.23. *$\mathbb{V}$ uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleri $\mathcal{B}$-ortogonal olsunlar. Ek olarak $\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}$ ve $\left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}$ normları 1 ise, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörlerine $\mathcal{B}$ **bilineer formuna göre ortanormal vektörler** veya kısaca $\mathcal{B}$-**ortanormal vektörler** denir (Özdemir 2019).*

Teorem 2.24. *$\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ uzayının $\mathcal{B}$-orthonormal bir tabanı $\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}_n}\}$ ise*

$$\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}_n}) = \Delta^{-1}$$

sağlanır (Özdemir 2016).

Tanım 2.25. *$\mathbb{R}^n$ öklid iç çarpım uzayında verilen bir $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ vektörünün normu,*

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

*eşitliğiyle tanımlanır ve $\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|$ sayısına $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ **vektörünün öklid iç çarpım uzayındaki uzunluğu** veya **öklid normu** denir (Özdemir 2019).*

Teorem 2.26. *$\mathbb{R}^n$ öklid iç çarpım uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleri arasındaki θ açısı,*

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|} \tag{2.2}$$

eşitliğiyle belirlenir (Özdemir 2019).

Örnek 2.27. $\mathbb{R}^3$ *öklid iç çarpım uzayında* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (7,5,2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1,3,5)$ *vektörleri arasındaki açının kosinüsü, (2.2) formülünden,* $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle = 32$, $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = \sqrt{78}$ *ve* $\left\| \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\| = \sqrt{35}$ *olduğu için*

$$\cos\theta = \frac{16\sqrt{2730}}{1365}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.28. $\mathbb{V}$ *ve* $\mathbb{W}$ *vektör uzayları olmak üzere,* $\mathbf{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *dönüşümü, her* $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ *ve* $c \in \mathbb{R}$ *için*

$$\mathbf{L}(\overrightarrow{\mathbf{u}} + c\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathbf{L}(\overrightarrow{\mathbf{u}}) + c\mathbf{L}(\overrightarrow{\mathbf{v}})$$

koşulunu sağlıyorsa, $\mathbf{L}$ *'ye* $\mathbb{V}$ *uzayından* $\mathbb{W}$ *uzayına bir* ***lineer dönüşüm*** *denir (Özdemir 2019).*

Tanım 2.29. $\mathbf{L} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *bir lineer dönüşüm,* $\mathbf{S}_{\mathbb{V}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ *ve* $\mathbf{S}_{\mathbb{W}} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ *kümeleri de sırasıyla* $\mathbb{V}$ *ve* $\mathbb{W}$ *uzaylarının tabanları olsun.* $\mathbf{L}(\alpha_1), \mathbf{L}(\alpha_2), \ldots, \mathbf{L}(\alpha_n)$ *vektörleri* $\mathbb{W}$ *uzayının vektörleridir ve bu vektörler* $\mathbb{W}$ *tabanına göre,*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\alpha_1) &= a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \ldots + a_{m1}\beta_m \\ \mathbf{L}(\alpha_2) &= a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{m2}\beta_m \\ &\vdots \\ \mathbf{L}(\alpha_n) &= a_{1n}\beta_1 + a_{2n}\beta_2 + \ldots + a_{mn}\beta_m \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $1 \leq i \leq n$ *ve* $1 \leq j \leq m$ *olmak üzere* a_{ij} *katsayıları,* α_i *ve* β_j *sayılarına bağlıdır. Görüleceği üzere* a_{ji} *sayıları* $n \times m$ *tipinde bir* $[a_{ji}]_{n\times m}$ *matrisi belirtir. Bu matrisin transpozuna* $\mathbf{L}$ ***lineer dönüşümünün*** $\mathbf{S}_{\mathbb{V}}$ *ve* $\mathbf{S}_{\mathbb{W}}$ ***tabanlarına göre temsil matrisi*** *denir. Bu matris*

$$\left[[a_{ji}]_{n\times m}\right]^T = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

şeklindedir ve $\mathcal{L}$ *ile gösterilir. Her* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\mathbf{L}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$$

olacak şekilde bir $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ *vardır.* $\mathbf{L}(\overrightarrow{\mathbf{u}}) = (\overrightarrow{\mathbf{v}})$ *eşitliği,* $\mathcal{L}$ *matrisi ve Tanım (2.3) yardımıyla*

$$\mathcal{L}\left[\overrightarrow{\mathbf{u}}\right]_{\mathbf{S}_{\mathbb{V}}} = \left[\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]_{\mathbf{S}_{\mathbb{W}}}$$

şeklinde yazılabilir (Özdemir 2019).

Tanım (2.29)'da $\mathbb{V}$ ve $\mathbb{W}$ uzayları yerine sırasıyla $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$ uzayları ve bu uzaylara karşılık gelen $\mathbf{S}_{\mathbb{R}^n}$ ile $\mathbf{S}_{\mathbb{R}^m}$ tabanları yerine de ilgili uzayların standart tabanları alınsın. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ için, $\mathbf{L}$ lineer dönüşümü, $\mathbf{L}(\overrightarrow{\mathbf{u}}) = (\overrightarrow{\mathbf{v}})$ eşitliğini sağlasın. Bu eşitlik $\mathcal{L}$ matrisi ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ile $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörlerinin matris temsilleri yardımıyla

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

matrisine, **L lineer dönüşümüne karşılık gelen standart matris** denir ve Tanım (2.29)'daki gibi $\mathcal{L}$ ile gösterilir. $\mathcal{L}$ matrisi, uzayın standart tabanına göre yazıldığı için, standart matris denir. $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$ uzaylarının farklı tabanları seçilirse, bu $m \times n$ türünden matris farklı şekilde bulunur (Özdemir 2019).

Tanım 2.30. $\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineer dönüşümü verilsin.* $\mathbf{L}$ *dönüşümüne,* $\det \mathcal{L} > 0$ *ise* ***yönlendirmeyi koruyan dönüşüm****,* $\det \mathcal{L} < 0$ *ise* ***ters yönlendirmeli dönüşüm*** *denir (Özdemir 2019).*

Tanım 2.31. *İç çarpımı koruyan lineer dönüşüme* ***ortogonal dönüşüm*** *denir. Dolayısıyla da bu dönüşümler uzaklığı koruyan dönüşümlerdir. Yani,* $\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineer dönüşüm olmak üzere, her* $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\mathcal{B}(\mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$$

eşitliği sağlanıyorsa, $\mathbf{L}$ *'ye* $\mathcal{B}$ ***iç çarpımına göre ortogonal dönüşüm*** *denir. Ortogonal dönüşümlerin kümesi bir gruptur. Bu grup*

$$\mathbf{O}_{\mathcal{B}}(n) = \left\{\mathbf{L} \mid \mathcal{B}(\mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \,,\, \forall\ \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n\right\}$$

ile gösterilir. $\mathbf{L}$*,* $\mathcal{B}$ *iç çarpımına göre ortogonal bir dönüşüm ise* $\mathbf{L}$*'ye karşılık gelen matrise,* $\mathcal{B}$ ***iç çarpımına göre ortogonal matris*** *veya kısaca* $\mathcal{B}$***-ortogonal matris*** *denir.* $\mathbf{L}$ *ortogonal dönüşümü bir lineer dönüşüm olduğu ve her lineer dönüşüme bir matris karşılık geldiği için, her ortogonal dönüşüme bir matris karşılık gelir. Ortogonal dönüşüme karşılık gelen matrise ortogonal matris denir.* $\mathbf{L}$ *lineer dönüşümüne karşılık gelen matris* $\mathcal{L}$ *olmak üzere, Tanım (2.4) göz önüne alınırsa*

$$\mathcal{B}(\mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{v}}) = (\mathcal{L}\overrightarrow{\mathbf{u}})^{\mathbf{T}}\Omega\mathcal{L}\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\mathcal{L}^{\mathbf{T}}\Omega\mathcal{L}\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

ve

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

eşitliklerinden bir $\mathbf{L}$ *dönüşümüne karşılık gelen matrisin ortogonal olması için gerek ve yeter koşulun*

$$\mathcal{L}^{\mathbf{T}}\Omega\mathcal{L} = \Omega$$

olduğu görülür. Ortogonal dönüşümler uzaklığı koruyan dönüşümler olduğu için, ortogonal matrisler vektörlerin normunu korur. Ortogonal bir matrisin determinantının $+1$ *veya* -1 *olduğu kolayca gösterilebilir. Her ortogonal dönüşüme bir ortogonal matris karşılık geldiği için, ortogonal dönüşümlerin kümesi*

$$\mathbf{O}_{\mathcal{B}}(n) = \left\{\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{nxn} \mid \mathcal{L}^{\mathbf{T}}\Omega\mathcal{L} = \Omega \,,\, \det\mathcal{L} = \pm 1\right\}$$

şeklinde ***ortogonal matrislerin kümesi*** *olarak da ifade edilebilir (Özdemir 2019).*

Ortogonal bir matriste tüm satırlar (veya sütunlar) birbirine $\mathcal{B}$-ortogonaldir. $\mathbf{O}_{\mathcal{B}}(n)$, $\mathbf{Gl}_{\mathcal{B}}(n)$ nin bir alt grubudur. $\mathbf{O}_{\mathcal{B}}(n)$ kümesi, $\mathbb{R}^{nxn}$ uzayının doğrusal bir alt uzayı olmamasına rağmen bir Lie grubudur (Özdemir 2016).

Tanım 2.32. *Determinantı 1 olan, yani yönlendirmeyi koruyan ortogonal dönüşümlere* ***dönme dönüşümü*** *denir. Dönme dönüşümlerinin kümesi bir gruptur ve* $\mathbf{SO}_{\mathcal{B}}(n)$ *ile gösterilir.*

$$\mathbf{SO}_{\mathcal{B}}(n) = \left\{\mathbf{L} : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \mid \det\mathcal{L} = 1 \,,\, \mathcal{B}(\mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \,,\, \forall\ \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n\right\}$$

*Dönme dönüşümlerine karşılık gelen matrislere **dönme matrisleri** denir ve dönme dönüşümlerinin kümesi*

$$\mathbf{SO}_{\mathcal{B}}(n) = \left\{\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{nxn} \mid \det \mathcal{L} = 1 \text{ , } \mathcal{L}^{\mathbf{T}}\Omega\mathcal{L} = \Omega\right\}$$

*şeklinde **dönme matrislerinin kümesi** olarak da gösterilebilir (Özdemir 2019).*

$\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{O}_{\mathcal{B}}(n)$ 'nin bir alt grubudur (Özdemir 2016).

Tanım 2.33. *Determinantı -1 olan, yani ters yönlendirmeli ortogonal dönüşümlere **yansıma dönüşümü** denir. Yansıma dönüşümlerinin kümesi $\mathbf{Y}_{\mathcal{B}}(n)$ ile gösterilir.*

$$\mathbf{Y}_{\mathcal{B}}(n) = \left\{\mathbf{L} : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \mid \det \mathcal{L} = -1, \mathcal{B}(\mathbf{L}\,\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{L}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \text{ , } \forall\ \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n\right\}$$

*Bu küme kapalılık özelliğini sağlamadığından grup değildir. İki yansıma dönüşümünün bileşkesi bir dönme dönüşümüdür. Yansıma dönüşümlerine karşılık gelen matrislere **yansıma matrisleri** denir ve yansıma dönüşümlerinin kümesi*

$$\mathbf{Y}_{\mathcal{B}}(n) = \left\{\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{nxn} : \det \mathcal{L} = -1 \text{ , } \mathcal{L}^{\mathbf{T}}\Omega\mathcal{L} = \Omega\right\}$$

*şeklinde **yansıma matrislerinin kümesi** olarak da gösterilebilir (Özdemir 2019).*

Tanım 2.34. *$\mathcal{B}$ bir bilineer form ve $\mathbf{L}$ bir lineer dönüşüm olmak üzere her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ için $\mathcal{B}(\mathbf{L}\,\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{L}\,\overrightarrow{\mathbf{v}})$ ise $\mathbf{L}$ 'ye $\mathcal{B}$ **bilineer formuna göre simetrik dönüşüm** veya kısaca $\mathcal{B}$-**simetrik dönüşüm** denir. **Simetrik dönüşümlerin kümesi** bir Jordan cebiridir. Bu cebir*

$$J = \left\{\mathbf{L} : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \mid \mathcal{B}(\mathbf{L}\,\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{L}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}) \text{ , } \forall\ \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n\right\}$$

*ile gösterilir. $\mathbf{L}$, $\mathcal{B}$ bilineer formuna göre simetrik bir dönüşüm ise $\mathbf{L}$ 'ye karşılık gelen matrise $\mathcal{B}$ **bilineer formuna göre simetrik matris** veya kısaca $\mathcal{B}$-**simetrik matris** denir. Tanım (2.4) göz önüne alınırsa*

$$\mathcal{B}(\mathbf{L}\,\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = (\mathcal{L}\,\overrightarrow{\mathbf{u}})^{\mathbf{T}}\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\mathcal{L}^{\mathbf{T}}\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

ve

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{L}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\Omega\mathcal{L}\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

eşitliklerinden bir $\mathbf{L}$ dönüşümüne karşılık gelen matrisin, simetrik olması için gerek ve yeter koşulun

$$\mathcal{L}^{\mathbf{T}}\Omega = \Omega\mathcal{L}$$

olduğu görülür. Her simetrik dönüşüme bir simetrik matris karşılık geldiği için, simetrik dönüşümlerin kümesi

$$J = \left\{ \mathcal{L} \in \mathbb{R}^{nxn} : \mathcal{L}^{\mathbf{T}}\Omega = \Omega\mathcal{L} \right\}$$

şeklinde ***simetrik matrislerin kümesi*** *olarak da ifade edilebilir (Özdemir 2019).*

$n(n+1)/2$ boyutlu J cebiri, nxn reel matris vektör uzayının bir alt uzayıdır. $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayındaki herhangi bir $\mathcal{B}$-simetrik matris, $a_{ij} = a_{ji}$ ve $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$S = \left[\frac{\Delta a_{ij}}{a_i} \right]_{nxn} \tag{2.3}$$

olarak tanımlanabilir (Özdemir 2016).

Tanım 2.35. *$\mathcal{B}$ bir bilineer form ve $\mathbf{L}$ bir lineer dönüşüm olmak üzere her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ için $\mathcal{B}(\mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = -\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{v}})$ ise $\mathbf{L}$ 'ye $\mathcal{B}$* ***bilineer formuna göre ters simetrik dönüşüm*** *veya kısaca $\mathcal{B}$-**ters simetrik dönüşüm** denir.* ***Ters simetrik dönüşümlerin kümesi*** *bir Lie cebiridir. Bu cebir*

$$L = \left\{ \mathbf{L} : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \mid \mathcal{B}(\mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = -\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{v}}) \, , \forall \, \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

ile gösterilir. $\mathbf{L}$, $\mathcal{B}$ bilineer formuna göre ters simetrik bir dönüşüm ise $\mathbf{L}$ 'ye karşılık gelen matrise $\mathcal{B}$ ***bilineer formuna göre ters simetrik matris*** *veya kısaca $\mathcal{B}$-**ters simetrik matris** denir. Tanım (2.4) göz önüne alınırsa*

$$\mathcal{B}(\mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = (\mathcal{L}\overrightarrow{\mathbf{u}})^{\mathbf{T}}\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\mathcal{L}^{\mathbf{T}}\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

ve

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{L}\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\Omega\mathcal{L}\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

eşitliklerinden bir $\mathbf{L}$ dönüşümüne karşılık gelen matrisin, ters simetrik olması için gerek ve yeter koşulun

$$\mathcal{L}^{\mathbf{T}}\Omega = -\Omega\mathcal{L}$$

olduğu görülür. Her ters simetrik dönüşüme bir ters simetrik matris karşılık geldiği için, ters simetrik dönüşümlerin kümesi

$$L = \left\{ \mathcal{L} \in \mathbb{R}^{nxn} : \mathcal{L}^{\mathbf{T}}\Omega = -\Omega\mathcal{L} \right\}$$

şeklinde ***ters simetrik matrislerin kümesi*** *olarak da ifade edilebilir (Özdemir 2019).*

$n(n+1)/2$ boyutlu L cebiri, nxn reel matris vektör uzayının bir alt uzayıdır. $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,...,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayındaki herhangi bir $\mathcal{B}$-ters simetrik matris, $a_{ij} = a_{ji}$ ve $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T = [t_{ij}]_{nxn} \text{ ve } t_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\Delta a_{ij}}{a_i}, i > j \\ -\frac{\Delta a_{ij}}{a_i}, i < j \\ 0, i = j \end{array} \right\} \tag{2.4}$$

olarak tanımlanabilir (Özdemir 2016).

Örnek 2.36. $\mathbb{R}^4_{1,2,2,1}$ *eliptik iç çarpım uzayında, (2.3) ve (2.4) formülleri ile elde edilen*

$$S = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & -3 & -6 \\ 10 & 8 & -12 & 14 \end{bmatrix} \textit{ ve } T = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -2 & -14 \\ \frac{4}{2} & 0 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 0 & -2 \\ 14 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri, sırasıyla birer simetrik ve ters simetrik matristir.

3. MATERYAL VE METOT

Tezin bu bölümünde eliptik iç çarpım uzayının tanımı ile bu uzaydaki vektörel çarpım, norm ve açı gibi kavramlar örnekleriyle birlikte verilecektir. Detaylar için Özdemir (2016) kaynağına bakılabilir.

3.1. Eliptik İç Çarpım Uzayı

Tanım 3.37. *$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ uzayında,*

$$\varepsilon : a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 1$$

hiperelipsoidini hiperküre olarak kabul eden iç çarpım, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = a_1u_1v_1 + a_2u_2v_2 + \cdots + a_nu_nv_n$$

*şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpıma **eliptik iç çarpım**, eliptik iç çarpımla birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına **eliptik iç çarpım uzayı** veya kısaca **eliptik uzay** denir ve $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ uzayının standart tabanı $\mathbf{S} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}\}$ ve a_{ij}=$B(\overrightarrow{\mathbf{e}_i}, \overrightarrow{\mathbf{e}_j})$ olmak üzere, eliptik iç çarpım,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) &= \overrightarrow{\mathbf{u}}^T \Omega \overrightarrow{\mathbf{v}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_iv_j \\
&= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \cdots & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \cdots & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \cdots & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Eliptik iç çarpım ilişkilendirilmiş matris,

$$\Omega = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

olarak bulunur. Eliptik iç çarpımının sabiti ise,

$$\Delta = \sqrt{|\det \Omega|} = \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

'dir (Özdemir 2016).

Özel bir durum olarak, $n = 3$ için $\mathbb{R}^3$ uzayındaki $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerinin eliptik iç çarpımı $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = a_1u_1v_1 + a_2u_2v_2 + a_3u_3v_3$ şeklindedir. Eliptik iç çarpımla birlikte $\mathbb{R}^3$ uzayına eliptik iç çarpım uzayı denir ve $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^3$ uzayının standart tabanı $\mathbf{S} = \{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3\}$ ve a_{ij}=B($\overrightarrow{\mathbf{e}_i}, \overrightarrow{\mathbf{e}_j}$) olmak üzere, eliptik iç çarpım,

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{u}}^T \Omega \overrightarrow{\mathbf{v}} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}u_iv_j$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_3, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_3, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_3, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Eliptik iç çarpımla ilişkilendirilmiş matris,

$$\Omega = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

birim matris olarak bulunur. Eliptik iç çarpım sabiti ise

$$\Delta = \sqrt{|\det \Omega|} = \sqrt{a_1 a_2 a_3}$$

'dır (Özdemir 2016).

Eliptik iç çarpım uzayı, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\varepsilon : a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 = 1$$

elipsoidini, küre olarak kabul eden iç çarpım uzayıdır. Yani, eliptik iç çarpım herhangi bir elipsoidi, eliptik iç çarpım uzayında küre olarak kabul eder. Eliptik uzaydaki bu küreye **eliptik küre** denir. Özel olarak $a_1 = 1, a_2 = 1, \ldots, a_n = 1$ alınırsa, ε-elipsoidi olarak **öklid küre,** n-boyutlu eliptik iç çarpım uzayı olarak da n-boyutlu Öklid uzayı elde edilir. Görüleceği üzere eliptik iç çarpım uzayı, Öklid iç çarpım uzayının genelleştirilmiş halidir. Özel olarak $n = 1$ için $\mathbb{R}^1_{a_1}$ uzayına, **eliptik doğru**; $n = 2$ için $\mathbb{R}^2_{a_1,a_2}$ uzayına, **eliptik düzlem**; $n = 3$ için $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayına, **eliptik uzay** denir. Ayrıca $n \geq 4$ için $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ uzayına, **hipereliptik uzay** denir.

Örnek 3.38. $\mathbb{R}^3$ *uzayındaki* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ *vektörleri için*

$$\varepsilon_1 : 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \quad \textit{ve} \quad \varepsilon_2 : 9x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 18$$

elipsoidlerini küre olarak kabul eden iç çarpımlar sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) &= 2u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3, \\ \mathcal{B}_2(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) &= \frac{1}{2}u_1v_1 + \frac{1}{6}u_2v_2 + \frac{1}{9}u_3v_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{R}^3$ *uzayındaki* $\mathcal{B}_1$ *ve* $\mathcal{B}_2$ *iç çarpımlarına eliptik iç çarpım,* $\mathcal{B}_1$ *veya* $\mathcal{B}_2$ *eliptik iç çarpımlarıyla birlikte* $\mathbb{R}^3$ *uzayına ise eliptik iç çarpım uzayı denir ve bu uzaylar sırasıyla* $\mathbb{R}^3_{2,2,1}$ *ve* $\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{9}}$ *ile gösterilir.* $\mathbb{R}^3_{2,2,1}$ *ve* $\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{9}}$ *eliptik iç çarpım uzaylarının,*

eliptik iç çarpım sabitleri de sırasıyla, $\Delta_1 = 2$ *ve* $\Delta_2 = \frac{\sqrt{3}}{18}$ *dir. Burada* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (7,5,2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1,3,5) \in \mathbb{R}^3$ *olarak seçilirse*

$$\mathcal{B}_1(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 54 \quad ve \quad \mathcal{B}_2(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \frac{64}{9}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.39. $i = 1,2,\ldots,n-1$ *için* $\overrightarrow{\mathbf{u}_i} = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}) \in \mathbb{R}^n$ *ve* $\mathbf{S} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}\right\}$ *kümesi* $\mathbb{R}^n$ *uzayının standart tabanı olsun.* $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ *eliptik iç çarpım uzayında verilen* $(n-1)$ *tane* $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ *vektörlerinin vektörel çarpımı,*

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1} = \Delta \begin{vmatrix} \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_1)} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2)} & \cdots & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}_n}}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}_n}, \overrightarrow{\mathbf{e}_n})} \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{(n-1)1} & u_{(n-1)2} & \cdots & u_{(n-1)n} \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

eşitliğiyle tanımlanır ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ *vektörüne,* $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ *vektörlerinin* ***eliptik vektörel çarpımı*** *denir (Özdemir 2016).*

Tanım (3.39) daha açık olarak şu şekilde ifade edilebilir : $\mathbb{R}^n$ uzayının baz vektörleri $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}_n}$ ve $i = 1,2,\ldots,n-1$ için $\overrightarrow{\mathbf{u}_i} = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\varepsilon : a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 1$$

elipsoidini, küre olarak kabul eden iç çarpım,

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = a_1u_1v_1 + a_2u_2v_2 + \cdots + a_nu_nv_n$$

şeklindedir. Bu uzay $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ ile gösterilir ve iç çarpım sabiti $\Delta = \sqrt{|\det \Omega|} = \sqrt{a_1a_2\cdots a_n}$ dir. $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında verilen $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ vektörlerinin eliptik vektörel çarpımı,

$$\mathcal{V} : \mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \times \mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \times \cdots \times \mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \rightarrow \mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$$

$$(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}) \rightarrow \mathcal{V}(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}) = \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1} = \Delta \begin{vmatrix} \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1,\overrightarrow{\mathbf{e}}_1)} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2,\overrightarrow{\mathbf{e}}_2)} & \cdots & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}_n}}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}_n},\overrightarrow{\mathbf{e}_n})} \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{(n-1)1} & u_{(n-1)2} & \cdots & u_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

$$= \Delta \begin{vmatrix} \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1}{a_1} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2}{a_2} & \cdots & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}_n}}{a_n} \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{(n-1)1} & u_{(n-1)2} & \cdots & u_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlanır. Elde edilen $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ vektörü, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ vektörlerinin tamamına eliptik olarak ortogonal bir vektördür. Yani, $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$ için $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k) = 0$ eşitliği sağlanır.

