DİFERENSİYEL GEOMETRİ 2 - 03.08.2016 - ARASINAV

ADI SOYADI : .... NUMARA : ....

$U = (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ **olmak üzere,** $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = (\sin \mathrm{u}, \sin \mathrm{v}, \cos \mathrm{u})$ **parametrizasyonu ile verilen** $\varphi(U) = \mathbb{M}$ **yüzeyi için 1-9 sorularını yanıtlayınız.**

1. $\varphi(U) = \mathbb{