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 1$ elipsoidi bu uzay için birim küredir. $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ vektörleri, $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ uzayında birim vektörlerse, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{n-1}$ vektörü de birim vektördür. Öklid vektör çarpımı, eliptik vektör çarpımının özel bir halidir. Yani, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ alınırsa, öklid uzayında standart Öklid çarpımı ve standart ortogonallik elde edilir.

Özel bir durum olarak, $\mathbb{R}^3$ uzayının baz vektörleri $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \overrightarrow{\mathbf{e}}_3$ ve $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\varepsilon : a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 1$$

elipsoidini, küre olarak kabul eden iç çarpım,

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = a_1u_1v_1 + a_2u_2v_2 + a_3u_3v_3$$

şeklindedir. Bu uzay $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ ile gösterilir ve iç çarpım sabiti ise $\Delta = \sqrt{a_1a_2a_3}$ 'tür. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ eliptik iç çarpım uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerinin eliptik vektörel çarpımı,

$$\mathcal{V} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \to \mathcal{V}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} = \Delta \begin{vmatrix} \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_1,\overrightarrow{\mathbf{e}}_1)} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_2,\overrightarrow{\mathbf{e}}_2)} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_3}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{e}}_3,\overrightarrow{\mathbf{e}}_3)} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1}{a_1} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2}{a_2} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_3}{a_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

olarak tanımlanır. $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 1$ elipsoidi bu uzay için birim küredir. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayındaki herhangi bir vektörün son noktası elipsoid üzerine düşer.

Örnek 3.40. *$\mathbb{R}^3_{2,2,1}$ ve $\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{9}}$ eliptik iç çarpım uzayları verilsin. Bu iki uzayın iç çarpım sabitleri sırasıyla; $\Delta_1 = 2$ ve $\Delta_2 = \frac{\sqrt{3}}{18}$ olmak üzere $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (7,5,2)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1,3,5)$ vektörlerinin eliptik vektörel çarpımları, (3.6) formülünden sırasıyla*

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}_1} \overrightarrow{\mathbf{v}} = 2 \begin{vmatrix} \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1}{2} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2}{2} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_3}{1} \\ 7 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (19,-33,32)$$

ve

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}_2} \overrightarrow{\mathbf{v}} = \frac{\sqrt{3}}{18} \begin{vmatrix} \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1}{\frac{1}{2}} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_2}{\frac{1}{6}} & \frac{\overrightarrow{\mathbf{e}}_3}{\frac{1}{9}} \\ 7 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{9}(19,-99,72)$$

olarak bulunur.

Tanım 3.41. *$\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında verilen bir $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$ vektörünün normu,*

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}} = \sqrt{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{u}})} = \sqrt{a_1u_1^2 + a_2u_2^2 + \cdots + a_nu_n^2}$$

*eşitliğiyle tanımlanır ve $\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}$ sayısına $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ **vektörünün eliptik iç çarpım uzayındaki uzunluğu** veya kısaca **eliptik normu** denir (Özdemir 2016).*

Örnek 3.42. *$\mathbb{R}^3_{2,2,1}$ eliptik iç çarpım uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (7,5,2)$ vektörünün eliptik normu $\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}_1} = 2\sqrt{38}$ olarak bulunur.*

Teorem 3.43. *$\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleri arasındaki $\theta_{\mathcal{B}}$ **eliptik açısı**,*

$$\cos\theta_{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{v}})}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}\left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}} \tag{3.7}$$

eşitliğiyle belirlidir. Burada $\theta_{\mathcal{B}}$, $\varepsilon : a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 1$ elipsoidin açısal parametrik denklemlerinin parametreleriyle uyumludur (Özdemir 2016).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında esas amaç eliptik iç, vektörel ve karma çarpımın geometrik uygulamalarını araştırmak, eliptik iç çarpım uzayında doğru ve düzlemi analitik olarak incelemek ve eliptik dönmenin oluşturulup, eliptik iç çarpım ile eliptik vektörel çarpım kullanılarak elipsoit üzerindeki bir noktanın hareketini yorumlamaktır. Bu bölümdeki bazı teoremlerin ispatları, Öklid uzayındaki ile benzer olduğundan verilmemiştir.

4.1. Eliptik İç Çarpımın Geometrik Uygulamaları

$\mathbb{R}^n$ öklid uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ ile oluşturulan paralelkenarın alanı

$$Alan(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}},\overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle^2}$$

eşitliği ile bulunur. $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleriyle oluşturulan üçgenin alanını bulmak için bu değer "2" ile bölünür (Özdemir 2021).

Teorem 4.44. *$\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleri arasındaki açı $\theta_{\mathcal{B}}$ olmak üzere, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ ile oluşturulan paralelkenarın alanı*

$$Alan(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{v}})_{\mathcal{B}} = \sqrt{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{u}})\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}},\overrightarrow{\mathbf{v}}) - \mathcal{B}^2(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{v}})} \tag{4.1}$$

eşitliği ile bulunur. $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleriyle oluşturulan üçgenin alanını bulmak için bu değer "2" ile bölünür.

Teorem 4.45. *$\mathbb{R}^2_{a_1,a_2}$ eliptik iç çarpım uzayında köşelerinin koordinatları $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ve $C(x_3,y_3)$ olan üçgenin alanı, Δ iç çarpım sabiti olmak üzere*

$$Alan(ABC)_{\mathcal{B}} = \Delta\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

değerinin mutlak değeridir.

İspat $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\mathbf{v}} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ ve $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{\mathbf{u}} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$ ile gösterilsin. Teorem (4.44) 'den

$$\begin{aligned} Alan(ABC)_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{u}})\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}},\overrightarrow{\mathbf{v}}) - \mathcal{B}^2(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{v}})} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a_1a_2\left(x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2\right)^2} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} Alan(ABC)_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{2}\sqrt{a_1 a_2}\,(x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2) \\ &= \Delta\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.46. *Öklid düzleminde köşelerinin koordinatları bilinen üçgenin alanı*

$$Alan(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

eşitliği ile belirlidir. Eliptik düzlemde, köşelerinin koordinatları bilinen üçgenin alanı ise

$$Alan(ABC)_{\mathcal{B}} = \Delta\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

formülü ile bulunduğundan,

$$Alan(ABC)_{\mathcal{B}} = \Delta.Alan(ABC)$$

eşitliği elde edilir. Yani eliptik düzlemde köşelerinin koordinatları bilinen üçgenin alanı, bu üçgenin Öklid düzlemindeki alanı ile Δ sabitinin çarpımına eşittir.

Örnek 4.47. $\mathbb{R}^2_{4,1}$ *eliptik iç çarpım uzayında, köşelerinin koordinatları* $A(1,2)$, $B(3,1)$ *ve* $C(2,4)$ *olan üçgenin alanı, (4.2) formülünden*

$$Alan(ABC)_{\mathcal{B}} = \frac{2}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

olarak bulunur.

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ sıfırdan farklı iki vektör olsun. $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörü üzerindeki **dik izdüşüm vektörü**

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_{izd} = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle}\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

eşitliğiyle bulunur ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}_{izd}$ ile gösterilir (Özdemir 2021).

Teorem 4.48. *$\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ sıfırdan farklı iki vektör olsun. $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörü üzerindeki* ***eliptik dik izdüşüm vektörü***

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathcal{B}izd} = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})}\overrightarrow{\mathbf{v}} \tag{4.3}$$

eşitliğiyle bulunur ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathcal{B}izd}$ ile gösterilir.

Örnek 4.49. *$\mathbb{R}^3_{2,2,1}$ eliptik iç çarpım uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (7,5,2)$ vektörünün $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1,3,5)$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü, (4.3) formülünden, $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 54$ ve $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 45$ olduğundan*

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathcal{B}_1 izd} = \left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}, 6\right)$$

olarak bulunur.

4.2. Eliptik Vektörel Çarpımın Geometrik Uygulamaları

$\mathbb{R}^3$ öklid iç çarpım uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1,u_2,u_3), \overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1,v_2,v_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (w_1,w_2,w_3)$ vektörleri için

$$(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}) \times \overrightarrow{\mathbf{w}} = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{v}} - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{u}}$$

eşitliği sağlanır (Özdemir 2021).

Teorem 4.50. *$\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ eliptik iç çarpım uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1,u_2,u_3), \overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1,v_2,v_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (w_1,w_2,w_3)$ vektörleri için*

$$(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}) \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{w}} = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{w}})\overrightarrow{\mathbf{v}} - \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})\overrightarrow{\mathbf{u}} \tag{4.4}$$

eşitliği sağlanır.

$\mathbb{R}^3$ öklid uzayında , $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörel çarpımıyla, $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörünün öklid iç çarpımına, $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörlerinin öklid karma çarpımı denir. Yani, $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle$ değerine $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörlerinin öklid karma çarpımı denir (Özdemir 2021).

Tanım 4.51. *$\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ eliptik iç çarpım uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörel çarpımıyla, $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörünün eliptik iç çarpımına, $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörlerinin* ***eliptik karma çarpımı*** *denir. Yani, $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$ değerine $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörlerinin eliptik karma çarpımı denir.*

Öklid uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörleri için

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle = \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$$

eşitliği sağlanır. Yani Öklid uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörlerinin karma çarpımı $\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$ şeklinde tanımlanır (Özdemir 2021).

Teorem 4.52. *$\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ eliptik iç çarpım uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$ vektörleri için*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \Delta \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \tag{4.5}$$

eşitliği sağlanır.

İspat $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3), \overrightarrow{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) &= \mathcal{B}\left((\tfrac{\Delta}{a_1}(u_2v_3 - u_3v_2), \tfrac{\Delta}{a_2}(u_3v_1 - u_1v_3), \tfrac{\Delta}{a_3}(u_1v_2 - u_2v_1)), (w_1, w_2, w_3) \right) \\
&= \Delta(u_2v_3w_1 - u_3v_2w_1) - \Delta(u_1v_3w_2 - u_3v_1w_2) + \Delta(u_1v_2w_3 - u_2v_1w_3) \\
&= \Delta(u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 + u_1v_2w_3 - u_3v_2w_1 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3) \\
&= \Delta \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})
\end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \Delta \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$$

elde edilir. □

Sonuç 4.53. *Öklid uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörlerinin öklid karma çarpımı,*

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle = \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$$

eşitliği ile belirlidir. Eliptik uzayda, $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörlerinin eliptik karma çarpımı ise

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \Delta \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$$

formülü ile bulunduğundan,

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \Delta \left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle$$

eşitliği elde edilir. Yani eliptik uzaydaki herhangi üç vektörün eliptik karma çarpımı, bu üç vektörün Öklid karma çarpımı ile Δ sabitinin çarpımına eşittir.

Örnek 4.54. $\mathbb{R}^3_{2,2,1}$ *eliptik iç çarpım uzayında* $\Delta = 2$, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,0,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (2,-3,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (0,7,10) \in \mathbb{R}^3_{2,2,1}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{2,2,1} \overrightarrow{\mathbf{v}} = (9,6,-6)$ *olmak üzere*

$$\mathcal{B}_1(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}_1} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \mathcal{B}_1((9,6,-6),(0,7,10)) = 24$$

olarak bulunur. Diğer yandan

$$\Delta \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 24$$

olup

$$\mathcal{B}_1(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}_1} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \Delta . \left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörleri için

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \times \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle$$

eşitliği sağlanır (Özdemir 2021).

Teorem 4.55. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *eliptik uzayında* $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ *vektörleri için*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{w}}) \tag{4.6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat (4.5) denklemi, determinant ve eliptik iç çarpımın özelliklerini kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) &= \Delta \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \\ &= -\Delta \det(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \\ &= \Delta \det(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) \\ &= \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{w}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) \\ &= \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{w}}) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek 4.56. $\mathbb{R}^3_{2,2,1}$ *eliptik iç çarpım uzayında* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,0,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (2,-3,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (0,7,10) \in \mathbb{R}^3_{2,2,1}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}_1} \overrightarrow{\mathbf{v}} = (9,6,-6)$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} \times_{\mathcal{B}_1} \overrightarrow{\mathbf{w}} = (-30,-20,28)$ *olmak üzere olmak üzere*

$$\mathcal{B}_1(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}_1} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \mathcal{B}_1((9,6,-6),(0,7,10)) = 24$$

ve

$$\mathcal{B}_1(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \times_{\mathcal{B}_1} \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \mathcal{B}_1((1,0,3),(-30,-20,28)) = 24$$

olduğundan

$$\mathcal{B}_1(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}_1} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \mathcal{B}_1(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \times_{\mathcal{B}_1} \overrightarrow{\mathbf{w}})$$

eşitliğinin sağlandığı görülmüş olur.

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında,

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle = \begin{vmatrix} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \\ \left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \end{vmatrix}$$

eşitliği sağlanır. Bu ifadeye **Öklid Lagrange Özdeşliği** denir (Özdemir 2021).

Teorem 4.57. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *uzayında,*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \begin{vmatrix} \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \end{vmatrix} \tag{4.7}$$

eşitliği sağlanır. Bu ifadeye ***Eliptik Lagrange Özdeşliği*** *denir.*

İspat (4.6)denklemi kullanılırsa

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \mathcal{B}((\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}) \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$$

yazılabilir. Ayrıca (4.4) denklemi ve iç çarpımın özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{w}}) &= \mathcal{B}((\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}) \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \\ &= \mathcal{B}(\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})\overrightarrow{\mathbf{v}} - \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \\ &= \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) - \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.58. *$\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ eliptik iç çarpım uzayındaki $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleri arasındaki açı $\theta_{\mathcal{B}}$ olmak üzere, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı $Alan_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$ olmak üzere*

$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|_{\mathcal{B}} = \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|_{\mathcal{B}} \left\| \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|_{\mathcal{B}} \sin\theta_{\mathcal{B}} = Alan_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$$

eşitliği sağlanır.

İspat $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}})$ şeklinde yazılırsa, (4.7) denkleminden

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}} &= \begin{vmatrix} \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \end{vmatrix} \\ &= \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) - \mathcal{B}^2(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. Ayrıca (3.7) denklemi ve eliptik iç çarpımın özellikleri göz önüne alınırsa, (4.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &= \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|^2_{\mathcal{B}} \left\| \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}} - \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|^2_{\mathcal{B}} \left\| \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}} \cos^2\theta_{\mathcal{B}} \\ &= \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|^2_{\mathcal{B}} \left\| \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}} (1 - \cos^2\theta_{\mathcal{B}}) \\ &= \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|^2_{\mathcal{B}} \left\| \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}} \sin^2\theta_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

elde edilir.Diğer yandan, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı:

$$Alan_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|^2_{\mathcal{B}} \left\| \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}} \sin\theta_{\mathcal{B}}$$

olduğundan,

$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|_{\mathcal{B}} = \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|_{\mathcal{B}} \left\| \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|_{\mathcal{B}} \sin\theta_{\mathcal{B}} = Alan_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$$

bulunur. Sonuç olarak, $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ eliptik iç çarpım uzayında verilen iki vektörün eliptik vektörel çarpımının normu, bu iki vektörle oluşturulan paralelkenarın alanını verir. □

4.3. Eliptik Karma Çarpımın Geometrik Uygulamaları

Öklid iç çarpım uzayında köşeleri A, B, C, D olan, $ABCD$ üçgensel piramidinin hacmi,

$$Hacim(ABCD) = \frac{1}{6} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$$

değerinin mutlak değeridir (Özdemir 2021).

Teorem 4.59. *Eliptik uzayda köşeleri A, B, C, D olan, $ABCD$ üçgensel piramidinin hacmi,*

$$Hacim(ABCD) = \frac{\Delta}{6}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \tag{4.9}$$

değerinin mutlak değeridir.

İspat Üçgensel piramidin hacmi,

$$Hacim(ABCD) = \frac{1}{3}(\text{Taban Alanı}).(\text{Yükseklik})$$

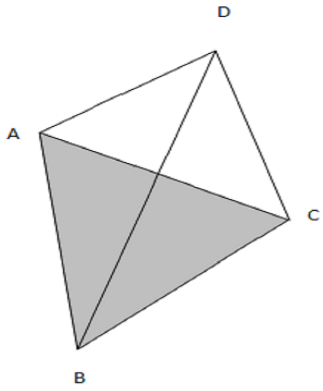
eşitliği ile bulunur. Teorem (4.58) gereği, üçgensel piramidin taban alanı

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{AC}\|_{\mathcal{B}}$$

eşitliği ile bulunur (Şekil 4.1). Diğer yandan, $\theta_{\mathcal{B}}$ açısı, $\overrightarrow{AD}$ vektörüyle $\overrightarrow{AB} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{AC}$ arasındaki açı olmak üzere, yükseklik $\|\overrightarrow{AD}\|_{\mathcal{B}} \cos\theta_{\mathcal{B}}$ olduğundan, istenen hacim,

$$\begin{aligned} Hacim(ABCD) &= \frac{1}{3}\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{AC}\|_{\mathcal{B}}\|\overrightarrow{AD}\|_{\mathcal{B}} \cos\theta_{\mathcal{B}} \\ &= \frac{\Delta}{6}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. □



Şekil 4.1. $ABCD$ üçgensel piramidi

Örnek 4.60. $\mathbb{R}^3_{2,2,1}$ *eliptik iç çarpım uzayında küşelerinin koordinatları* $A(1,2,0)$, $B(0,1,5)$, $C(1,0,5)$ *ve* $D(1,2,2)$ *olan,* $ABCD$ *üçgensel piramidinin hacmi, (4.9) formülünden,* $\Delta = 2$, $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,5)$, $\overrightarrow{AC} = (0,-2,5)$ *ve* $\overrightarrow{AD} = (0,0,2)$ *olduğundan*

$$Hacim(ABCD) = \frac{\Delta}{6}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{4}{3}$$

olarak bulunur.

4.4. Eliptik İç Çarpım Uzaylarında Doğrunun Analitik Olarak İncelenmesi

Bu kısımda $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında doğruların analitik olarak incelenmesi verilmiştir. Paralellik değişmediği için, paralleliğe bağlı ve iç çarpıma ya da vektörel çarpıma bağlı olmayan tüm bağıntılar Öklid uzayındakinin aynısıdır. Bu nedenle sadece farklı sonuç veren durumlar verilecektir. Benzer olan sonuçlar aşağıda kısaca özetlenmiştir.

1. $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ doğru üzerindeki değişken nokta, $\mathbf{P}(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ doğrunun bilinen bir noktası ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ doğrultman vektörü olmak üzere bir noktası ve doğrultmanı bilinen doğrunun denklemi $\overrightarrow{\mathbf{PX}}=\lambda\overrightarrow{\mathbf{u}}$ eşitliğinden

$$\frac{x_1-p_1}{u_1}=\frac{x_2-p_2}{u_2}=\cdots=\frac{x_n-p_n}{u_n}$$

olarak elde edilir.

2. $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ doğru üzerindeki değişken nokta olmak üzere $\mathbf{P}(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ ve $\mathbf{Q}(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ noktalarından geçen doğru denklemi $\overrightarrow{\mathbf{PX}}=\lambda\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ eşitliğinden

$$\frac{x_1-p_1}{q_1-p_1}=\frac{x_2-p_2}{q_2-p_2}=\cdots=\frac{x_n-p_n}{q_n-p_n}$$

olarak elde edilir.

3. $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1,\overrightarrow{\mathbf{u}}_2\in\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ vektörlerine dik olan doğrunun denklemi $\overrightarrow{\mathbf{PX}}=\lambda.\overrightarrow{\mathbf{u}}_1\times_{\mathcal{B}}\overrightarrow{\mathbf{u}}_2$ eşitliği ile elde edilir.

4. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ eliptik iç çarpım uzayında doğrultman vektörü, doğrunun doğrultusunu belirttiğinden, iki doğrunun birbirine göre durumları doğrultman vektörler yardımıyla incelenebilir. Buna göre, $(d_1):\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}=\frac{z-z_1}{u_2}$ ve $(d_2):\frac{x-x_2}{v_1}=\frac{y-y_2}{v_2}=\frac{z-z_2}{v_3}$ doğruları verilsin. Bu doğruların doğrultman vektörleri sırasıyla $\overrightarrow{\mathbf{u}}=(u_1,u_2,u_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}=(v_1,v_2,v_3)$ dir. $d_1\|d_2$ ise $\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$ eşitliği sağlanır. $d_1\perp_{\mathcal{B}}d_2$ ise

$$a_1u_1v_1+a_2u_2v_2+a_3u_3v_3=0$$

eşitliği sağlanır. d_1 ve d_2 doğruları çakışık ise doğrultmanları paraleldir ve ortak noktaları vardır. d_1 ve d_2 doğruları paralel değilse kesişirler. $\mathbf{P}$ 'den geçen

d_1 ve $\mathbf{Q}$ 'dan geçen d_2 doğruları kesişiyorsa doğrultmanları paralel değildir ayrıca $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ vektörleri aynı düzlemde yer alacağından $\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{PQ}}) = 0$ eşitliği sağlanır. d_1 ve d_2 doğruları, aykırı doğrular ise kesişmezler. $\mathbf{P}$ den geçen d_1 ve $\mathbf{Q}$ dan geçen d_2 doğruları, aykırı doğrular ise $\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{PQ}}) \neq 0$ eşitliği sağlanır.

4.4.1. Bir noktanın bir doğruya uzaklığı

Öklid uzayında bir noktanın bir doğruya uzaklığı formülü

$$\ell = \frac{\sqrt{\|\overrightarrow{\mathbf{AP}}\|^2 \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|^2 - \langle \overrightarrow{\mathbf{AP}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|}$$

ile bulunur. $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ uzayında da sadece skaler çarpım ve norm değiştirilmesi koşuluyla bu formül geçerli olacaktır. Bu iki uzaklık arasında iç çarpım sabitine bağlı bir bağıntı bulunup bulunmadığı incelenebilir.

Teorem 4.61. *$\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında bir $\mathbf{A}$ noktasının, $\mathbf{P}$ noktasından geçen ve doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olan doğruya uzaklığı*

$$\ell = \frac{Alan_{\mathcal{B}}}{Taban_{\mathcal{B}}} = \frac{\sqrt{\|\overrightarrow{\mathbf{AP}}\|^2_{\mathcal{B}} \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|^2_{\mathcal{B}} - \mathcal{B}^2(\overrightarrow{\mathbf{AP}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}}$$

formülü ile bulunur.

Örnek 4.62. *$\mathbb{R}^3_{2,2,1}$ eliptik iç çarpım uzayında, $\mathbf{A}(1,1,2)$ noktasının $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3}$, $z = 3$ doğrusuna olan uzaklığı; $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (2,3,0)$ doğrunun doğrultman vektörü, $\mathbf{P}(1,0,1)$ doğru üzerinde bir nokta ve $\overrightarrow{\mathbf{AP}} = (0,-1,-1)$ olmak üzere*

$$l = \frac{\sqrt{\|\overrightarrow{\mathbf{AP}}\|^2_{\mathcal{B}} \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|^2_{\mathcal{B}_1} - \mathcal{B}_1^2(\overrightarrow{\mathbf{AP}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}_1}} = \frac{\sqrt{(3)(26) - (-6)^2}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{1092}}{26}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.63. *$\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ eliptik iç çarpım uzayında bir $\mathbf{A}$ noktasının, $\mathbf{P}$ noktasından geçen ve doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olan doğruya uzaklığı*

$$\ell = \frac{\|\overrightarrow{\mathbf{AP}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{B}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}}$$

eşitliğiyle belirlidir.

İspat $\theta_{\mathcal{B}}$, $\overrightarrow{\mathbf{AP}}$ ile $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ doğrultman vektörü arasındaki açıyı göstermek üzere

$$\ell = \|\overrightarrow{\mathbf{AP}}\|_{\mathcal{B}} \sin\theta_{\mathcal{B}}$$

olacaktır.

$$\|\overrightarrow{\mathbf{AP}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{B}} = \|\overrightarrow{\mathbf{AP}}\|_{\mathcal{B}} \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}} \sin\theta_{\mathcal{B}}$$

eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\ell = \|\overrightarrow{\mathbf{AP}}\|_{\mathcal{B}} \frac{\|\overrightarrow{\mathbf{AP}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{B}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{AP}}\|_{\mathcal{B}} \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}} = \frac{\|\overrightarrow{\mathbf{AP}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{B}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}}$$

bulunur. □

Örnek 4.64. $\mathbb{R}^3_{2,2,1}$ *eliptik iç çarpım uzayında,* $\mathbf{A}(1,1,2)$ *noktasının* $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3}$, $z = 3$ *doğrusuna olan uzaklığı Örnek (4.62) de* $\frac{\sqrt{1092}}{26}$ *olarak bulunmuştu. Teorem (4.63) kullanılarak da* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (2,3,0)$ *doğrunun doğrultman vektörü,* $\mathbf{P}(1,0,1)$ *doğru üzerinde bir nokta,* $\overrightarrow{\mathbf{AP}} = (0,-1,-1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{AP}} \times_{\mathcal{B}_1} \overrightarrow{\mathbf{u}} = (3,-2,4)$ *olmak üzere,* $\mathbf{A}$ *noktasının verilen doğruya uzaklığı*

$$l = \frac{\|(3,-2,4)\|_{\mathcal{B}_1}}{\|(2,3,0)\|_{\mathcal{B}_2}} = \frac{\sqrt{1092}}{26}$$

olarak bulunabilir.

4.4.2. Eliptik iç çarpım uzayında aykırı iki doğru arasındaki uzaklık

Aykırı iki doğru arasındaki uzaklık denilince, bu iki doğrunun arasındaki en kısa uzaklık anlaşılır.

Teorem 4.65. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *eliptik iç çarpım uzayında,* $\mathbf{P}$ *noktasından geçen ve doğrultusu* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *olan doğru ile,* $\mathbf{Q}$ *noktasından geçen ve doğrultusu* $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ *olan doğru arasındaki en kısa uzaklık*

$$l = \frac{\left|\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{PQ}})\right|}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}}$$

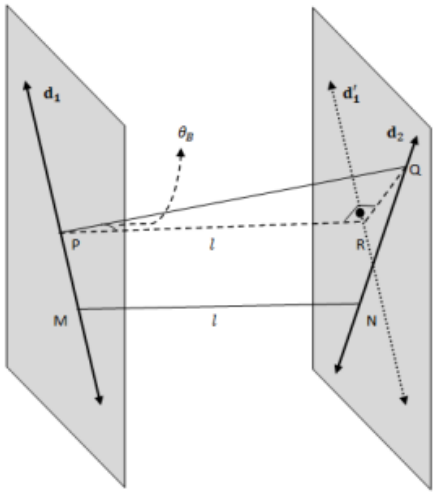
ile bulunur.

İspat Doğrular üzerinde $\mathbf{M}$ ve $\mathbf{N}$ gibi öyle iki koordinat bulunabilir ki, $[\mathbf{MN}]$ doğru parçası her iki doğruyada diktir. $[\mathbf{MN}]$ doğru parçasının uzunluğu, bize en kısa uzaklığı verir. $\mathbf{MN}$ doğrultusundaki vektör, $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörüdür. Çünkü, hem $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, hem de $\overrightarrow{\mathbf{v}}$

vektörüne dik olduğundan, $\mathbf{MN}$ 'nin doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}$ olacaktır. Aykırı iki doğruyu bakış açısını değiştirerek, Şekil 4.2 'deki gibi görmek daima mümkündür. Şekil 4.2'ye göre, $|\mathbf{MN}| = l$ denilirse, $l = \|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}\|_{\mathcal{B}} \cos\theta_{\mathcal{B}}$ yazılabilir. Buradan, $\mathbf{MN}$ doğrultusundaki vektörün $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}$ olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} l &= \|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}\|_{\mathcal{B}} \left|\cos\theta_{\mathcal{B}}\right| \\ &= \|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}\|_{\mathcal{B}} \frac{\left|\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{PQ}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}})\right|}{\|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}\|_{\mathcal{B}} \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}} \\ &= \frac{\left|\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{PQ}})\right|}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}} \end{aligned}$$

bulunur. □



Şekil 4.2. Aykırı d_1 ve d_2 doğruları arasındaki uzaklık

Örnek 4.66. $\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{9}}$ *eliptik iç çarpım uzayında,* $\frac{2x-1}{4} = \frac{1-y}{2} = z+1$ *ve* $\frac{2x-1}{2} = \frac{z-2}{3}$, $y = 3$ *doğruları arasındaki en kısa uzaklık Teorem (4.65) yardımıyla bulunabilir.* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (2,-2,1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1,0,3)$ *doğruların doğrultman vektörleri ve* $\mathbf{P}(1/2,1,-1)$ *ile* $\mathbf{Q}(1/2,3,2)$ *doğrular üzerinden sırasıyla alınan noktalar ise* $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = (0,2,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}_2} \overrightarrow{\mathbf{v}} = -\frac{\sqrt{3}}{9}(6,15,-9)$ *ve* $\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{PQ}}) = -4$ *olmak üzere, verilen doğrular arasındaki uzaklık*

$$l = \frac{\left|\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{PQ}})\right|}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}_2} \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}_2}} = \frac{72}{43}$$

olur.

4.4.3. Eliptik iç çarpım uzayında dikme ayaklarının bulunması

Teorem 4.67. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *eliptik iç çarpım uzayında,* $\mathbf{P}$ *noktasından geçen, doğrultusu* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *olan ve* $\mathbf{Q}$ *noktasından geçen, doğrultusu* $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ *olan doğruların birbirlerine en yakın oldukları noktaların koordinatları,*

$$k_1 = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}})}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}}} \text{ ve } k_2 = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}})}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}}}$$

olmak üzere, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{M}} &= \overrightarrow{\mathbf{P}} - k_1 \overrightarrow{\mathbf{u}} \\ \overrightarrow{\mathbf{N}} &= \overrightarrow{\mathbf{Q}} + k_2 \overrightarrow{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

ile bulunur.

İspat Dikme ayaklarının, yani aykırı iki doğrunun birbirine en yakın olan noktalarının koordinatları vektörel hesaplamalarla elde edilebilir. Önce, $\overrightarrow{\mathbf{MN}}$ vektörü $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ türünden yazılabilir. Şekil 4.3'ten takip edilirse $\overrightarrow{\mathbf{MN}} = \overrightarrow{\mathbf{MP}} + \overrightarrow{\mathbf{PQ}} + \overrightarrow{\mathbf{QN}}$ yazılabilir.

$$\overrightarrow{\mathbf{MP}} = k_1 \overrightarrow{\mathbf{u}} \text{ ve } \overrightarrow{\mathbf{QN}} = k_2 \overrightarrow{\mathbf{v}}, \; k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

olsun. Bu durumda,

$$\overrightarrow{\mathbf{MN}} = -k_1 \overrightarrow{\mathbf{u}} - k_2 \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{PQ}}$$

olacaktır. Şimdi, $\overrightarrow{\mathbf{MN}}$ vektörünü, sırasıyla $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleriyle çarpıp, $\overrightarrow{\mathbf{MN}} \perp_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{MN}} \perp_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}$ olduğunu kullanılırsa, $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) = a$, $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) = b$ ve $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = c$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} k_1 a + k_2 b &= -\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{PQ}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}) \\ k_2 b + k_2 c &= -\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{PQ}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \end{aligned}$$

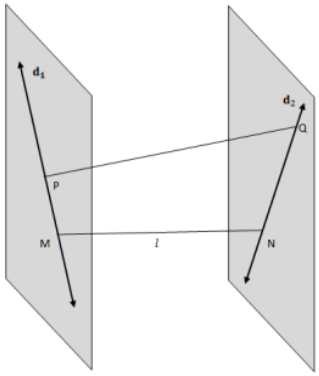
denklem sistemi elde edilir. Buradan, $ac - b^2 = \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}}$ eşitliği ve Eliptik Lagrange Özdeşliği göz önüne alınırsa,

$$k_1 = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}})}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}}} \text{ ve } k_2 = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}})}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}}}$$

bulunur. Böylece,

$$\overrightarrow{\mathbf{MP}} = k_1 \overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{M}} = \overrightarrow{\mathbf{P}} - k_1 \overrightarrow{\mathbf{u}} \text{ ve } \overrightarrow{\mathbf{QN}} = k_2 \overrightarrow{\mathbf{v}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{N}} = \overrightarrow{\mathbf{Q}} + k_2 \overrightarrow{\mathbf{v}}$$

eşitliklerinden, $\mathbf{M}$ ve $\mathbf{N}$ noktalarının koordinatları elde edilir. □



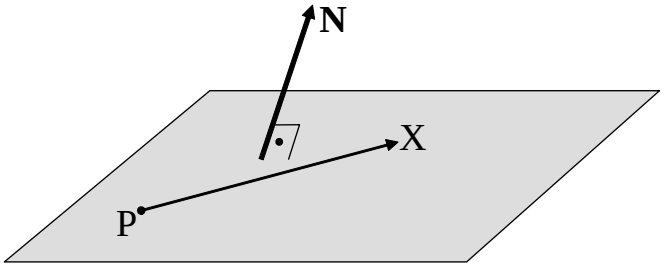
Şekil 4.3 Aykırı d_1 ve d_2 doğrularının birbirine en yakın olan noktalarının koordinatları

4.5. Eliptik İç Çarpım Uzaylarında Düzlemin Analitik Olarak İncelenmesi

Bir doğru ile bu doğrunun dışındaki bir noktayı içinde bulunduran bir tek düzlem vardır. Düzlem içindeki bir doğruya dik olan bir vektör, düzlem içindeki tüm doğrulara diktir. $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında, düzlem denklemi, eliptik iç çarpım kullanılarak ifade edilebilir. Düzleme eliptik olarak dik olan bir vektör, düzlem üzerindeki tüm vektörlere eliptik olarak dik olacağından, eliptik iç çarpımları sıfır olacaktır. O halde düzlem denklemini belirlemede en önemli vektör, düzleme dik olan vektördür. Bu vektöre **düzlemin normali** denir ve $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ harfi ile gösterilir.

4.5.1. Bir noktası ve normali bilinen düzlemin denklemi

$\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ düzlemin değişken noktası olsun. Bir $\mathbf{P}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ noktasından geçen ve $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (n_1, n_2, \ldots, n_n)$ vektörüne dik olan hiperdüzlemin denklemi, $\overrightarrow{\mathbf{PX}}$ vektörü $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ vektörüne daima dik olacağından $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{PX}}, \overrightarrow{\mathbf{N}}) = 0$ eşitliği yardımıyla elde edilir (Şekil 4.4).



Şekil 4.4. P noktasından geçen ve $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ vektörüne dik olan düzlem

O halde, $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında bir hiperdüzlem denklemi

$$\mathcal{B}((x_1-p_1,x_2-p_2,\ldots,x_n-p_n),(n_1,n_2,\ldots,n_n))=0$$

eşitliğinden

$$a_1n_1(x_1-p_1)+a_2n_2(x_2-p_2)+\cdots+a_nn_n(x_n-p_n)=0 \tag{4.10}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.68. *(4.10) eşitliği düzenlenirse düzlem denklemi,*

$$a_1n_1x_1+a_2n_2x_2+\cdots+a_nn_nx_n+D=0 \tag{4.11}$$

formunda yazılabilir. $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında bir düzlem denkleminin normalinin bulunması için düzlemin değişkenlerinin katsayılarının, eliptik iç çarpımın katsayılarına bölünmesi gerekmektedir. Yani $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ eliptik iç çarpım uzayında (4.10) veya (4.11) şeklinde verilen bir düzlem denkleminin normal vektörü,

$$\overrightarrow{\mathbf{N}}=(\frac{a_1n_1}{a_1},\frac{a_2n_2}{a_2},\ldots,\frac{a_nn_n}{a_n})=(n_1,n_2,\ldots,n_n)$$

şeklinde bulunur. Örneğin, $\mathbb{R}^3_{1,2,2}$ uzayında,

$$3x+4y+2z=5$$

düzleminin normali,

$$\overrightarrow{\mathbf{N}}=(3,2,1)$$

vektörüdür. Öklid uzayındaki normal ise $\overrightarrow{\mathbf{N}}=(3,4,2)$'dir. Düzlemin normali eliptik uzayda farklı olduğundan, eliptik uzayda düzlemle ilgili bağıntılarda farklılıklar ortaya çıkar.

Teorem 4.69. *$\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ eliptik iç çarpım uzayında $\mathbf{P},\mathbf{R}$ ve $\mathbf{Q}$ noktalarından geçen düzlem denklemi, $\mathbf{X}(x,y,z)$ düzlem üzerindeki değişken nokta ve $\overrightarrow{\mathbf{N}}=\overrightarrow{\mathbf{PR}}\times_{\mathcal{B}}\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ olmak üzere, $\left\langle\overrightarrow{\mathbf{PX}},\overrightarrow{\mathbf{N}}\right\rangle_{\mathcal{B}}=0$ eşitliği yardımıyla elde edilir.*

Teorem 4.70. *$\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ eliptik iç çarpım uzayındaki bir düzlem, iki doğruya paralel ise bu doğruların doğrultman vektörlerine de paraleldir. Bu durumda, düzlemin normal vektörü,*

doğruların doğrultman vektörlerine dik olacaktır. Doğruların doğrultmanları $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{u}}_2$*, düzlem üzerinde verilen nokta* $\mathbf{P}(x_0, y_0, z_0)$ *ve değişken nokta* $\mathbf{X}(x, y, z)$ *olmak üzere,*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{\mathbf{PX}}) = \Delta \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{\mathbf{PX}}) = 0$$

eşitliği düzlem denklemini verir. $\Delta \neq 0$ *olduğundan istenen düzlem denklemini*

$$\det(\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{\mathbf{PX}}) = 0$$

eşitliği ile de bulmak mümkündür.

4.5.2. Eliptik iç çarpım uzayında iki düzlemin birbirine göre durumları

$\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ eliptik iç çarpım uzayında iki düzlemin birbirine göre durumları normal vektörleri yardımıyla incelenebilir.

$$\omega_1 : A_1x + A_2y + A_3z + D_1 = 0 \text{ ve } \omega_2 : B_1x + B_2y + B_3z + D_2 = 0$$

düzlemlerinin normalleri sırasıyla

$$\overrightarrow{\mathbf{N}}_1 = (\frac{A_1}{a_1}, \frac{A_2}{a_2}, \frac{A_3}{a_3}) \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{\mathbf{N}}_2 = (\frac{B_1}{a_1}, \frac{B_2}{a_2}, \frac{B_3}{a_3})$$

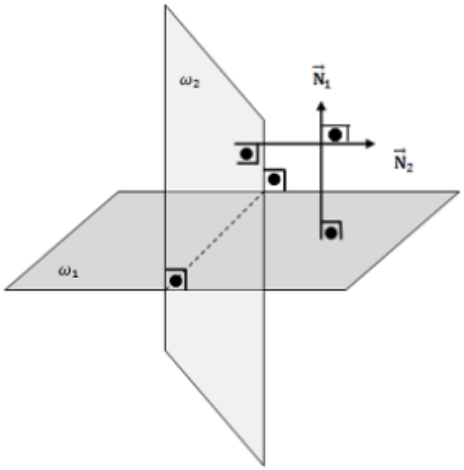
ile belirlidir. İki düzlem birbirini kesiyorsa bir doğru boyunca keser. İki düzlem birbirini 90° lik bir açıyla kesiyorsa diktirler. İki düzlem birbirlerini kesmiyorlar ise paraleldirler.

İki düzlemin paralel olması durumu ω_1 ve ω_2 düzlemlerinin normalleri sırasıyla $\overrightarrow{\mathbf{N}}_1$ ve $\overrightarrow{\mathbf{N}}_2$ olmak üzere, ω_1 ve ω_2 düzlemleri paralel ise $\overrightarrow{\mathbf{N}}_1 \parallel \overrightarrow{\mathbf{N}}_2$ olmalıdır. Bu ise, $\overrightarrow{\mathbf{N}}_1 = \lambda\overrightarrow{\mathbf{N}}_2$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısının varlığı anlamına gelir. Yani; ω_1 ve ω_2 düzlemleri paralel ise,

$$\lambda = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir.

İki düzlemin dik olması $\omega_1 : A_1x + A_2y + A_3z + D_1 = 0$ ve $\omega_2 : B_1x + B_2y + B_3z + D_2 = 0$ düzlemlerinin normalleri sırasıyla $\overrightarrow{\mathbf{N}}_1$ ve $\overrightarrow{\mathbf{N}}_2$ olmak üzere, ω_1 ve ω_2 düzlemlerinin dik kesişmesi için $\overrightarrow{\mathbf{N}}_1 \perp_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{N}}_2$ olmalıdır (Şekil 4.5).



Şekil 4.5. Birbirine dik olan ω_1 ve ω_2 düzlemleri

Buna göre $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}_1, \overrightarrow{\mathbf{N}}_2) = 0$ olmalıdır. Yani; ω_1 ve ω_2 düzlemleri dik ise

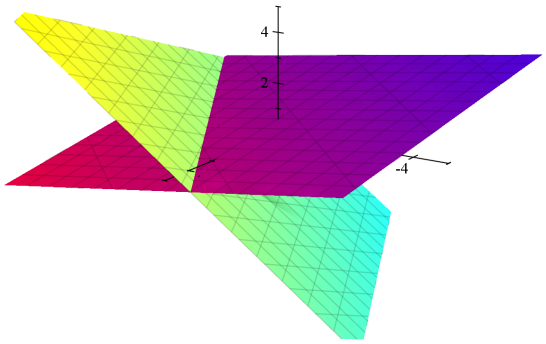
$$\frac{A_1 B_1}{a_1} + \frac{A_2 B}{a_2} + \frac{A_3 B_3}{a_3} = 0$$

eşitliğinin sağlanması gerekir.

Örnek 4.71. $\mathbb{R}^3_{1,2,4}$ *iç çarpım uzayında,* $x + y + 5z = 3$ *ve* $2x + y + kz = 4$ *düzlemlerinin dik olması için,*

$$\frac{1 \cdot 2}{1} + \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{5 \cdot k}{4} = 0$$

eşitliğinden $k = -2$ *olması gerektiği bulunur.*



Şekil 4.6. $\mathbb{R}^3_{1,2,4}$ uzayında birbirine ortogonal iki düzlem

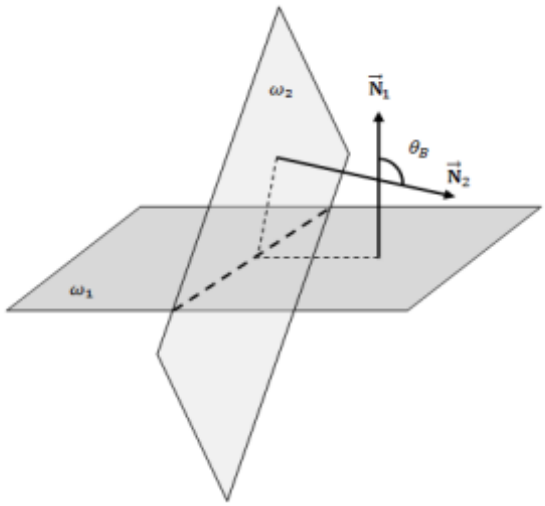
Teorem 4.72. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *eliptik iç çarpım uzayında*

$$\omega_1 : A_1 x + A_2 y + A_3 z + D_1 = 0 \text{ ve } \omega_2 : B_1 x + B_2 y + B_3 z + D_2 = 0$$

düzlemlerinin normalleri sırasıyla $\overrightarrow{\mathbf{N}}_1$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{N}}_2$ *olmak üzere,*

$$\cos\theta_{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}_1, \overrightarrow{\mathbf{N}}_2)}{\|\overrightarrow{\mathbf{N}}_1\|_{\mathcal{B}}\|\overrightarrow{\mathbf{N}}_2\|_{\mathcal{B}}}$$

değeri, ω_1 *ve* ω_2 *düzlemleri arasındaki açıyı verir. Bu değer pozitif ise, düzlemler arasındaki dar açının kosinüsü; negatif ise, düzlemler arasındaki geniş açının sinüsü bulunmuş olur (Şekil 4.7).*



Şekil 4.7. ω_1 ve ω_2 düzlemleri arasındaki açı

4.5.3. Eliptik iç çarpım uzayında bir doğru ile bir düzlemin birbirine göre durumları

Bir doğru ile düzlem için, üç durum söz konusudur.

i) Doğru düzleme paraleldir.

ii) Doğru düzlemin içindedir.

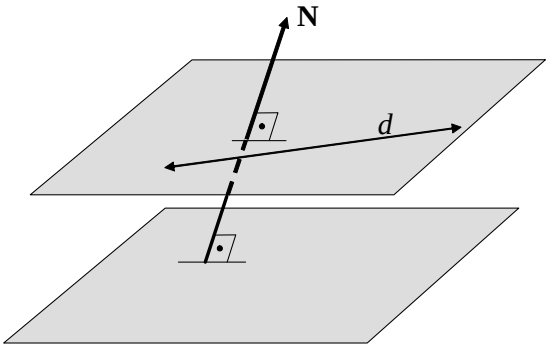
iii) Doğru düzlemi keser.

$\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında bir $d : \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ doğrusu ile, bir $\omega : Ax+By+Cz+D = 0$ düzlemi verilsin. Buna göre, doğrunun doğrultmanı $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (a, b, c)$ ve düzlemin normali $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (\frac{A}{a_1}, \frac{B}{a_2}, \frac{C}{a_3})$ olacaktır.

Bir doğrunun bir düzleme paralel olması Doğru düzleme paralel ise, doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali birbirine dik olur. O halde, doğru ile düzlem paralel ise, $\overrightarrow{\mathbf{u}} \perp_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{N}}$ olacağından

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{N}}) = 0 \Leftrightarrow a_1 a\frac{A}{a_1} + a_2 b\frac{B}{a_2} + a_3 c\frac{C}{a_2} = 0 \Leftrightarrow aA + bB + cC = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır (Şekil 4.8).



Şekil 4.8. ω düzlemine paralel olan d doğrusu

Bir doğrunun bir düzlem içinde olması Doğru düzlemin içinde ise, doğrunun tüm noktaları düzlem denklemini sağlamalıdır. Ayrıca, doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali birbirine dik olur. O halde, $\mathbf{P}(x_0, y_0, z_0)$, doğrunun bir noktası olmak üzere,

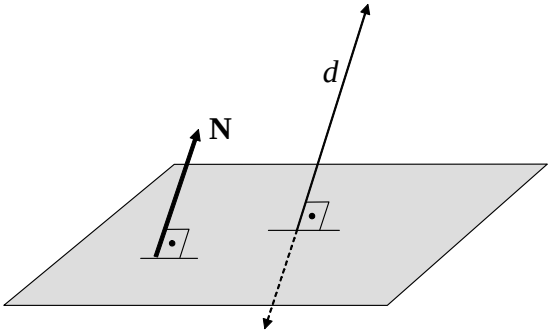
$$\text{i. } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$
$$\text{ii. } \overrightarrow{\mathbf{u}} \perp_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{N}} \Longleftrightarrow aA + bB + cC = 0$$

eşitlikleri sağlanmalıdır.

Bir doğrunun bir düzleme dik olması Doğru düzleme dik ise, doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali birbirine paralel olur. O halde, doğru ile düzlem birbirine dik ise $\overrightarrow{u} \parallel_{\mathcal{B}} \overrightarrow{N}$ olacağından

$$\frac{a \cdot a_1}{A} = \frac{b \cdot a_2}{B} = \frac{c \cdot a_3}{C}$$

eşitliği sağlanmalıdır (Şekil 4.9).



Şekil 4.9. ω düzlemi ile dik kesişen d doğrusu

Örnek 4.73. *$\mathbb{R}^3_{1,2,4}$ iç çarpım uzayında, $x + 2y + kz = 3$ düzlemiyle, $\dfrac{x-1}{m} = y = \dfrac{z-3}{4}$ doğrusu birbirine dik olacak şekilde k ve m değeri belirlenebilir. $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (1, 1, k/4)$ ve*

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (m, 1, 4)$ *birbirine paralel olması gerektiğinden,*

$$\frac{m}{1} = \frac{1}{1} = \frac{k/4}{4}$$

olur. Bu eşitlikten $k = 16$ *ve* $m = 1$ *olur. Aralarındaki açı da aşağıdaki verilen teorem yardımıyla hesaplanabilir ve*

$$\sin\theta_{\mathcal{B}} = 1 \Rightarrow \theta_{\mathcal{B}} = \pi/2$$

olduğu görülebilir.

4.5.4. Bir doğru ile bir düzlem arasındaki açı

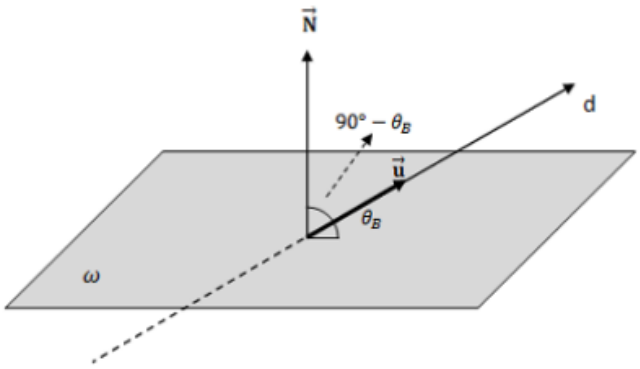
Teorem 4.74. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *uzayında bir* d*:* $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ *doğrusu ile, bir* ω*:* $Ax + By + Cz + D = 0$ *düzlemi verilsin. Doğru ile düzlemin arasındaki açı* $\theta_{\mathcal{B}}$ *ise, doğrunun doğrultmanı* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (a, b, c)$ *ile düzlemin normali* $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (A/a_1, B/a_2, C/a_3)$ *arasındaki açı* $90^\circ - \theta_{\mathcal{B}}$ *olacaktır (Şekil 4.10). Buna göre,*

$$\cos(90^\circ - \theta_{\mathcal{B}}) = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{N}})}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}} \|\overrightarrow{\mathbf{N}}\|_{\mathcal{B}}} \text{ veya } \sin\theta_{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{N}})}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}} \|\overrightarrow{\mathbf{N}}\|_{\mathcal{B}}}$$

eşitlikleri, istenen açıyı verir. Yani,

$$\begin{aligned} \sin\theta_{\mathcal{B}} &= \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a_1a^2 + a_2b^2 + a_3c^2}\sqrt{\frac{A^2}{a_1} + \frac{B^2}{a_2} + \frac{C^2}{a_3}}} \\ &= \frac{\Delta\,(Aa + Bb + Cc)}{\sqrt{a_1a^2 + a_2b^2 + a_3c^2}\sqrt{a_2a_3A^2 + a_1a_3B^2 + a_1a_2C^2}} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.



Şekil 4.10. d doğrusu ile ω düzlemi arasındaki açı

Teorem 4.75. *Üzerindeki iki doğrusu bilinen düzlemin denklemini bulabilmek için, öncelikle düzlemin normalini bulmak gerekir. Normali üç farklı şekilde bulmak mümkündür. Bunun için doğruların doğrultmanları* $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{u}}_2$*, doğru üzerindeki noktalar da* $\mathbf{P}$ *ve* $\mathbf{Q}$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \textit{i)}\ \overrightarrow{\mathbf{N}} &= \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \\ \textit{ii)}\ \overrightarrow{\mathbf{N}} &= \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{PQ}} \\ \textit{iii)}\ \overrightarrow{\mathbf{N}} &= \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{PQ}} \end{aligned}$$

eşitliklerinden biri kullanılabilir. Bundan sonra geriye düzlem denklemini belirlemek kalır.

4.5.5. Bir noktanın bir düzleme olan uzaklığı

Teorem 4.76. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *eliptik iç çarpım uzayında verilen bir* $\mathbf{P}$ *noktasının, normali* $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ *olan bir düzleme uzaklığı;* $\mathbf{S}$ *düzlem üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere,*

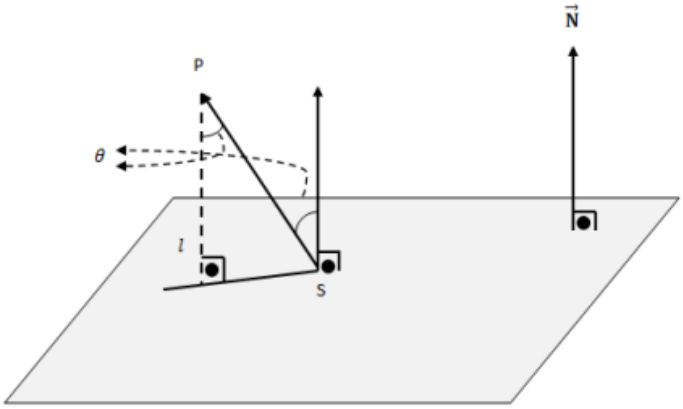
$$l = \frac{\left|\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{SP}})\right|}{\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\|_{\mathcal{B}}}$$

formülüyle bulunur.

İspat Normali $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ olan bir ω düzleminin dışındaki bir $\mathbf{P}$ noktasının, düzleme olan uzaklığı iç çarpım yardımıyla bulunabilir. Düzlem üzerindeki herhangi bir $\mathbf{S}$ noktası için, $\overrightarrow{\mathbf{SP}}$ vektörü ile, $\mathbf{P}$ 'den düzleme inilen dikme arasındaki açı $\theta_{\mathcal{B}}$ ise, $\mathbf{P}$ noktasının düzleme olan uzaklığı ℓ olmak üzere,

$$\ell = \|\overrightarrow{\mathbf{SP}}\|_{\mathcal{B}} \left|\cos\theta_{\mathcal{B}}\right|$$

ile verilebilir.



Şekil 4.11. $\mathbf{P}$ noktasının düzleme olan uzaklığı

Diğer yandan, $\theta_{\mathcal{B}}$, $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ ile $\overrightarrow{\mathbf{SP}}$ arasındaki açı olduğundan,

$$\cos\theta_{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{SP}})}{\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\|_{\mathcal{B}}\|\overrightarrow{\mathbf{SP}}\|_{\mathcal{B}}}$$

yazılabilir (Şekil 4.11). Böylece,

$$\begin{aligned} l &= \|\overrightarrow{\mathbf{SP}}\|_{\mathcal{B}} \frac{\left|\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{SP}})\right|}{\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\|_{\mathcal{B}}\|\overrightarrow{\mathbf{SP}}\|_{\mathcal{B}}} \\ &= \frac{\left|\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{SP}})\right|}{\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\|_{\mathcal{B}}} \end{aligned}$$

eşitliği noktanın düzleme uzaklığını verir. □

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.77. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *eliptik iç çarpım uzayında verilen bir* $\mathbf{P}(x_0, y_0, z_0)$ *noktasının* $Ax + By + Cz + D = 0$ *düzlemine uzaklığı,* Δ *iç çarpım sabiti olmak üzere,*

$$\ell = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\Delta^2\sqrt{(Aa_2a_3)^2 + (Ba_1a_3)^2 + (Ca_1a_2)^2}}$$

ile bulunur.

İspat $Ax + By + Cz + D = 0$ düzleminin normali $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (A/a_1, B/a_2, C/a_3)$'dir. $\mathbf{S}(x_1, y_1, z_1)$ düzlem üzerindeki bir nokta olsun. Bu durumda,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$$

olur. Bu eşitlik kullanılarak,

$$\begin{aligned} l &= \frac{\left|\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{SP}})\right|}{\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\|_{\mathcal{B}}} = \frac{|\mathcal{B}((A/a_1, B/a_2, C/a_3), (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1))|}{\sqrt{(A/a_1)^2 + (B/a_2)^2 + (C/a_3)^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + aBy_1 + Cz_1)|}{\Delta^2\sqrt{(Aa_2a_3)^2 + (Ba_1a_3)^2 + (Ca_1a_2)^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\Delta^2\sqrt{(Aa_2a_3)^2 + (Ba_1a_3)^2 + (Ca_1a_2)^2}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

4.5.6. Paralel iki düzlem arasındaki uzaklık

Teorem 4.78. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *eliptik iç çarpım uzayında,* ω_1*:* $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ *ve* ω_2*:* $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ *paralel düzlemleri arasındaki uzaklık,* Δ *iç çarpım sabiti olmak üzere,*

$$\ell = \frac{|D_2 - D_1|}{\Delta^2\sqrt{(Aa_2a_3)^2 + (Ba_1a_3)^2 + (Ca_1a_2)^2}}$$

formülü ile bulunur.

İspat $\mathbf{P}(x_1, y_1, z_1)$ noktası ω_2 düzlemi üzerinde nokta olsun. Bu noktanın, ω_1 düzlemine uzaklığı

$$\ell = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1|}{\Delta^2\sqrt{(Aa_2a_3)^2 + (Ba_1a_3)^2 + (Ca_1a_2)^2}}$$

formülü ile bulunur. $\mathbf{P}$, ω_2 düzlemi üzerinde olduğundan, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D_2$ olur. Buradan,

$$\ell = \frac{|D_2 - D_1|}{\Delta^2\sqrt{(Aa_2a_3)^2 + (Ba_1a_3)^2 + (Ca_1a_2)^2}}$$

olarak elde edilir. □

4.6. Eliptik İç Çarpım Uzaylarında İzdüşüm ve Simetri

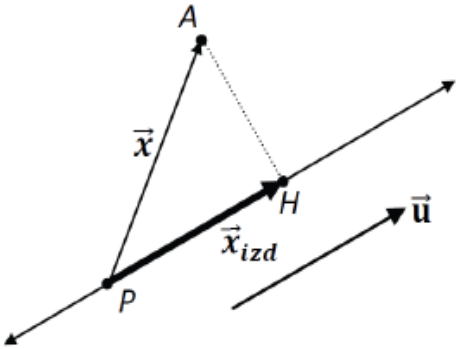
Eliptik iç çarpım uzayında bir A noktasının verilen bir doğru üzerindeki izdüşüm noktası denilince, doğru üzerinde A noktasına en yakın olan bir H noktası anlaşılır. A noktasının verilen bir düzlem üzerindeki izdüşüm noktası denilince, düzlem üzerindeki A noktasına en yakın olan bir H noktası anlaşılır. A noktasının bir doğruya göre simetriği denilince AHA' doğrusal ve doğruya dik ayrıca $|AH| = \left|HA'\right|$ olacak şekilde A' noktası anlaşılır.

A noktasının bir düzleme göre simetriği denilince, AHA' doğrusal ve düzleme dik ayrıca $|AH| = |HA'|$ olacak şekilde A' noktası anlaşılır.

Teorem 4.79. *Bir A noktasından, doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olan ve P noktasından geçen bir d doğrusu üzerine çizilen dikme ayağının koordinatları $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{PA}$ olmak üzere,*

$$H = P + \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}\overrightarrow{\mathbf{u}} \tag{4.12}$$

ile bulunur.



Şekil 4.12. A noktasının doğru üzerindeki izdüşüm noktası

İspat Doğrunun herhangi bir P noktasını alalım. $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ diyelim. Doğrunun doğrultman vektörü de $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olsun. Buna göre $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü, $\overrightarrow{\mathbf{x}}_{\mathcal{B}_{izd}} = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olur. $\overrightarrow{\mathbf{x}}_{\mathcal{B}_{izd}} = \overrightarrow{PH}$ vektörü olduğundan

$$H - P = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}\overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow H = P + \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}\overrightarrow{\mathbf{u}}$$

elde edilir. □

Örnek 4.80. $\mathbb{R}^3_{1,2,2}$ *eliptik iç çarpım uzayında $A(1,1,1)$ noktasının $\frac{x-1}{2} = y - 3 = z$ doğrusuna en yakın olduğu noktanın koordinatı, $P(3,4,1)$ doğru üzerindeki bir nokta, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{\mathbf{x}} = (-2,-3,0)$ ve doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (2,1,1)$ olmak üzere (4.12) formülünden*

$$\begin{aligned} H &= (3,4,1) + \frac{\mathcal{B}((-2,-3,0),(2,1,1))}{\mathcal{B}((2,1,1),(2,1,1))}(2,1,1) \\ &= (\frac{1}{2}, \frac{11}{4}, -\frac{1}{4}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.12) formülü kullanılmadan da H noktası bulunabilir. H noktası doğru üzerinde olduğundan koordinatları

$$\frac{x-1}{2} = y - 3 = z = t \Rightarrow H(2t+1, t+3, t)$$

formundadır.

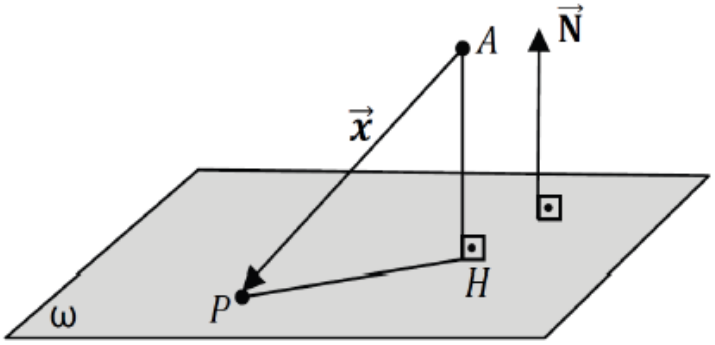
$$\overrightarrow{AH} \perp_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}} \Leftrightarrow \mathcal{B}((2t, t+2, t-1), (2,1,1)) = 4t + 2t + 4 + 2t - 2 = 0$$

eşitliğinden $t = -\frac{1}{4}$ *olur. O halde,* H *noktasının koordinatları:* $H(2t+1, t+3, t) = H(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}, -\frac{1}{4})$ *olarak bulunur.*

Teorem 4.81. *Bir* A *noktasından, normali* $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ *olan ve* P *noktasından geçen bir* ω *düzlemi üzerine çizilen dikme ayağının koordinatları*

$$H = A + \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{\mathbf{N}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}})}\overrightarrow{\mathbf{N}} \tag{4.13}$$

ile bulunur.



Şekil 4.13. A noktasının düzlem üzerindeki izdüşüm noktası

İspat Düzlemin herhangi bir P noktasını alalım. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ diyelim. $\overrightarrow{AH}$ vektörü $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünün $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörüdür. Buna göre

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{N}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}})}\overrightarrow{\mathbf{N}} \Rightarrow H = A + \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{\mathbf{N}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}})}\overrightarrow{\mathbf{N}}$$

elde edilir. □

Örnek 4.82. $\mathbb{R}^3_{1,2,2}$ *eliptik iç çarpım uzayında* $x + 4y - 2z = 5$ *düzleminin,* $A(1,2,3)$ *noktasına en yakın koordinatları, düzlem üzerindeki herhangi bir nokta* $P(-1,2,1)$*, düzlemin normali* $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (1,2,-1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{AP} = (-2,0,-2)$ *olduğundan (4.13) formülünden*

$$H = A + \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{\mathbf{N}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}})}\overrightarrow{\mathbf{N}} = (1,2,3) + \frac{2}{11}(1,2,-1) = (\frac{13}{11}, \frac{26}{11}, \frac{31}{11})$$

olarak bulunur. (4.13) formülü kullanılmadan da H noktası bulunabilir. İstenen nokta $H(a,b,c)$ olsun. $\overrightarrow{AH} = (a-1, b-2, c-3)$ olup

$$\overrightarrow{AH} \parallel \overrightarrow{\mathbf{N}} \Leftrightarrow \frac{a-1}{1} = \frac{b-2}{2} = \frac{c-3}{-1} = k$$

olmalıdır. Buradan $H(a,b,c) = H(k+1, 2k+2, -k+3)$ olur. H noktası düzlem denklemini sağlayacağından

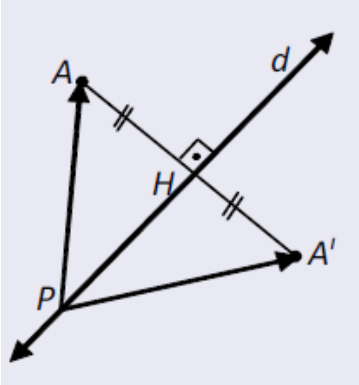
$$k + 1 + 4(2k+2) - 2(-k+3) = 5$$

eşitliğinden, $k = \frac{2}{11}$ olur. O halde $H(\frac{13}{11}, \frac{26}{11}, \frac{31}{11})$ elde edilir.

Teorem 4.83. *Herhangi bir A noktasının, doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olan ve P noktasından geçen bir doğruya göre simetriği olan noktanın koordinatları*

$$A' = 2\frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}\overrightarrow{\mathbf{u}} + 2P - A \tag{4.14}$$

ile bulunur.



Şekil 4.14. A noktasının bir doğruya göre simetriği olan nokta

İspat $\overrightarrow{PA'}$ vektörü, $\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{PH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ şeklinde ifade edilebilir. $\overrightarrow{PH}$ vektörü, $\overrightarrow{PA}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü üzerine dik izdüşümü olduğundan,

$$\overrightarrow{PH} = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}\overrightarrow{\mathbf{u}}$$

yazılabilir. Böylece

$$A' - P = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}\overrightarrow{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}(A' - A)$$

dolayısıyla

$$A' = 2\frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}\overrightarrow{\mathbf{u}} + 2P - A$$

elde edilir. □

Örnek 4.84. $\mathbb{R}^3_{1,2,2}$ *eliptik iç çarpım uzayında* $A(1,2,3)$ *noktasının* $x=y=z$ *doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatları, doğrunun doğrultman vektörü* $\overrightarrow{\mathbf{u}}=(1,1,1)$ *ve doğru üzerindeki herhangi bir nokta* $P=(0,0,0)$ *olarak alınabileceğinden* $\overrightarrow{PA}=(1,2,3)$ *olur ve (4.14) formülünden*

$$\begin{aligned} A' &= 2\frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{\mathbf{u}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{u}})}\overrightarrow{\mathbf{u}}+2P-A \\ &= 2\frac{11}{5}(1,1,1)+2(0,0,0)-(1,2,3) \\ &= (\frac{17}{5},\frac{12}{5},\frac{7}{5}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.14) formülü kullanılmadan da A' *noktası bulunabilir.* A *noktasının simetriği olan noktayı* $A'(a,b,c)$ *ile gösterelim. Buna göre,* $\overrightarrow{AA'}=(a-1,b-2,c-3)$ *olur.* $\mathcal{B}(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{\mathbf{u}})=0$ *eşitliğinden,* $a+2b+2c=11$ *olur. Ayrıca*

$$H=\frac{A+A'}{2}=(\frac{a+1}{2},\frac{b+2}{2},\frac{c+3}{2})$$

noktası $x=y=z$ *doğru denklemini sağlamalıdır.*

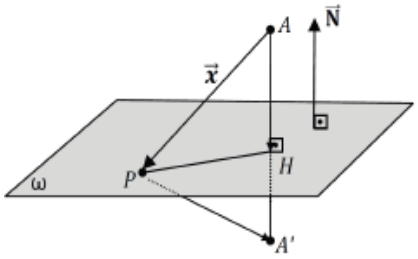
$$\frac{a+1}{2}=\frac{b+2}{2}=\frac{c+3}{2}=k$$

diyelim. $a=2k-1, b=2k-2$ *ve* $c=2k-3$ *eşitlikleri,* $a+2b+2c=11$ *eşitliğinde yazılırsa,* $10k=22$ *eşitliğinden* $k=\frac{11}{5}$ *olur ki buradan* $A'(\frac{17}{5},\frac{12}{5},\frac{7}{5})$ *elde edilir.*

Teorem 4.85. *Bir* A *noktasının, normali* $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ *olan ve* P *noktasından geçen bir* ω *düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatları*

$$A'=A+2\frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{\mathbf{N}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}},\overrightarrow{\mathbf{N}})}\overrightarrow{\mathbf{N}} \tag{4.15}$$

ile bulunur.



Şekil 4.15. A noktasının bir düzleme göre simetriği olan nokta

İspat Vektörlerde toplama işlemine göre, $\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{AH}$ şeklinde ifade edebiliriz. $\overrightarrow{AH}$ vektörü, $\overrightarrow{AP}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ vektörü üzerine dik izdüşümü olduğundan $\overrightarrow{AH} = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{\mathbf{N}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}},\overrightarrow{\mathbf{N}})}\overrightarrow{\mathbf{N}}$ yazılabilir. Buradan,

$$A' - P = A - P + 2\frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{\mathbf{N}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}},\overrightarrow{\mathbf{N}})}\overrightarrow{\mathbf{N}} \Rightarrow A' = A + 2\frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{\mathbf{N}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}},\overrightarrow{\mathbf{N}})}\overrightarrow{\mathbf{N}}$$

elde edilir. □

Örnek 4.86. *$\mathbb{R}^3_{1,2,2}$ eliptik iç çarpım uzayında $A(1,2,3)$ noktasının $x+4y-2z=5$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatları, düzlemin normali $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (1,2,-1)$, düzlem üzerindeki bir nokta $P(-1,2,1)$ olarak alınabilir, buna göre $\overrightarrow{AP} = (-2,0,-2)$ olur ve (4.15) formülünden*

$$\begin{aligned} A' &= A + 2\frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{\mathbf{N}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}},\overrightarrow{\mathbf{N}})}\overrightarrow{\mathbf{N}} \\ &= (1,2,3) + \frac{4}{11}(1,2,-1) \\ &= (\frac{15}{11},\frac{30}{11},\frac{29}{11}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.15) formülü kullanılmadan da A' noktası bulunabilir. A noktasının simetriği olan noktayı $A'(a,b,c)$ ile gösterelim. Buna göre, $\overrightarrow{AA'} = (a-1,b-2,c-3)$ olur. $\overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{\mathbf{N}}$ olduğundan

$$\frac{a-1}{1} = \frac{b-2}{2} = \frac{c-3}{-1} = k$$

eşitliğinden $a = k+1, b = 2k+2$ ve $c = -k+3$ elde edilir. Ayrıca

$$H = \frac{A+A'}{2} = (\frac{a+1}{2},\frac{b+2}{2},\frac{c+3}{-2})$$

noktası $x+4y-2z=5$ düzlem denklemini sağladığından dolayı düzlem denkleminde yazılırsa, $a+4b-2c=7$ denklemi elde edilir. $a = k+1, b = 2k+2$ ve $c = -k+3$ eşitlikleride $a+4b-2c=7$ denkleminde yazılırsa, $11k = 4$ eşitliğinden $k = \frac{4}{11}$ olur ki bu değer yerine yazılırsa $A'(\frac{15}{11},\frac{30}{11},\frac{29}{11})$ elde edilir.

4.7. Eliptik İç Çarpım Uzaylarında Dönme Dönüşümü

Eliptik dönme, bir vektör etrafında bir açı boyunca elips üzerindeki bir noktanın hareketidir. Bu bölümdeki amaç; eliptik dönmenin oluşturulması ve eliptik iç çarpım ile eliptik vektörel çarpım kullanılarak elipsoid üzerindeki bir noktanın hareketini yorumlamaktır. Eliptik dönme matrisi oluşturmak için öncelikle ilgili iç çarpım kullanarak, eliptik ortogonal matris ve eliptik ters-simetrik matris tanımlanmıştır. Ardından, eliptik dönme matrisi oluşturmak için ünlü Rodrigues, Cayley ve Householder yöntemlerinin eliptik versiyonlarını kullanılmıştır. Son olarak eliptik kuaterniyonlar tanımlanmış ve bu kuaterniyonlar kullanarak eliptik bir dönme matrisi oluşturulmuştur. Her yöntem kanıtlanmıştır ve birkaç sayısal örnekle birlikte verilmiştir.

Dönme, aralarındaki mesafeleri değiştirmeden noktaları hareket ettiren bir dönüşüm olan bir izometri örneğidir. Üç boyutlu dönme, katı bir cismin, bir eksen etrafındaki hareketini tanımlayan ve dönme matrisi olarak adlandırılan ortonormal matrisle ifade edilebilen doğrusal bir dönüşümdür. 3×3 dönme matrisleri, $SO(3)$ ile belirtilen özel bir abelian olmayan ortogonal grup oluşturur. 3×3 dönme matrisleri grubu, 3 boyutlu bir uzayda dönme grubuna izomorfiktir. Bu, dönme matrislerinin çarpımının, dönüşlerin bileşimine karşılık geldiği anlamına gelir. Dönme matrisleri geometri, kinematik, fizik, bilgisayar grafikleri, animasyonlar ve katı cisim dönüşümlerinin tahminini içeren optimizasyon sorunları hesaplamaları için yaygın olarak kullanılır. Bu nedenle, bir dönme matrisinin üretilmesi matematikte önemli bir problem olarak kabul edilir.

İki boyutlu Öklid uzayında, temel doğrusal cebir veya karmaşık sayılar kullanılarak kolayca bir dönme matrisi oluşturulabilir. Benzer şekilde, Lorentz düzleminde, hiperbolik sayılarla bir dönme matrisi oluşturulabilir. Daha yüksek boyutlu uzaylarda, bir dönme matrisinin her sütunu ve satırı sırasıyla diğer tüm sütunlara ve satırlara dik bir birim vektör olması gerektiğinden, iç çarpım kullanarak bir dönme matrisi elde etmek pratik değildir. Bu kısıtlamalar, iç çarpım kullanarak bir dönme matrisi oluşturmayı zorlaştırır. Bunun yerine daha yüksek boyutlu uzaylarda, birim kuaterniyonlar, Rodrigues formülü, Cayley formülü ve Householder dönüşümü gibi diğer çeşitli yöntemler kullanılarak dönme matrisleri oluşturulabilir.

Bu yöntemlerin kısa bir incelemesi yapılarak, eliptik versiyonları elde edilecektir.

1. Birim Kuaterniyon: Her birim kuaterniyon, 3 boyutlu Öklid uzayında bir dönme temsil eder. Bir dönme matrisi oluşturmak için yalnızca dört sayı yeterlidir, tek kısıtlama kuaterniyon normunun 1'e eşit olmasıdır. Ayrıca bu yöntemde dönme açısı ve dönme ekseni kolayca belirlenebilir. Ancak, bu yöntem yalnızca üç boyutlu uzayda geçerlidir (Schmidt ve Nieman 2001; Vicci 2001). Lorentz uzayında, sıradan kuaterniyonlar yerine timelike split kuaterniyonlar kullanılır (Özdemir ve Ergin 2006; Özdemir vd. 2013).

2. Rodrigues Formülü: T 'nin ters simetrik matris ve dönüş açısının θ olduğu, $e^{\theta T}$ üstel matrisi kullanılarak bir ortonormal matris elde edilebilir. Bu yöntemde, 3 boyutlu Öklid uzayında bir dönme matrisi oluşturmak için yalnızca üç sayı gerekir (Bracket 1984; Murray 1994; Politi 2001; Kula vd. 2005). Bu üç sayıyla ayarlanan vektör dönme eksenini verir. Bu yöntem n boyutlu Öklid ve Lorentz uzaylarına genişletilebilir (Gallier ve Xu 2000; Eberly 2007; Mebius 2007; Gallier 2014; Özdemir ve Erdoğdu 2014).

3. Cayley Formülü: T ters simetrik bir matris olmak üzere, $C = (I + T)(I - T)^{-1}$ formülü bir dönme matrisi verir. Dönme matrisleri, trigonometrik işlevler kullanmadan Cayley formülü tarafından verilebilir (Cayley 1889; Selig 2007; Özkaldı ve Gündoğan 2010; Erdoğdu ve Özdemir 2015; Norris 2018).

4. Householder Dönüşümü: Householder dönüşümü bize bir yansıma matrisi verir. İki Householder dönüşümü kullanarak bir dönme matrisi elde bulunabilir. Bu yöntem zarif bir yöntemdir ancak uzun ve sıkıcı olabilir. Bu yöntemde, dönme açısı ayrıca hesaplanmalıdır. Bu dönüşüm birkaç skaler çarpım uzayında kullanılabilir (Uhlig 2001; Mackey vd. 2004; Aragón-González vd. 2006; Fuller 2011; Rodríguez-Andrade vd. 2011).

Bu yöntemleri kullanarak, özellikle Öklid ve Lorentz uzaylarında dönme matrisleri üretmeye ilişkin ayrıntılar, bazıları referans bölümünde verilen çeşitli makalelerde bulunabilir. Bu yazarlar çoğunlukla ilişkili matrisleri $diag(\pm 1, ..., \pm 1)$ olan pozitif belirli skaler çarpım uzayındaki dönme matrislerini incelemiş ve sonuçları geometrik olarak yorumlamıştır. Örneğin, ilişkili matrislerin sırasıyla $diag(1, 1, 1)$ ve $diag(-1, 1, 1)$ olduğu

üç boyutlu Öklid ve Lorentz uzaylarında dönme matrisleri oluşturmak için kuaterniyonlar ve timelike split kuaterniyonlar kullanılmıştır. Bu uzaylarda, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ küresi veya $-x^2 + y^2 + z^2 = \pm r$ hiperboloidleri üzerinde dönmeler meydana gelir. Yani Öklid ve Lorentz dönme matrisleri küresel ve hiperbolik dönüşleri anlamamıza yardımcı olur. Öklid uzayında, bir dönme matrisi bir noktayı veya katı bir cismi bir eksen etrafında dairesel bir açıyla döndürür. Yani hareket bir daire üzerinde gerçekleşir. Benzer şekilde, Lorentz uzayında, bir dönme matrisi, dönme ekseninin sırasıyla timelike veya spacelike olmasına bağlı olarak bir noktayı bir eksen etrafında dairesel veya hiperbolik olarak bir açıyla döndürür.

Bu bölümde, a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere ilişkili matrisi $diag(a_1, a_2, a_3)$ olan iç çarpım uzayında, ortogonal matrisler olan eliptik dönme matrislerini araştırılacaktır. İlk olarak, verilen elipse (veya elipsoide) uygun bir iç çarpım seçilmelidir, öyle ki bu elips (veya elipsoid) iç çarpım uzayı için bir daireye (veya küreye) eşdeğerdir. Yani, iç çarpım, elips (veya elipsoid) üzerindeki herhangi bir nokta ile orijin arasındaki mesafeyi değiştirmez. Bir elipsoid üzerindeki hareketin yorumlanması önemli bir kavramdır çünkü gezegenler genellikle elipsoidal şekillere ve eliptik yörüngelere sahiptir. Elipsoidin geometrisi, afin dönüşümler kullanılarak incelenebilir çünkü, bir elipsoid, birim kürenin afin haritası olarak düşünülebilir. Örneğin, elipsoid $\varepsilon^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = x^t Ax \leqslant 1\}$ ve birim küre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = x^t x \leqslant 1\}$ için, $T(x) = Ax + c$, $x \in \varepsilon^2$ afin dönüşümünü kullanarak $\varepsilon^2 = S^2$ yazılabilir. Yani, $Q = AA^t$ olmak üzere,

$$Boy(\varepsilon^2) = Boy(T(S^2)) = \sqrt{\det Q}\, Boy(S^2) = \sqrt{\det Q}\, 4\pi/3$$

olduğu görülür. Bu bölümdeki amaç

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

elipsoidi üzerindeki hareketi; uygun iç çarpım, vektörel çarpım ve ortogonal matrisleri kullanarak, dönme olarak açıklamaktır. Bu yöntemde eliptik iç çarpım, vektörel çarpım ve eliptik açılar $\varphi(\theta, \beta) = (a\cos\theta\cos\beta, b\cos\theta\sin\beta, c\sin\theta)$ parametrizasyonunun θ ve β parametreleri ile uyumludur. Eliptik dönme matrisleri üretmek için klasik yöntemleri kullanılacaktır. Kaynak taramasında, öncelikle belirli bir elipsoid için uygun bir iç çarpım ve bir vektörel çarpım tanımlandı. Daha sonra bu eliptik iç çarpım alanında simetrik, ters-

simetrik ve ortogonal matrisler tanımlandı. Şimdi, eliptik dönme matrisleri kullanarak bir elipsoid üzerindeki hareketi inceleyelim.

Tanımlanacak iç çarpımla uyumlu çeşitli klasik yöntemler (Cayley formülü, Rodrigues formülü ve Householder dönüşümü gibi) kullanılarak eliptik dönme matrisleri üretilecektir. Ayrıca, eliptik kuaterniyonlar tanımlanıp, birim eliptik kuaterniyonlar kullanılarak eliptik dönme matrisleri üretilecektir.

4.8. Eliptik Dönme Matrisi Oluşturma

Bu bölümde klasik yöntemlerin eliptik versiyonları kullanılarak eliptik dönme matrisleri üretilecektir.

$$(\mathbf{E}) : a_1x^2 + a_2y^2 = \lambda, \lambda, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$$

biçiminde verilen bir elips için $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = a_1u_1v_1 + a_2u_2v_2$ iç çarpımını kullanılır. Yani çalışılacak iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^2_{a_1,a_2}$ dir. Bir eliptik dönme matrisi, (**E**) üzerindeki bir dönüşü veya (**E**) 'ye benzer herhangi bir elips üzerindeki dönüşü temsil eder. Aynı dış merkezliğe sahip elipslere, benzer elipsler denir. Bir elipsin şekli, sadece (**E**) denklemdeki a_1/a_2 ve λ oranına bağlı olduğundan, dönme matrisini etkilemez.

4.8.1. Rodrigues dönme formülü

Rodrigues dönme formülü, dönme matrisleri oluşturmak için kullanışlı bir yöntemdir. Bir dönüş ekseni ve bir açı verildiğinde, bu yöntemi kullanarak kolayca bir dönme matrisi oluşturulabilir. Herhangi bir T ters simetrik matrisi için, e^T üstel matrisi her zaman bir dönme matrisi verir. Bu yöntem, Rodrigues formülü olarak bilinir.

Düzlemde eliptik dönmeler (2.4) 'e göre bir ters simetrik matris

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{a_2}/\sqrt{a_1} \\ \sqrt{a_1}/\sqrt{a_2} & 0 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir. Yani T matrisi, $T^t\Omega = \Omega T$ eşitliğini sağlanır. T nin karakteristik polinomu, $P(x) = x^2 + 1$ dir. Böylece $T^2 = -1$ eşitliği sağlanır. Üstel matris kullanarak eliptik dönme matrisi kolayca elde edilebilir.

Teorem 4.87. *T bir $\mathcal{B}$-ters simetrik matris olsun. O zaman*

$$R_\theta^{\mathcal{B}} = e^{T\theta} = I + (\sin\theta)T + (1-\cos\theta)T^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}}\sin\theta \\ \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}}\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

üstel matrisi, $a_1x^2 + a_2y^2 = \lambda$, $\lambda, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$ elipsi boyunca, eliptik bir dönüş sağlar. Yani $R_\theta^{\mathcal{B}}$ matrisi $\mathbb{R}^2_{a_1,a_2}$ uzayında eliptik bir dönme matrisidir (Özdemir 2016).

Sonuç 4.88. *Benzer tüm elipsler aynı eliptik dönme matrislerine sahiptir.*

Örnek 4.89. *$\alpha(\theta) = (3\cos\theta, 2\sin\theta)$ parametreli ($\mathbf{E}_1$): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ elipsi ele alınsın.*

$$A = \alpha(\pi/4) = (3\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$$

ve

$$B = \alpha(\pi/4 + \pi/3) = (3\sqrt{2}/4 - 3\sqrt{6}/4, \sqrt{2}/2 + \sqrt{6}/2)$$

noktaları seçilsin. Yani, A noktası $\pi/3$ açısı boyunca eliptik olarak döndürülürse, B noktası elde edilir. Teorem (4.87) yardımıyla da, bu elipsler için eliptik dönme matrisi hesaplanabilir. Elips ($\mathbf{E}_1$) 'e göre $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$ olsun. Eliptik dönme matrisini hesaplamak için önce eliptik iç çarpım,

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \frac{u_1v_1}{9} + \frac{u_2v_2}{4}$$

olarak seçilir. Yani uzayımız $\mathbb{R}^2_{1/9,1/4}$ olduğundan iç çarpım sabiti $\Delta = 1/6$ ve T, $\mathcal{B}$-ters simetrik matrisi

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -3/2 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $T^2 = -I$ olduğuna dikkat ediniz. Eliptik dönme matrisi

$$R_\theta^{\mathcal{B}} = e^{T\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{3\sin\theta}{2} \\ \frac{2\sin\theta}{3} & \cos\theta \end{bmatrix}$$

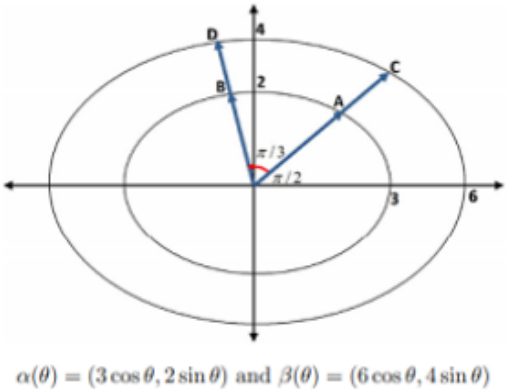
olarak bulunur. Burada $R_\theta^{\mathcal{B}}$, $\mathbb{R}^2_{1/9,1/4}$ de bir $\mathcal{B}$-ortogonal matristir. Yani, $\det R_\theta^{\mathcal{B}} = 1$ ve $(R_\theta^{\mathcal{B}})^T\Omega(R_\theta^{\mathcal{B}}) = \Omega$ eşitlikleri sağlanır. $\theta = \pi/3$ için

$$R_{\pi/3}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/3 & 1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Yani, A noktası eliptik olarak döndürülürse,

$$B = R_\theta^{\mathcal{B}}(A) = (3\sqrt{2}/4 - 3\sqrt{6}/4, \sqrt{2}/2 + \sqrt{6}/2)$$

elde edilir. Böylece ($\mathbf{E}_1$) için eliptik dönme matrisini kullanarak aynı sonuca ulaşılır. $\left\|R_\theta^{\mathcal{B}}(A)\right\|_{\mathcal{B}} = 1$ *ve* $\mathbf{x} = \overrightarrow{OA}$ *ile* $\mathbf{y} = \overrightarrow{OB}$ *arasındaki açının* $\cos\theta = \frac{\mathcal{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{B}}\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{B}}} = \frac{1}{2}$ *olduğuna dikkat ediniz. Eliptik dönme matrisi* $R_\theta^{\mathcal{B}}$ *nin, ($\mathbf{E}_1$) 'e benzer bir* $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ *elipsi üzerindeki hareketi yorumlamak için de kullanılabileceği görülebilir (Şekil 4.16).*



Şekil 4.16. $\mathbb{R}^2_{1/9,1/4}$ düzlemindeki eliptik dönme

3 boyutlu eliptik dönmeler $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$ elipsoidi verilsin. Bu elipsoidin iç çarpımı $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ için $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = a_1u_1v_1 + a_2u_2v_2 + a_3u_3v_3$ şeklindedir. Ayrıca $\Delta = \sqrt{a_1a_2a_3}$ olmak üzere, $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörel çarpımı

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} &= \mathbf{\Delta} \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1/a_1 & \mathbf{e}_2/a_2 & \mathbf{e}_3/a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \\
&= \Delta \begin{bmatrix} 0 & -u_3/a_1 & u_2/a_1 \\ u_3/a_2 & 0 & -u_1/a_2 \\ -u_2/a_3 & u_1/a_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\
&= T\left[\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]^t
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$T = \Delta \begin{bmatrix} 0 & -u_3/a_1 & u_2/a_1 \\ u_3/a_2 & 0 & -u_1/a_2 \\ -u_2/a_3 & u_1/a_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

$\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında bir ters simetrik matristir. Yani T matrisi $T^t\Omega = -\Omega T$ eşitliğini sağlar. Bu nedenle, $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayındaki vektörel çarpım, ters simetrik bir matrisle çarpmaya karşılık gelen doğrusal bir dönüşüm olarak görülebilir. T nin karakteristik polinomu, özdeğerleri $x_1 = 0$ ve $x_{2,3} = \pm \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| i$ olan $P(x) = x^3 + \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|^2 x$ polinomudur. $T^3 + \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|^2 T = 0$ karakteristik polinomuna göre, $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ birim vektörü alınırsa, $T^3 = -T$ elde edilir ve Rodrigues ve Cayley formülleri kullanılabilir.

Teorem 4.90. *$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ bir birim vektör ve (4.16) biçiminde bir ters simetrik matris T olsun. $R_\theta^{\mathcal{B},\overrightarrow{\mathbf{u}}} = e^{T\theta} = I + (\sin\theta)T + (1-\cos\theta)T^2$ üstel matrisi, $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$, $a_i \in \mathbb{R}^+$ elipsoidi üzerinde eliptik bir dönüş verir. Ayrıca, $R_\theta^{\mathcal{B},\mathbf{u}}$ matrisi,*

$$\begin{bmatrix} a_1u_1^2 + (1-a_1u_1^2)c\theta & -\frac{\Delta u_3 s\theta}{a_1} - a_2u_1u_2(c\theta-1) & \frac{\Delta u_2 s\theta}{a_1} - a_3u_1u_3(c\theta-1) \\ \frac{\Delta u_3 s\theta}{a_2} - a_1u_1u_2(c\theta-1) & a_2u_2^2 + (1-a_2u_2^2)c\theta & -\frac{\Delta u_1 s\theta}{a_2} - a_3u_2u_3(c\theta-1) \\ -\frac{\Delta u_2 s\theta}{a_3} - a_1u_1u_3(c\theta-1) & \frac{\Delta u_1 s\theta}{a_3} - a_2u_2u_3(c\theta-1) & a_3u_3^2 + (1-a_3u_3^2)c\theta \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ dönüş ekseni ve θ eliptik dönüş açısıdır ($\cos\theta = c\theta$, $\sin\theta = s\theta$) (Özdemir 2016).

İspat $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında birim vektör olduğundan $T^3 = -T$ eşitliği sağlanır. Yani,

$$\begin{aligned} R_\theta^{\mathcal{B},\mathbf{u}} &= e^{\theta T} = I + \theta T + \frac{\theta^2T^2}{2!} + \frac{-\theta^3T}{3!} + \frac{-\theta^4T^2}{4!} + \frac{\theta^5T}{5!} + \frac{\theta^6T^2}{6!} \\ &= I + T\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) + T^2\left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots\right) \\ &= I + T\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) + T^2\left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right)\right) \\ &= I + T(\sin\theta) + T^2(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu formülü

$$-a_2u_2^2 - a_3u_3^2 = a_1u_1^2 - 1$$

eşitliğini kullanarak genişletirsek, dönme matrisi (4.17) biçiminde bulunur. □

Örnek 4.91. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ *elipsoidinin bir parametrizasyonu*

$$\alpha(\theta,\beta)=(2\cos\theta\cos\beta, 2\cos\theta\sin\beta, 3\sin\theta)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\theta\in[0,\pi)$ *ve* $\beta\in[0,2\pi)$ *dir. Elipsoid üzerindeki*

$$A=\alpha(30^\circ,30^\circ)=(3/2,\sqrt{3}/2,3/2)$$

ve

$$B=\alpha(120^\circ,30^\circ)=(-\sqrt{3}/2,-1/2,3\sqrt{3}/2)$$

noktaları için, A noktasını B noktasına eliptik olarak döndüren dönme matrisi verilen yöntemle bulunabilir. $a_1=a_2=1/4$ *ve* $a_3=1/9$ *olduğundan* $\Delta=1/12$ *dir. İlk olarak,* $\mathbf{x}=\overrightarrow{OA}$ *ve* $\mathbf{y}=\overrightarrow{OB}$ *vektörlerinin* $\mathbb{R}^3_{1/4,1/4,1/9}$ *uzayındaki vektörel çarpımını kullanarak,* $\mathbf{u}$ *dönme ekseni bulunmalıdır.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{x}}\times_{\mathcal{B}}\overrightarrow{\mathbf{y}} &= \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 4i & 4j & 9k \\ 3/2 & \sqrt{3}/2 & 3/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 3\sqrt{3}/2 \end{vmatrix} \\ &= (1,-\sqrt{3},0).\end{aligned}$$

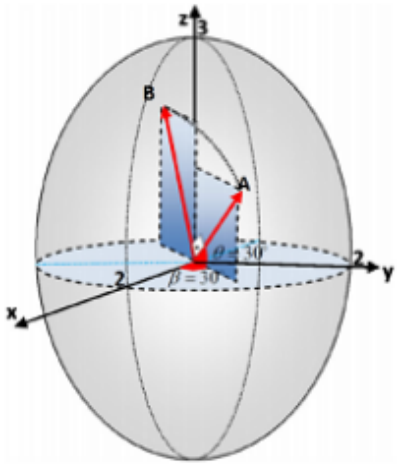
$\overrightarrow{\mathbf{x}}\times_{\mathcal{B}}\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\mathbb{R}^3_{1/4,1/4,1/9}$ *uzayında birim vektör olduğundan,* $\overrightarrow{\mathbf{u}}=(1,-\sqrt{3},0)$ *olarak bulunur. Böylece (4.17) eşitliğini kullanarak eliptik dönme matrisi*

$$R_\theta^{\overrightarrow{\mathbf{u}}}T(\theta)=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 9\cos\theta+3 & 3\sqrt{3}(\cos\theta-1) & -4\sqrt{3}\sin\theta \\ 3\sqrt{3}(\cos\theta-1) & 3\cos\theta+9 & -4\sin\theta \\ 9\sqrt{3}\sin\theta & 9\sin\theta & 12\cos\theta \end{bmatrix}$$

olur. Bu matris, elipsoid ile orijinden geçen düzlemin kesişimi ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *'ya* $\mathcal{B}$*-ortogonal olacak şekilde büyük bir elips üzerinde eliptik bir dönmeyi tanımlar. Düzlem denkleminin* $x=\sqrt{3}y$ *olduğu kolayca bulunabilir. Böylece,* $R^{\mathbf{u}}_\theta$, $y^2+\frac{1}{9}z^2=1$, $y=\sqrt{3}x$ *büyük elipsi üzerindeki eliptik bir dönüşü temsil eder. Ayrıca,* $\cos\theta=\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}})=0$ *olduğundan, eliptik dönüş açısı* $\pi/2$ *dir (Şekil 4.17). Böylece*

$$R^{\mathbf{u}}_{\pi/2}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3 & -3\sqrt{3} & -4\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 9 & -4 \\ 9\sqrt{3} & 9 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

bulunur. (4.18) matrisi, A noktasını büyük elips $y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$, $y = \sqrt{3}x$ üzerinde eliptik olarak B noktasına döndürür.



Şekil 4.17. $\mathbb{R}^3_{1/4,1/4,1/9}$ uzayındaki eliptik dönme

Sonuç 4.92. ***(4.17)** matrisinin özdeğerleri $x_1 = e^{i\theta}$, $x_2 = e^{-i\theta}$ ve $x_3 = 1$ dir. Ayrıca, 1'e karşılık gelen özvektör, hareketin dönüş ekseni olan $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörüdür.*

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = \lambda_1$ ve $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = \lambda_2$ elipsoidleri benzer olarak adlandırılır.

4.8.2. Eliptik cayley dönme matrisi

1846'da Arthur Cayley, ters simetrik matrisler kullanarak özel ortogonal matrisleri ifade etmek için bir formül keşfetti. Buna Cayley dönme matrisi denir. Bu bölümde, iç çarpımı $\mathcal{B}$ olan, herhangi bir elipsoid için Cayley dönme matrisini açıklayacağız. Buna kısaca $\mathcal{B}$-Cayley dönme matrisi denir.

Cayley dönme matrisi, trigonometrik işlevleri kullanmaya gerek kalmadan, dönme matrisleri için bir parametrelendirme sağlayan kullanışlı bir araçtır. Tersinir T matrisi $n \times n$ tipinde ters simetrik bir matris olsun. T nin tersi $(I - T)$ dır. Cayley formülü T matrisini $(I + T)(I - T)^{-1}$ e dönüştürür. $\mathbf{SO}(n)$, Cayley formülü aracılığıyla $\mathfrak{so}(n)$ 'ye izomorfiktir. Yani Cayley dönüşümü

$$C : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$$

$$T \to C(T) = (I + T)(I - T)^{-1}$$

olarak tanımlanır.

Bir M matrisinin özdeğeri -1 ise, o zaman $(I - M)$ tersinir değildir. Ancak, T ters simetrik olduğundan, tüm özdeğerleri Öklid uzayında tamamen hayalidir ve $(I - T)$ tersinirdir. Yani, Cayley formülü tüm ters simetrik matrisler için iyi tanımlanmıştır. Cayley dönüşümünün tersi

$$C^{-1} = (I - T)(I + T)^{-1}$$

ile verilmektedir.

Minkowski uzayında, ters simetrik matrisin bir özdeğeri -1 olabilir. Bu durumda, Cayley formülü geçerli değildir. Minkowski uzayındaki Cayley formülü hakkında ayrıntılı bilgi Bükçü (2006); Özkaldı ve Gündoğan (2010); Erdoğdu ve Özdemir (2015) tarafından verilmiştir.

Teorem 4.93. $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *ve (4.16) biçiminde bir ters simetrik matris* T *olsun.*

$$R^{\mathcal{B},\overrightarrow{\mathbf{u}}} = (I + T)(I - T)^{-1}$$

matrisi, $\mathbf{u}$ *vektörünün dönüş ekseni olduğu,* $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$ *elipsoidi üzerinde eliptik bir dönme matrisidir. Ayrıca* $R^{\mathcal{B},\overrightarrow{\mathbf{u}}}$ *matrisi*

$$\frac{1}{1 + \|\overrightarrow{u}\|^2_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} a_1u_1^2 - u_2^2a_2 - u_3^2a_3 + 1 & a_2u_1u_2 - \frac{2\Delta u_3}{a_1} + u_1u_2a_2 & \frac{2\Delta u_2}{a_1} + a_3u_1u_3 + u_1u_3a_3 \\ \frac{2\Delta u_3}{a_2} + a_1u_1u_2 + u_1u_2a_1 & a_2u_2^2 - u_1^2a_1 - u_3^2a_3 + 1 & a_3u_2u_3 - \frac{2\Delta u_1}{a_2} + u_2u_3a_3 \\ a_1u_1u_3 - \frac{2\Delta u_2}{a_3} + u_1u_3a_1 & \frac{2\Delta u_1}{a_3} + a_2u_2u_3 + u_2u_3a_2 & a_3u_3^2 - u_1^2a_1 - u_2^2a_2 + 1 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

şeklinde yazılabilir (Özdemir 2016).

İspat T, $\mathcal{B}$-ters simetrik matris olduğundan $T^t\Omega = -\Omega T$ eşitliği sağlanır. Ayrıca

$$(I + T)^t\Omega = \Omega(I - T)$$

ve

$$(I - T)^t\Omega = \Omega(I + T)$$

yazılabilir. Bu eşitlikler kullanılarak

$$(R^{\mathcal{B},\overrightarrow{\mathbf{u}}})^t\Omega(R^{\mathcal{B},\overrightarrow{\mathbf{u}}}) = ((I + T)(I - T)^{-1})^t\Omega(I + T)(I - T)^{-1} = \Omega$$

olduğu görülebilir. Böylece, $\det(I+T) = 1 + \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}$ ve $\det(I-T)^{-1} = \frac{1}{1+\left\|\overrightarrow{u}\right\|_{\mathcal{B}}}$ olduğundan, $\det(R^{\mathcal{B},\overrightarrow{\mathbf{u}}}) = 1$ bulunur. Yani, $R^{\mathcal{B},\overrightarrow{\mathbf{u}}}$ eliptik bir dönme matrisidir. (4.19) matrisi bazı sıkıcı hesaplamalardan sonra elde edilebilir. □

Sonuç 4.94. *(4.19) matrisinin özdeğerleri* $\lambda_1 = \frac{1-\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2}{1+\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2} + \frac{2\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}{}^i}{1+\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2}{1+\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2} - \frac{2\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}{}^i}{1+\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2}$ *ve* $\lambda_3 = 1$ *dir. Ayrıca* 1*'e karşılık gelen özvektör, dönme ekseni olan* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$*'dur. (4.19) matrisi, bir vektörü,* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ *ekseni etrafında* $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$ *elipsoidi üzerinde*

$$\tan\theta = \frac{2\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}}{1-\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2} \tag{4.20}$$

olmak üzere eliptik açı θ *boyunca, eliptik olarak döndürür.*

Örnek 4.95. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ *elipsoidi üzerinde* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (2,3,1)$ *ekseni etrafında bir eliptik dönüşü temsil eden eliptik dönme matrisi, (4.19) matrisi kullanılarak*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matrise karşılık gelen eliptik dönüş açısının (4.20) formülünden $-\pi/3$ *olduğu bulunabilir.*

4.8.3. Eliptik householder dönüşümü

Householder dönüşümü 1958 yılında Alston Scott Householder tarafından tanıtıldı. Householder dönüşümü, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ nin sıfır olmayan bir vektör olduğu

$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}(x) = x - \frac{2\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t}{\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\overrightarrow{\mathbf{v}}}x$$

biçiminde doğrusal bir dönüşümdür. Bu dönüşüm, orijinden geçen ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ 'ye ortogonal olan bir düzlem veya hiperdüzlem hakkındaki bir yansımayı tanımlar. Dejenere olmayan bilineer veya sesquilinear formlara sahip uzaylardaki Householder dönüşümlerini Mackey vd. (2004) incelenmiştir. Her ortogonal dönüşüm, hiperdüzlemlere göre yansımaların bileşimidir. Bu, Cartan-Dieudonné teoremi olarak bilinir. Genelleştirilmiş skaler çarpım alanları için Cartan-Dieudonné teoreminin yapıcı bir kanıtı Uhlig (2001) ve Fuller

(2011) tarafından verilmiştir. Genelleştirilmiş reel skaler çarpım uzayları için Cartan-Dieudonné teoreminin alternatif bir kanıtı Rodríguez-Andrade vd. (2011) ve diğerleri tarafından verildi. Belirli bir ortogonal dönüşümün bir yansıması olarak çarpanlara ayrılmasını(faktörizasyonunu) hesaplamak için Clifford cebirlerini kullandılar.

Householder dönüşümleri simetrik matrislerin üçgenleştirilmesinde ve nümerik lineer cebirde QR ayrışmalarının gerçekleştirilmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır (Gallier 2011). Householder dönüşümü yirminci yüzyılın en iyi 10 algoritması arasında gösterilmektedir (Cipra 2000). Genelleştirilmiş Householder matrisleri, en basit genelleştirilmiş ortogonal matrislerdir. Genelleştirilmiş bir Householder veya $\mathcal{B}$-Householder matrisi, non-$\mathcal{B}$-izotropik vektör $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ için

$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}(x) = x - \frac{2\overrightarrow{\mathbf{v}}\mathbf{v}^t\Omega}{\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}}x$$

formuna sahiptir. $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ izotropik vektör ise $\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\mathbf{\Omega}\overrightarrow{\mathbf{v}} \neq 0$ eşitsizliğini sağlar (Fuller 2011; Rodríguez-Andrade vd. 2011).

$\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ reel eliptik iç çarpım uzayında eliptik bir dönme matrisi oluşturmak için Householder dönüşümünün eliptik versiyonu kullanılacaktır. $\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} = [h_{ij}]_{n\times n}$ bir Householder matrisi olsun. δ_{ij} kronecker deltası olmak üzere

$$h_{ij} = \delta_{ij} - \frac{2v_iv_j\Omega_{jj}}{\mathbf{v}^t\Omega\mathbf{v}}x$$

şeklindedir. $\mathcal{H}_{\mathbf{v}}$ Householder matrisi, bir $\mathcal{B}$-simetrik ve $\mathcal{B}$-ortogonal matristir. Bunları kanıtlamak için önce $\mathcal{H}^t_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}\Omega = \Omega\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}} = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}},\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|^2_{\mathcal{B}}$$

pozitif bir reel sayıdır. Gerçekten,

$$\mathcal{H}^t_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}\Omega = \left(I - \frac{2\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega}{\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}}\right)^t\Omega = \left(\Omega - \frac{2\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega}{\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}}\right) = \Omega\left(I - \frac{2\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega}{\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}}\right) = \Omega\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}$$

olduğundan $\mathcal{H}_{\mathbf{v}}$ bir $\mathcal{B}$-simetriktir. Ardından $\mathcal{H}^t_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}\Omega\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} = \Omega$ eşitliğinin sağlandığı görülebilir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}\Omega\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} &= \Omega\mathcal{H}^2_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} \quad (\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}\ \mathcal{B}\text{-simetrik}) \\
&= \Omega\left(I - \frac{2\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega}{\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}}\right)\left(I - \frac{2\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega}{\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}}\right) \\
&= \Omega\left(I - \frac{2\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega}{\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}} - \frac{2\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega}{\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}} + \frac{4\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\right)\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\mathbf{v}^t\Omega\right)}{\left(\mathbf{v}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)^2}\right) \\
&= \Omega.
\end{aligned}$$

Yani, $\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}$ $\mathcal{B}$-ortogonaldir. Yukarıdaki dönüşümleri kullanarak, eliptik yansıma matrisini $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$ elipsoidi için

$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}^2} \begin{bmatrix} \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}^2 - 2a_1v_1^2 & -2a_2v_1v_2 & -2a_3v_1v_3 \\ -2a_1v_2v_1 & \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}^2 - 2a_2v_2^2 & -2a_3v_2v_3 \\ -2a_1v_3v_2 & -2a_2v_3v_2 & \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}^2 - 2a_3v_3^2 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.96. *Householder dönüşümü, $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ uzayındaki bir vektörün uzunluğunu değiştirmez ve orijinden geçen $\mathcal{B}$-ortogonal $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörü boyunca bir düzlem etrafında bir eliptik yansıma tanımlar. (4.21) matrisini kullanarak, herhangi bir elipsoid üzerindeki eliptik yansımalar ifade edilebilir.*

Örnek 4.97. *$2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ elipsoidi üzerindeki bir noktayı orijinden geçen ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1, 2, 3)$ vektörüne $\mathcal{B}$-ortogonal olan düzlem etrafında eliptik olarak yansıtan eliptik yansıma matrisi aşağıdaki gibi bulunur. Eliptik iç çarpımı*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

biçiminde tanımlıdır. Böylece

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}^2 = 2.1^2 + 2.2^2 + 1.3^2 = 19$$

ve

$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 15/19 & -8/19 & -6/19 \\ -8/19 & 3/19 & -12/19 \\ -12/19 & -24/19 & 1/19 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matrisin determinantı -1 dir ve $\mathcal{H}^t_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}\Omega\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} = \Omega$ eşitliği geçerlidir. $A(1/2, 1/2, 0)$ 'nın yansıması $B(7/38, -5/38, -18/19)$ olarak bulunur. Kontrol edilirse : $[AB]$ nin orta noktası $C(13/38, 7/38, -9/19)$ dur. $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x, y, z)$ olmak üzere düzlem denklemi $\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) = 0$ eşitliğinden $2x + 4y + 3z = 0$ olarak bulunur. Bu yüzden C noktası bu düzlemde yatar. Ayrıca, $\overrightarrow{AB}$ nin uzaya $\mathcal{B}$-ortogonal olduğu kolayca görülebilir.

Sonuç 4.98. *$\mathcal{B}$ iç çarpımı ile ilişkili n boyutlu elipsoid için, $\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}$ eliptik yansıma matrisi*

$$\mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|^2_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|^2_{\mathcal{B}} - 2a_1v_1^2 & -2a_2v_1v_2 & -2a_3v_1v_3 & \cdots & -2a_nv_1v_n \\ -2a_1v_2v_1 & \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|^2_{\mathcal{B}} - 2a_2v_2^2 & -2a_3v_2v_3 & \cdots & -2a_nv_2v_n \\ -2a_1v_3v_1 & -2a_2v_3v_2 & \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|^2_{\mathcal{B}} - 2a_3v_3^2 & \cdots & -2a_nv_3v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2a_1v_nv_1 & -2a_2v_nv_2 & -2a_3v_nv_3 & \cdots & \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|^2_{\mathcal{B}} - 2a_nv_n^2 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada $\overrightarrow{\mathbf{v}}^t = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dir.

Aşağıdaki teoremleri kullanarak, aynı uzunluktaki herhangi iki vektör $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ için, sırasıyla $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünü $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörüne ve $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünü $-\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörüne yansıtan eliptik Householder dönüşümleri, $\mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{\mathbf{x}-\mathbf{y}}$ ile $\mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}$ 'yi belirlenebilir. Bu iki dönüşümün bileşimi bize eliptik olarak $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünü $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörüne döndüren eliptik dönme matrisini verir.

Teorem 4.99. *$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ vektörleri sıfırdan farklı ve $\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|_{\mathcal{B}} = \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|_{\mathcal{B}}$ olsun. Eğer $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}$ ise*

$$\mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{2\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega}{\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\,\overrightarrow{\mathbf{v}}}\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$$

eşitliği sağlanır (Özdemir 2016).

İspat Doğrudan hesaplama ile

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\,\overrightarrow{\mathbf{v}} = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}) = 2\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|^2_{\mathcal{B}} - 2\overrightarrow{\mathbf{y}}^t\Omega\,\overrightarrow{\mathbf{x}}$$

ve

$$2\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\,\overrightarrow{\mathbf{x}} = 2(\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}})(\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}})^t\Omega\,\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}})(\mathbf{2}\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|^2_{\mathcal{B}} - \mathbf{2}\overrightarrow{\mathbf{y}}^{\mathbf{t}}\mathbf{\Omega}\,\overrightarrow{\mathbf{x}})$$

bulunur. Bu eşitlikleri kullanarak

$$H^{\mathcal{B}}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{2\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega}{\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\,\overrightarrow{\mathbf{v}}}\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{(\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}})(2\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|^2_{\mathcal{B}} - 2\overrightarrow{\mathbf{y}}^{\mathbf{t}}\mathbf{\Omega}\,\overrightarrow{\mathbf{x}})}{2\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|^2_{\mathcal{B}} - 2\overrightarrow{\mathbf{y}}^t\Omega\,\overrightarrow{\mathbf{x}}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$$

elde edilir. □

Teorem 4.100. *$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ vektörleri sıfırdan farklı ve $\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|_{\mathcal{B}} = \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|_{\mathcal{B}}$ olsun. Eğer $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}$ ise*

$$\mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = -\overrightarrow{\mathbf{y}}$$

eşitliği sağlanır (Özdemir 2016).

İspat Doğrudan hesaplama ile

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}=\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}})=2\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|_{\mathcal{B}}^2+2\overrightarrow{\mathbf{y}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{x}}$$

ve

$$2\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{x}}=2(\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}})(\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}})^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{x}}=(\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}})(2\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|_{\mathcal{B}}^2+2\overrightarrow{\mathbf{y}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{x}})$$

bulunur. Böylece

$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}^{\mathcal{B}}(\overrightarrow{\mathbf{x}})=\overrightarrow{\mathbf{x}}-(\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}})=-\overrightarrow{\mathbf{y}}$$

olur. Ayrıca

$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{y}}}^{\mathcal{B}}(-\overrightarrow{\mathbf{y}})=\overrightarrow{\mathbf{y}}$$

eşitliği yardımıyla

$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{y}}}^{\mathcal{B}}(-\overrightarrow{\mathbf{y}})=-\overrightarrow{\mathbf{y}}+\frac{2\overrightarrow{\mathbf{y}}\,\overrightarrow{\mathbf{y}}^t\Omega}{\overrightarrow{\mathbf{y}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{y}}}\overrightarrow{\mathbf{y}}=-\overrightarrow{\mathbf{y}}+\frac{2\overrightarrow{\mathbf{y}}(\overrightarrow{\mathbf{y}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{y}})}{\overrightarrow{\mathbf{y}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{y}}}=\overrightarrow{\mathbf{y}}$$

elde edilir. Bu

$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{y}}}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}}^{\mathcal{B}}(\overrightarrow{\mathbf{x}})=\overrightarrow{\mathbf{y}}$$

anlamına gelir. Böylece, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünü $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörü üzerine eliptik olarak döndüren, eliptik dönme matrisini

$$R_{\mathcal{B}}=\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{y}}}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}}^{\mathcal{B}}$$

olarak elde edilir. Dönme ekseni $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörüdür ve eliptik dönme açısı eliptik iç çarpım kullanılarak bulunabilir. □

Örnek 4.101. $2x^2+2y^2+z^2=1$ *elipsoidi üzerindeki* $\overrightarrow{\mathbf{x}}=(0,0,1)$ *vektörünü* $\overrightarrow{\mathbf{y}}=(2/5,2/5,3/5)$ *vektörüne döndüren, eliptik dönme matrisi aşağıdaki gibi bulunabilir. (4.21) matrisini kullanarak*

$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&-1&-2\\-1&4&-2\\-4&-4&-3\end{bmatrix}$$

ve

$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{y}}}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}9&-16&-12\\-16&9&-12\\-24&-24&7\end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece dönme matrisi $R(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\det R = 1$, $R^t \Omega R = \Omega$ *ve bunu karşılayan*

$$R = \mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{y}}} \mathcal{H}_{\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisidir ve burada $\Omega = diag(2, 2, 1)$ *olduğu hesaplanabilir.*

4.8.4. Eliptik kuaterniyonlar

Kuaterniyonlar 1843 yılında Sir William R. Hamilton tarafından keşfedilmiş ve kuaterniyonlar teorisi yirminci yüzyılın başlarında dönmeler gibi uygulamaları içerecek şekilde genişletilmiştir. Kuaterniyonların en önemli özelliği, her birim kuaterniyonun bir dönüşü temsil etmesidir ve bu 3 boyutlu vektör uzaylarındaki dönmelerin çalışılmasında önemli bir rol oynar. Birim kuaterniyonları kullanmak, dönmeleri algılamanın yararlı, doğal ve zarif bir yoludur. Kuaterniyonlar özellikle bilgisayar grafikleri, animasyon ve kinematikte kullanılır.

$\mathbb{H}$ kuaterniyon cebiri $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$ eşitliklerini sağlayan $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ baz elemanlarına sahip, birleşmeli, değişmeli olmayan bir bölme halkasıdır. Herhangi bir q kuaterniyonu $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ veya $q = S_q + \mathbf{V}_q$ olarak ifade edilebilir. Burada $S_q = q_0$ ve $\mathbf{V}_q = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ sembolleri sırasıyla q nun skaler ve vektör kısımlarını gösterir. Eğer $S_q = 0$ ise q 'ya pür kuaterniyon denir. q nun eşleniği $\overline{q}$ ile gösterilir ve $\overline{q} = S_q - \mathbf{V}_q$ olarak tanımlanır. $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ kuaterniyonunun normu $\sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{\overline{q}q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ ile tanımlanır ve N_q ile gösterilir. Eğer $q \neq 0$ ise $q_0 = q/N_q$ ya birim kuaterniyon denir. Birim kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{H}_1$ ile gösterilir. Her birim kuaterniyon $q_0 = \cos\theta + \varepsilon_0 \sin\theta$ biçiminde yazılabilir. Burada ε_0, $\varepsilon_0^2 = -1$ eşitliğini sağlayan bir birim vektördür. Buna kuaterniyon ekseni denir (Schmidt ve Nieman 2001; Vicci 2001; Weiner ve Wilkens 2005).

q ve r kuaterniyonları verilsin. O halde, $R_q(r) = qrq^{-1}$ ile tanımlanan doğrusal dönüşüm $R_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, r ile aynı norma ve skalere sahip bir kuaterniyondur. r kuaterniyonun skaler kısmı R_q altında değişmediği için sadece vektör kısmı $\mathbf{V}_r$ nin R_q dönüşümü altında nasıl değiştiğini inceleyeceğiz. $q\mathbf{V}_r q^{-1}$ kuaterniyon çarpımı kullanılarak 3 boyutlu Öklid uzayında bir vektörün dönme hareketi yorumlanabilir.

q bir birim kuaterniyon ise, doğrusal dönüşüm $R_q(\mathbf{V}_r) = q\mathbf{V}_r q^{-1}$ kullanılarak, karşılık gelen dönme matrisi,

$$R_q = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 & -2q_0q_3+2q_1q_2 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 2q_1q_2+2q_3q_0 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2q_2q_3-2q_1q_0 \\ 2q_1q_3-2q_2q_0 & 2q_1q_0+2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunabilir. Bu dönme matrisi, $\varepsilon = (q_1, q_2, q_3)$ ekseni etrafında 2θ açısı boyunca bir dönüşü temsil eder. Lorentz uzayında q timelike kuaterniyonuna karşılık gelen dönme matrisi

$$R_q = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 & 2q_1q_0-2q_2q_3 & -2q_1q_3-2q_2q_0 \\ 2q_2q_3+2q_0q_1 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 & -2q_3q_0-2q_2q_1 \\ 2q_2q_0-2q_3q_1 & 2q_2q_1-2q_3q_0 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 \end{bmatrix}$$

dur. Birim timelike kuaterniyon kümesi $q\overline{q} = 1$, $\mathbf{i}^2 = -1$, $\mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = \mathbf{1}$ özelliklerini sağlar.

Eliptik kuaterniyonlar Eliptik bir dönme matrisi elde etmek için önce $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$ elipsoidine uygun eliptik kuaterniyonlar kümesini tanımlanacaktır. $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ ve $\Delta = \sqrt{a_1a_2a_3}$ olmak üzere $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$

$$\mathbf{i}^2 = -a_1,\ \mathbf{j}^2 = -a_2,\ \mathbf{k}^2 = -a_3$$

ve

$$\mathbf{ij} = \frac{\Delta}{a_3}\mathbf{k} = -\mathbf{ji},\ \mathbf{jk} = \frac{\Delta}{a_1}\mathbf{i} = -\mathbf{kj},\ \mathbf{ki} = \frac{\Delta}{a_2}\mathbf{j} = -\mathbf{ik}$$

eşitliklerini sağlansın. Eliptik kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$ ile gösterilecektir. Bu küme, temel elemanlarımız $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ile birleşmeli, değişmeli olmayan bir bölme halkasıdır. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1$ alınırsa, standart kuaterniyon cebirini elde edilir. Eliptik kuaterniyon çarpım tablosu aşağıda verilmiştir.

	1	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
1	1	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-a_1$	$\Delta\mathbf{k}/a_3$	$-\Delta\mathbf{j}/a_2$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\Delta\mathbf{k}/a_3$	$-a_2$	$\Delta\mathbf{i}/a_2$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\Delta\mathbf{j}/a_2$	$-\Delta\mathbf{i}/a_2$	$-a_3$

Eliptik kuaterniyon çarpımı, $p = p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3$ ve $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ kuaterniyonları için

$$pq = p_0q_0 - \mathcal{B}(\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_q) + p_0\mathbf{V}_q + q_0\mathbf{V}_p + \mathbf{V}_p \times_{\mathcal{B}} \mathbf{V}_q$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathcal{B}(\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_q)$ ve $\mathbf{V}_p \times_{\mathcal{B}} \mathbf{V}_q$ sırasıyla eliptik iç çarpım ve eliptik vektörel çarpımdır. Eğer p ve q pür kuaterniyon ise

$$\begin{aligned} pq &= -\mathcal{B}(\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_q) + \mathbf{V}_p \times_{\mathcal{B}} \mathbf{V}_q \\ &= -(a_1p_1q_1 + a_2p_2q_2 + a_3p_3q_3) + \Delta \begin{vmatrix} \mathbf{i}/a_1 & \mathbf{j}/a_2 & \mathbf{k}/a_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında kuaterniyon çarpımı

$$pq = \begin{bmatrix} p_0 & -a_1p_1 & -a_2p_2 & -a_3p_3 \\ p_1 & p_0 & -\frac{p_3\Delta}{a_1} & \frac{p_2\Delta}{a_1} \\ p_2 & \frac{p_3\Delta}{a_2} & p_0 & -\frac{p_1\Delta}{a_3} \\ p_3 & -\frac{p_2\Delta}{a_3} & \frac{p_1\Delta}{a_3} & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir. Örneğin $p, q \in \mathbb{H}_{2,2,1}$ için eliptik kuaterniyon çarpımı

$$pq = \begin{bmatrix} p_0 & -2p_1 & -2p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -2p_1 \\ p_3 & -2p_2 & 2p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. $p = 1+2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ ve $q = 2+4\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ için $pq = (-32, 13, 17, -9)$ elde edilir. Bu işlem

	1	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
1	1	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	-2	$2\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-2\mathbf{k}$	-2	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-i$	-1

çarpım tablosu kullanılarak da hesaplanabilir. $\mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$ uzayının bir Clifford Cebiri olduğu Özdemir (2016) tarafından gösterilmiştir. Böylece, herhangi bir eliptik iç çarpım uzayı

için bir eliptik kuaterniyon cebiri oluşturulabilir. Bir eliptik kuaterniyon $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ 'nun eşleniği, normu ve tersi normal kuaterniyonlara benzer şekilde tanımlanabilir:

$$\overline{q} = q_0 - \mathbf{i}q_1 - \mathbf{j}q_2 - \mathbf{k}q_3,\ N_q = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{\overline{q}q} = \sqrt{q_0^2 + a_1q_1^2 + a_2q_2^2 + a_3q_3^2},\ q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N_q}.$$

Ayrıca her $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ eliptik kuaterniyonu

$$\cos\theta = \frac{q_0}{N_q} \text{ ve } \sin\theta = \frac{\sqrt{a_1q_1^2 + a_2q_2^2 + a_3q_3^2}}{N_q}$$

olmak üzere

$$q = N_q(\cos\theta + \epsilon_0 \sin\theta)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\epsilon_0 = \frac{(q_1,q_2,q_3)}{\sqrt{a_1q_1^2+a_2q_2^2+a_3q_3^2}}$, $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında $\epsilon_0^2 = -1$ eşitliğini sağlayan bir birim vektördür. ϵ_0, dönme ekseni olarak adlandırılır. Örneğin, $q = 1 + 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k} \in \mathbb{H}_{2,2,1}$ ise, o zaman $N_q = \sqrt{1^2 + 2.2^2 + 2.1^2 1.5^2}$ ve

$$q = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{35}}{6}\frac{(2,1,5)}{\sqrt{35}} = \cos\theta + \frac{(2,1,5)}{\sqrt{35}}\sin\theta$$

yazılabilir. Burada $\epsilon_0 = \frac{(2,1,5)}{\sqrt{35}}$, $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında $\epsilon_0^2 = -1$ olan bir birim vektördür.

Teorem 4.102. *Her birim eliptik kuaterniyon, bir elipsoid üzerinde eliptik bir dönüşü temsil eder. Eğer*

$$q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 = \cos\theta + \epsilon_0 \sin\theta \in \mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$$

bir birim eliptik kuaterniyon ise $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *olmak üzere,* $R_\theta(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^{-1}$ *doğrusal dönüşümü* 2θ *eliptik açısı boyunca,* ϵ_0 *ekseni etrafında eliptik bir dönüş verir.* $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2 = 1$ *elipsoidi için* q *kuaterniyonuna karşılık gelen eliptik dönme matrisi,*

$$R_\theta^q = \begin{bmatrix} q_0^2 + a_1q_1^2 - a_2q_2^2 - a_3q_3^2 & 2a_2q_1q_2 - 2\frac{q_0q_3\Delta}{a_1} & 2a_3q_1q_3 + 2\frac{q_0q_2\Delta}{a_1} \\ 2a_1q_1q_2 + 2\frac{q_0q_3\Delta}{a_2} & q_0^2 - a_1q_1^2 + a_2q_2^2 - a_3q_3^2 & 2a_3q_2q_3 - 2\frac{q_0q_1\Delta}{a_2} \\ 2a_1q_1q_3 - 2\frac{q_0q_2\Delta}{a_3} & 2a_2q_2q_3 + 2\frac{q_0q_1\Delta}{a_3} & q_0^2 - a_1q_1^2 - a_2q_2^2 + a_3q_3^2 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

dir (Özdemir 2016).

İspat R_θ^q dönüşümünün, doğrusal bir dönüşüm olduğu ve normu koruduğu görülebilir.

$$R_\theta^q(\mathbf{i}) = (a_1q_1^2q_0^2 - q_2^2a_2 - q_3^2a_3)\mathbf{i} + 2(a_1q_1q_2 + q_0q_3\sqrt{\frac{a_1a_3}{a_2}})\mathbf{j} + 2(q_1q_3a_1 - q_0q_2\sqrt{\frac{a_1a_2}{a_3}})\mathbf{k}$$

$$R_\theta^q(\mathbf{j}) = 2(a_2q_1q_2 - q_0q_3\sqrt{\frac{a_2a_3}{a_1}})\mathbf{i}+(a_2q_2^2+q_0^2-q_1^2a_1-q_3^2a_3)\mathbf{j}+2(a_2q_2q_3+q_0q_1\sqrt{\frac{a_1a_2}{a_3}})\mathbf{k}$$

$$R_\theta^q(\mathbf{k}) = 2(a_3q_1q_3+q_0q_2\sqrt{\frac{a_2a_3}{a_1}})\mathbf{i}+2(a_3q_2q_3-q_0q_1\sqrt{\frac{a_1a_3}{a_2}})\mathbf{j}+(a_3q_3^2+q_0^2-q_1^2a_1-q_2^2a_2)\mathbf{k}$$

eşitlikleri kullanılarak (4.22) elde edilir. Dolayısıyla, dönme matrisi (4.22), $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2=1$ elipsoidi üzerindeki eliptik bir dönme matrisidir. Yani, $\det R_\theta^q = 1$ ve $(R_\theta^q)^t\Omega R_\theta^q = \Omega$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca, $a_1=1, a_2=1, a_3=1$ alınırsa standart dönme matrisi elde edilir. Şimdi,

$$\epsilon_0 \times_{\mathcal{B}} \epsilon_1=\epsilon_2,\ \epsilon_2 \times_{\mathcal{B}} \epsilon_0=\epsilon_1,\ \epsilon_1 \times_{\mathcal{B}} \epsilon_2=\epsilon_0$$

eşitliklerini sağlayan bir ortonormal $\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$ kümesi seçelim. Eğer ϵ, ϵ_0 ve ϵ_1 düzleminde bir vektörse, onu

$$\epsilon = \cos\alpha\epsilon_0 + \sin\alpha\epsilon_1$$

olarak yazılabilir. $R_\theta^q(\epsilon) = q\epsilon q^{-1}$ vektörünü hesaplamak için, R_θ^q dönüşümü altında ϵ_0 ve ϵ_1 in nasıl değiştiği hesaplanmalıdır. $\mathbf{V}_q$, ϵ_0 'a paralel olduğundan, (3.5) denklemi vasıtasıyla $q\epsilon_0 = \epsilon_0 q$ ve $R_q(\epsilon_0) = q\epsilon_0 q^{-1} = \epsilon_0 q q^{-1} = \epsilon_0$ elde edilir. Dolayısıyla, R_θ^q dönüşümü altında ϵ_0 değişmez. Bu, ϵ_0 ın dönme ekseni olduğu anlamına gelir. Öte yandan,

$$\begin{aligned} R_q(\epsilon_1) &= q\epsilon_1 q^{-1} \\ &= (\cos\theta+\epsilon_0\sin\theta)\epsilon_1(\cos\theta-\epsilon_0\sin\theta) \\ &= \epsilon_1\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta(\epsilon_1\epsilon_0) + \cos\theta\sin\theta(\epsilon_0\epsilon_1) - (\epsilon_0\epsilon_1)\epsilon_0\sin^2\theta \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Ortogonal, pür kuaterniyonlar için

$$\epsilon_1\epsilon_0 = \epsilon_1 \times_{\mathcal{B}} \epsilon_0 = -\epsilon_0 \times_{\mathcal{B}} \epsilon_1 = -\epsilon_0\epsilon_1 = -\epsilon_2$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} R_q(\epsilon_1) &= \epsilon_1\cos^2\theta + (\epsilon_1\epsilon_0)\epsilon_0\sin^2\theta + 2\epsilon_2\cos\theta\sin\theta \\ &= \epsilon_1\cos^2\theta + \epsilon_1\epsilon_0^2\sin^2\theta + 2\epsilon_2\cos\theta\sin\theta \\ &= \epsilon_1\cos 2\theta + \epsilon_2\sin 2\theta \end{aligned}$$

bulunur. Yani, ϵ, $R_q(\epsilon)$ dönüşümü ile ϵ_0 civarında 2θ eliptik açısı boyunca döndürülür. □

Sonuç 4.103. *Bir elipsoid üzerindeki tüm eliptik dönmeler, o elipsoid için tanımlanan eliptik kuaterniyonlarla temsil edilebilir. Matris (4.22)* $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *iç çarpım uzayında bir dönme matrisidir ve* $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2=\lambda, \lambda\in\mathbb{R}^+$ *üzerinde bir elips boyunca dönüşleri gösterir. Burada* $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2=1$ *elipsoidinin* $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *iç çarpım uzayının birim küresi olduğuna dikkat ediniz. Böylece,* R^q_θ *bir vektörü,* $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2=1$ *elipsoidi üzerinde veya bu elipsoide benzer bir elipsoid üzerinde eliptik olarak döndürür. Ayrıca,* R^q_θ *matrisi eliptik iç çarpım ve eliptik vektör çarpımına bağlıdır ve* $q\in\mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$ *olduğunda,* $R^q_\theta\in\mathbf{SO}_{\mathcal{B}}(n)$ *veya* $R^q_\theta\in\mathbf{SO}_{a_1,a_2,a_3}(n)$ *olarak yazılabilir. Her zaman uygun eliptik kuaterniyon kümesi ve önceden belirlenmiş bir elipsoide karşılık gelen iç çarpımı kullanılmalıdır.*

Örnek 4.104. $2x^2+2y^2+z^2=1$ *elipsoidi için genel eliptik dönme matrisi, (4.22) eşitliği kullanılarak,*

$$R^q_\theta=\begin{bmatrix} q_0^2+2q_1^2-2q_2^2-q_3^2 & 4q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_1q_3+2q_0q_2\\ 4q_1q_2+2q_0q_3 & q_0^2-2q_1^2+2q_2^2-q_3^2 & 2q_2q_3-2q_0q_1\\ 4q_1q_3-4q_0q_2 & 2a_2q_2q_3+4q_0q_1 & q_0^2-a_1q_1^2-a_2q_2^2+q_3^2\end{bmatrix}$$

bulunabilir. $\Omega=diag(2,2,1)$ *olmak üzere,* $\det R_\theta=q_0^2+2q_1^2+2q_2^2+q_3^2=1$ *dir. Örneğin, kuaterniyon* $q=(0,1/2,1/2,0)$*,* $2x^2+2y^2+z^2=1$ *elipsoidi üzerindeki* π *eliptik açısı boyunca,* $(1/2,1/2,0)$ *ekseni etrafında eliptik bir dönüşü temsil eder. Böylece eliptik dönme matrisi*

$$R^q_\pi=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. p *ve* q *aynı türden iki birim eliptik kuaterniyon olsun. Bu durumda* $R^p_{\theta_1}$ *ve* $R^q_{\theta_2}$*matrisleri,* $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *eliptik iç çarpım uzayında eliptik dönme matrisleridir. Yani* $R^p_{\theta_1}$ *ve* $R^q_{\theta_2}$ *matrisleri bir vektörü,* $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2=1$ *elipsoidi üzerinde eliptik olarak döndürür. Bu dönüşlerin bileşimi,* qp *eliptik kuaterniyon çarpımı ile ifade edilebilir. Bileşik dönmenin ekseni ve eliptik açısı* qp *çarpımı tarafından verilir.* $R^p_{\theta_1}(\overrightarrow{\mathbf{u}})=\overrightarrow{\mathbf{v}}$ *ve* $R^q_{\theta_2}(\overrightarrow{\mathbf{v}})=\overrightarrow{\mathbf{w}}$ *olsun. Buradan*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{w}} &= R^q_{\theta_2}(\overrightarrow{\mathbf{v}})=R^q_{\theta_2}(R^p_{\theta_1}(\overrightarrow{\mathbf{u}}))=qR^p_{\theta_1}(\overrightarrow{\mathbf{u}})q^{-1}\\ &= qp\overrightarrow{\mathbf{u}}p^{-1}q^{-1}=(qp)\overrightarrow{\mathbf{u}}(qp)^{-1}=R^{qp}_{\theta_3}(\overrightarrow{\mathbf{u}})\end{aligned}$$

dır. Bu,

$$R^q_{\theta_2} R^p_{\theta_1} = R^{qp}_{\theta_3}$$

olduğu anlamına gelir. Örnek olarak, birim eliptik kuaterniyonlar $q = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ *ve* $p = (\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6})$ *olarak seçilsin. Yani* $p, q \in \mathbb{H}_{2,2,1}$ *dir. İç ve vektör çarpımları sırasıyla*

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = a_1 x_1 x_2 + a_2 y_1 y_2 + a_3 z_1 z_2$$

ve

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{y}} = (\frac{\Delta}{a_1}(y_1 z_2 - y_2 z_1), \frac{\Delta}{a_2}(-x_1 z_2 + x_2 z_1), \frac{\Delta}{a_3}(x_1 y_2 - x_2 y_1))$$

dir. Burada $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (x_2, y_2, z_2)$ *dir.* $p = p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3$ *ve* $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ *kuaterniyonlarının, eliptik kuaterniyon çarpımı*

$$pq = p_0 q_0 - \mathcal{B}(\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_q) + p_0 \mathbf{V}_q + q_0 \mathbf{V}_p + \mathbf{V}_p \times_{\mathcal{B}} \mathbf{V}_q$$

olarak tanımlanır. Böylece qp*,*

$$qp = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}) \in \mathbb{H}_{2,2,1}$$

olarak bulunabilir. (4.22)'ü kullanarak

$$R^q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R^p = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/18 & 11/18 \\ 1/2 & -5/6 & 1/6 \\ 1 & 7/9 & 4/9 \end{bmatrix}$$

ve

$$R^{qp} = \begin{bmatrix} 1/2 & -5/6 & 1/6 \\ -1/2 & -1/18 & 11/18 \\ -1 & -7/9 & -4/9 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $R^q R^p = R^{qp}$ *matris eşitliğinin sağlandığı görülebilir.*

Sonuç 4.105. p *ve* q*, farklı türden iki birim eliptik kuaterniyon, yani* $p \in \mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$ *ve* $q \in \mathbb{H}_{b_1,b_2,b_3}$ *ise, karşılık gelen dönmelerin bileşimi, eliptik kuaterniyon çarpımı ile ifade*

edilemez. Çünkü her kuaterniyon için iç çarpım uzayı farklıdır dolayısıyla eliptik kuaterniyon çarpımı da farklıdır. $R^p_{\theta_1}$ *ve* $R^q_{\theta_2}$ *matrisleri sırasıyla,* $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$ *ve* $b_1x^2 + b_2y^2 + b_3z^2 = 1$ *elipsoidleri üzerindeki bir dönmeyi temsil eder ve iki farklı elipsoid üzerindeki eliptik dönmelerin bileşimi, farklı türden iki eliptik kuaterniyonun eliptik kuaterniyon çarpımı ile ifade edilemez.*

5. SONUÇLAR

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ uzayında bir $\varepsilon : a_1x_1^2 + a_1x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 1$ elipsoidini küre olarak kabul eden iç çarpım,

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = a_1u_1v_1 + a_2u_2v_2 + \cdots + a_nu_nv_n$$

şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpıma eliptik iç çarpım, eliptik iç çarpımla birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına eliptik iç çarpım uzayı veya kısaca eliptik uzay denir ve $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ ile gösterilir.

Bu tez çalışmasında aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır. Δ ile iç çarpım sabiti gösterilmektedir.

1. $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ ile oluşturulan paralelkenarın alanı

$$Alan(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})_{\mathcal{B}} = \sqrt{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}) - \mathcal{B}^2(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})}$$

ile bulunur.

2. Öklid düzleminde köşelerinin koordinatları bilinen üçgenin alanı

$$Alan(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

eşitliği ile belirlidir. Eliptik düzlemde ise köşelerinin koordinatları bilinen üçgenin alanı

$$Alan(ABC)_{\mathcal{B}} = \Delta\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

formülü ile bulunduğundan

$$Alan(ABC)_{\mathcal{B}} = \Delta.Alan(ABC)$$

eşitliği elde edilir. Yani eliptik düzlemde köşelerinin koordinatları bilinen üçgenin alanı, bu üçgenin Öklid düzlemindeki alanı ile Δ sabitinin çarpımına eşittir.

3. $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ sıfırdan farklı iki vektör olsun. $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörü üzerindeki eliptik dik izdüşüm vektörü

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathcal{B}izd} = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})}\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

eşitliğiyle bulunur ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathcal{B}izd}$ ile gösterilir.

4. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$ vektörleri için

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{w}} = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{w}})\overrightarrow{\mathbf{v}} - \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})\overrightarrow{\mathbf{u}}$$

eşitliği sağlanır.

5. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$ vektörleri için

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \Delta \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$$

eşitliği sağlanır.

6. Öklid uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörlerinin öklid karma çarpımı

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle = \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$$

eşitliği ile belirlidir. Eliptik uzayda ise $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörlerinin eliptik karma çarpımı

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \Delta \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$$

şeklinde bulunduğundan

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \Delta . \left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle$$

eşitliği elde edilir. Yani eliptik uzaydaki herhangi üç vektörün eliptik karma çarpımı, bu üç vektörün Öklid karma çarpımı ile Δ sabitinin çarpımına eşittir.

7. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörleri için

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{w}})$$

eşitliği sağlanır.

8. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında,

$$\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \begin{vmatrix} \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \\ \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) & \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \end{vmatrix}$$

eşitliği sağlanır. Bu ifadeye eliptik Lagrange özdeşliği denir.

9. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında verilen $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı $Alan_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$ olmak üzere

$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|_{\mathcal{B}} = \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|_{\mathcal{B}} \left\| \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|_{\mathcal{B}} \sin\theta_{\mathcal{B}} = Alan_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$$

eşitliği sağlanır.

10. Eliptik uzayda köşeleri A, B, C, D olan, $ABCD$ üçgensel piramidinin hacmi

$$V = Hacim(ABCD) = \frac{\Delta}{6} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$$

değerinin mutlak değeridir.

11. $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ uzayında bir $\mathbf{A}$ noktasının, $\mathbf{P}$ noktasından geçen ve doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olan doğruya uzaklığı

$$l = \frac{\sqrt{\|\overrightarrow{\mathbf{AP}}\|^2_{\mathcal{B}} \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|^2_{\mathcal{B}} - \mathcal{B}^2(\overrightarrow{\mathbf{AP}}, \overrightarrow{\mathbf{u}})}}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|_{\mathcal{B}}}$$

formülü ile bulunur.

12. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında bir $\mathbf{A}$ noktasının, $\mathbf{P}$ noktasından geçen ve doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olan doğruya uzaklığı

$$l = \frac{\|\overrightarrow{\mathbf{AP}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{B}}}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|_{\mathcal{B}}}$$

eşitliğiyle belirlidir.

13. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında, $\mathbf{P}$ noktasından geçen ve doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olan doğru ile, $\mathbf{Q}$ noktasından geçen ve doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ olan doğru arasındaki en kısa uzaklık

$$l = \frac{\left| \det(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{PQ}}) \right|}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|_{\mathcal{B}}}$$

ile bulunur.

14. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında, $\mathbf{P}$ noktasından geçen, doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olan ve $\mathbf{Q}$ noktasından geçen, doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ olan doğruların birbirlerine en yakın oldukları noktaların koordinatları

$$k_1 = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}})}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}}} \text{ ve } k_2 = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}})}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \times_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|^2_{\mathcal{B}}}$$

olmak üzere, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{M}} &= \overrightarrow{\mathbf{P}} - k_1 \overrightarrow{\mathbf{u}} \\ \overrightarrow{\mathbf{N}} &= \overrightarrow{\mathbf{Q}} + k_2 \overrightarrow{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

ile bulunur.

15. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında, $\omega_1 : a_1A_1x + a_2A_2y + a_3A_3z + D_1 = 0$ ve $\omega_2 : a_1B_1z + a_2B_2y + a_3B_3z + D_2 = 0$ düzlemlerinin normalleri sırasıyla $\overrightarrow{\mathbf{N}}_1$ ve $\overrightarrow{\mathbf{N}}_2$ olmak üzere

$$\cos\theta_{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}_1, \overrightarrow{\mathbf{N}}_2)}{\|\overrightarrow{\mathbf{N}}_1\|_{\mathcal{B}} \|\overrightarrow{\mathbf{N}}_2\|_{\mathcal{B}}}$$

değeri, ω_1 ve ω_2 düzlemleri arasındaki açıyı verir. Bu değer pozitif ise, düzlemler arasındaki dar açının kosinüsü; negatif ise, düzlemler arasındaki geniş açının sinüsü bulunmuş olur.

16. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında, $d : \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ doğrusu ile $\omega : a_1Ax + a_2By + a_3Cz + D = 0$ düzlemi verilsin. Doğru ile düzlemin arasındaki açı $\theta_{\mathcal{B}}$ ise, doğrunun doğrultmanı $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ile düzlemin normali $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ arasındaki açı $90^\circ - \theta_{\mathcal{B}}$ olacaktır. Buna göre,

$$\cos(90^\circ - \theta_{\mathcal{B}}) = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{N}})}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|_{\mathcal{B}} \|\overrightarrow{\mathbf{N}}\|_{\mathcal{B}}} \text{ veya } \sin\theta_{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{N}})}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|_{\mathcal{B}} \|\overrightarrow{\mathbf{N}}\|_{\mathcal{B}}}$$

eşitlikleri, istenen açıyı verir.

17. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında verilen bir $\mathbf{P}$ noktasının, normali $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ olan bir düzleme uzaklığı; $\mathbf{S}$ düzlem üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere

$$l = \frac{\left| \mathcal{B}(\overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{SP}}) \right|}{\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\|_{\mathcal{B}}}$$

formülüyle bulunur.

18. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında verilen bir $\mathbf{P}(x_0,y_0,z_0)$ noktasının $Ax+By+Cz+D=0$ düzlemine uzaklığı

$$\ell = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\Delta^2\sqrt{(Aa_2a_3)^2+(Ba_1a_3)^2+(Ca_1a_2)^2}}$$

ile bulunur.

19. $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında, ω_1: $Ax+By+Cz+D_1=0$ ve ω_2: $Ax+By+Cz+D_2=0$ paralel düzlemleri arasındaki uzaklık

$$\ell = \frac{|D_2-D_1|}{\Delta^2\sqrt{(Aa_2a_3)^2+(Ba_1a_3)^2+(Ca_1a_2)^2}}$$

formülü ile bulunur.

20. T bir $\mathcal{B}$-ters simetrik matris olsun. O zaman

$$R_\theta^{\mathcal{B}} = e^{T\theta} = I+(\sin\theta)T+(1-\cos\theta)T^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}}\sin\theta \\ \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}}\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

üstel matrisi, $a_1x^2+a_2y^2=\lambda$, $\lambda,a_1,a_2\in\mathbb{R}^+$ elipsi boyunca, eliptik bir dönüş sağlar. Yani $R_\theta^{\mathcal{B}}$ matrisi $\mathbb{R}^2_{a_1,a_2}$ uzayında eliptik bir dönme matrisidir.

21. $\overrightarrow{\mathbf{u}}=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ bir birim vektör ve (4.16) biçiminde bir ters simetrik matris T olsun.$R_\theta^{\mathcal{B},\overrightarrow{\mathbf{u}}} = e^{T\theta} = I+(\sin\theta)T+(1-\cos\theta)T^2$ üstel matrisi, $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2=1$, $a_i\in\mathbb{R}^+$ elipsoidi üzerinde eliptik bir dönüş verir. Ayrıca, $R_\theta^{\mathcal{B},\mathbf{u}}$ matrisi,

$$\begin{bmatrix} a_1u_1^2+(1-a_1u_1^2)c\theta & -\frac{\Delta u_3 s\theta}{a_1}-a_2u_1u_2(c\theta-1) & \frac{\Delta u_2 s\theta}{a_1}-a_3u_1u_3(c\theta-1) \\ \frac{\Delta u_3 s\theta}{a_2}-a_1u_1u_2(c\theta-1) & a_2u_2^2+(1-a_2u_2^2)c\theta & -\frac{\Delta u_1 s\theta}{a_2}-a_3u_2u_3(c\theta-1) \\ -\frac{\Delta u_2 s\theta}{a_3}-a_1u_1u_3(c\theta-1) & \frac{\Delta u_1 s\theta}{a_3}-a_2u_2u_3(c\theta-1) & a_3u_3^2+(1-a_3u_3^2)c\theta \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\overrightarrow{\mathbf{u}}=(u_1,u_2,u_3)$ dönüş ekseni ve θ eliptik dönüş açısıdır ($\cos\theta=c\theta$, $\sin\theta=s\theta$).

22. $\overrightarrow{\mathbf{u}}=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ ve (4.16) biçiminde bir ters simetrik matris T olsun.

$$R^{\mathcal{B},\overrightarrow{\mathbf{u}}} = (I+T)(I-T)^{-1}$$

matrisi, $\mathbf{u}$ vektörünün dönüş ekseni olduğu, $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$ elipsoidi üzerinde eliptik bir dönme matrisidir. Ayrıca $R^{\mathcal{B},\overrightarrow{\mathbf{u}}}$ matrisi

$$\frac{1}{1+\left\|\overrightarrow{u}\right\|_{\mathcal{B}}^2}\begin{bmatrix} a_1u_1^2 - u_2^2a_2 - u_3^2a_3{+}1 & a_2u_1u_2 - \frac{2\Delta u_3}{a_1}{+}u_1u_2a_2 & \frac{2\Delta u_2}{a_1}{+}a_3u_1u_3{+}u_1u_3a_3 \\ \frac{2\Delta u_3}{a_2} + a_1u_1u_2{+}u_1u_2a_1 & a_2u_2^2 - u_1^2a_1 - u_3^2a_3{+}1 & a_3u_2u_3 - \frac{2\Delta u_1}{a_2}{+}u_2u_3a_3 \\ a_1u_1u_3 - \frac{2\Delta u_2}{a_3}{+}u_1u_3a_1 & \frac{2\Delta u_1}{a_3} + a_2u_2u_3{+}u_2u_3a_2 & a_3u_3^2 - u_1^2a_1 - u_2^2a_2{+}1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

23. (4.19) matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = \frac{1-\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2}{1+\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2} + \frac{2\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}i}{1+\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2}{1+\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2} - \frac{2\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}i}{1+\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2}$ ve $\lambda_3 = 1$ dir. Ayrıca 1'e karşılık gelen özvektör, dönme ekseni olan $\overrightarrow{\mathbf{u}}$'dur. (4.19) matrisi, bir vektörü, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ ekseni etrafında $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$ elipsoidi üzerinde,

$$\tan\theta = \frac{2\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}}{1-\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|_{\mathcal{B}}^2}$$

olmak üzere eliptik açı θ boyunca, eliptik olarak döndürür.

24. Householder dönüşümü, $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ uzayındaki bir vektörün uzunluğunu değiştirmez ve orijinden geçen $\mathcal{B}$-ortogonal $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörü boyunca bir düzlem etrafında bir eliptik yansıma tanımlar. (4.21) matrisini kullanarak, herhangi bir elipsoid üzerindeki eliptik yansımalar ifade edilebilir.

25. Eliptik iç çarpımı ile ilişkili n boyutlu elipsoid için, $\mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}$ eliptik yansıma matrisi

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}^2}\begin{bmatrix} \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}^2 - 2a_1v_1^2 & -2a_2v_1v_2 & -2a_3v_1v_3 & \cdots & -2a_nv_1v_n \\ -2a_1v_2v_1 & \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}^2 - 2a_2v_2^2 & -2a_3v_2v_3 & \cdots & -2a_nv_2v_n \\ -2a_1v_3v_1 & -2a_2v_3v_2 & \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}^2 - 2a_3v_3^2 & \cdots & -2a_nv_3v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2a_1v_nv_1 & -2a_2v_nv_2 & -2a_3v_nv_3 & \cdots & \left\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\|_{\mathcal{B}}^2 - 2a_nv_n^2 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burda $\overrightarrow{\mathbf{v}}^t = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dir.

26. $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n_{\mathcal{B}}$ vektörleri sıfırdan farklı ve $\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|_{\mathcal{B}} = \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|_{\mathcal{B}}$ olsun. Eğer $\overrightarrow{\mathbf{v}}{=}\overrightarrow{\mathbf{x}}{-}\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ise

$$\mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{2\overrightarrow{\mathbf{v}}\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega}{\overrightarrow{\mathbf{v}}^t\Omega\overrightarrow{\mathbf{v}}}\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$$

eşitliği sağlanır.

27. $\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ vektörleri sıfırdan farklı ve $\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|_{\mathcal{B}} = \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|_{\mathcal{B}}$ olsun. Eğer $\overrightarrow{\mathbf{v}}=\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ise $\mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = -\overrightarrow{\mathbf{y}}$ eşitliği sağlanır.

28. Her birim eliptik kuaterniyon, bir elipsoid üzerinde eliptik bir dönüşü temsil eder. Eğer
$$q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 = \cos\theta + \epsilon_0 \sin\theta \in \mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$$
bir birim eliptik kuaterniyon ise $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere, $R_\theta(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^{-1}$ doğrusal dönüşümü 2θ eliptik açısı boyunca, ϵ_0 ekseni etrafında eliptik bir dönüş verir. $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2 = 1$ elipsoidi için q kuaterniyonuna karşılık gelen eliptik dönme matrisi,
$$\begin{bmatrix} q_0^2 + a_1q_1^2 - a_2q_2^2 - a_3q_3^2 & 2a_2q_1q_2 - 2\frac{q_0q_3\Delta}{a_1} & 2a_3q_1q_3 + 2\frac{q_0q_2\Delta}{a_1} \\ 2a_1q_1q_2 + 2\frac{q_0q_3\Delta}{a_2} & q_0^2 - a_1q_1^2 + a_2q_2^2 - a_3q_3^2 & 2a_3q_2q_3 - 2\frac{q_0q_1\Delta}{a_2} \\ 2a_1q_1q_3 - 2\frac{q_0q_2\Delta}{a_3} & 2a_2q_2q_3 + 2\frac{q_0q_1\Delta}{a_3} & q_0^2 - a_1q_1^2 - a_2q_2^2 + a_3q_3^2 \end{bmatrix}$$
ile bulunur.

29. Bir elipsoid üzerindeki tüm eliptik dönmeler, o elipsoid için tanımlanan eliptik kuaterniyonlarla temsil edilebilir. Matris (4.22) $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ iç çarpım uzayında bir dönme matrisidir ve $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+$ üzerinde bir elips boyunca dönüşleri gösterir. Burada $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$ elipsoidinin $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ iç çarpım uzayının birim küresi olduğuna dikkat ediniz. Böylece, R^q_θ bir vektörü, $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2 = 1$ elipsoidi üzerinde veya bu elipsoide benzer bir elipsoid üzerinde eliptik olarak döndürür. Ayrıca, R^q_θ matrisi eliptik iç çarpım ve eliptik vektör çarpımına bağlıdır ve $q \in \mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$ olduğunda, $R^q_\theta \in \mathbf{SO}_{\mathcal{B}}(n)$ veya $R^q_\theta \in \mathbf{SO}_{a_1,a_2,a_3}(n)$ olarak yazılabilir. Her zaman uygun eliptik kuaterniyon kümesi ve önceden belirlenmiş bir elipsoide karşılık gelen iç çarpımı kullanılır.

30. p ve q, farklı türden iki birim eliptik kuaterniyon, yani $p \in \mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$ ve $q \in \mathbb{H}_{b_1,b_2,b_3}$ ise, karşılık gelen dönmelerin bileşimi, eliptik kuaterniyon çarpımı ile ifade edilemez. Çünkü her kuaterniyon için iç çarpım uzayı farklıdır dolayısıyla eliptik kuaterniyon çarpımı da farklıdır. $R^p_{\theta_1}$ ve $R^q_{\theta_2}$ matrisleri sırasıyla, $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$ ve $b_1x^2 + b_2y^2 + b_3z^2 = 1$ elipsoidleri üzerindeki bir dönmeyi temsil eder ve iki farklı elipsoid üzerindeki eliptik dönmelerin bileşimi, farklı türden iki eliptik kuaterniyonun eliptik kuaterniyon çarpımı ile ifade edilemez.

6. KAYNAKLAR

Aragón-González, G., Aragón, J.L. and Rodríguez-Andrade, M.A. 2006. The decomposition of an orthogonal transformation as a product of reflections. *Journal of Mathematical Physics*, 47(53): 13509-102701.

Brackett, R.W. 1984. Robotic Manipulators And The Product Of Exponentials Formula. In: Mathematical Theory and Networks and Systems. Proceeding of International Symposium, pp. 120-127. Springer, Berlin.

Bükçü, B. 2006. On The Rotation Matrices In Semi-Euclidean Space. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 55(01): 7-13.

Cayley, A. 1889. Sur Quelques Proprietes des Determinants Gauches. The Collected Papers of Arthur Cayley SC.D.F.R.S. Cambridge University Press, Cambridge, 623 p.

Cipra, B.A. 2000. The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms. *SIAM News*, 33(4).

Eberly, D. 2007. Constructing Rotation Matrices Using Power Series. Geometric Tools LLC. http://geometrictools.com/ [Son erişim tarihi: 01.03.2022]

Erdoğdu, M. and Özdemir, M. Cayley Formula In Minkowski Space-Time. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 12(05), 1550058.

Fuller, C. 2011. A constructive proof of the Cartan–Dieudonné–Scherk Theorem in the real or complex case. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 215(5), 1116–1126.

Gallier, J.H. and Xu, D. 2000. Computing exponentials of skew symmetric matrices and logarithms of orthogonal matrices. *International Journal of Robotics and Automation*, 18(1):10-20.

Gallier, J.H. 2011. Geometric Methods And Applications. Springer, New York, 680 p.

Gallier, J.H. 2014. Notes on Differential Geometry and Lie Groups. University of Pennsylvania, Philadelphia, 730p.

Kula, L., Karacan, M. and Yaylı, Y. 2005. Formulas for the exponential of a semi skew-symmetric matrix of order 4. *Mathematical and Computational Applications*, 10(1), 99–104.

Mackey, D.S., Mackey, N. and Tisseur, F. 2004. G-reflectors: analogues of Householder transformations in scalar product spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, 385, 187–213.

Mebius, J.E. 2007. Derivation of Euler–Rodrigues formula for three-dimensional rotations from the general formula for four dimensional rotations. https://arxiv.org/abs/math/0701759 [Son erişim tarihi: 28.03.2022].

Murray, M.R., Li, Z. and Sastry, S.S. 1994. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. CRC Press, Boca Raton, 474 p.

Norris, A.N. 2008. Euler-Rodrigues and Cayley formulae for rotation of elasticity tensors. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 13(6), 465–498.

Özdemir, M. and Ergin, A.A. 2006. Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, 56(2), 322–336.

Özdemir, M., Erdoğdu, M. and Şimşek, H. 2013. On the eigenvalues and eigenvectors of a Lorentzian rotation matrix by using split quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24(1), 179–192.

Özdemir, M. and Erdoğdu, M. 2014. On the rotation matrix in Minkowski space-time. *Reports on Mathematical Physics*, 74(1), 27–38.

Özdemir, M. 2016. An alternative approach to alliptical montion. *Advances In Applied Clifford Algebras*, 26(1): 279-304.

Özdemir, M. 2019. Diferansiyel Geometri Ders Notları. Akdeniz Üniversitesi, Antalya.

Özdemir, M. 2021. Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler. Altın Nokta Yayınevi, İzmir, 432 s.

Özkaldı, S. and Gündoğan, H. 2009. Cayley formula, Euler parameters and rotations in 3-dimensional Lorentzian space. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 20(2), 367–377.

Politi, T. 2001. A formula for the exponential of a real skew-symmetric matrix of order 4. *Bit Numerical Mathematics*, 41(4), 842–845.

Rodríguez-Andrade, M.A., Aragón-González, G., Aragón, J.L. and Verde-Star, L. 2011. An algorithm for the Cartan–Dieudonné theorem on generalized scalar product spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, 434(5), 1238–1254.

Schmidt, J. and Nieman, H. 2001. Using quaternions for parametrizing 3-D rotations in unconstrained nonlinear optimization. In: Proceedings of the Vision Modeling and Visualization Conference. pp. 399-406, November 21-23, Stuttgart, Germany.

Selig, J.M. 2007. Cayley maps for SE(3). In: 12th IFToMM World Congress, pp. 18–21, June 18-21, Besancon, France.

Uhlig, F. 2001. Constructive ways for generating (generalized) real orthogonal matrices as products of (generalized) symmetries. *Linear Algebra and Its Applications*, 332–334,459–467.

Vicci, L. 2001. Quaternions and Rotations in 3-Space, The Algebra and Geometric Interpretation. Microelectric Systems Laboratory, Department of Computer Sciences, University of North Carolina at Chapel Hill, North Carolina.

Weiner, J.L. and Wilkens, G.R. 2005. Quaternions and rotations in $\mathbb{E}^4$. *The American Mathematical Monthly*, 112(1): 69-76.

ÖZGEÇMİŞ

Mert EROL

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2019-2022	Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2014-2019	Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen 2021-Devam Ediyor	Milli Eğitim Bakanlığı Şehit Arslan Kulaksız Fen Lisesi, Muş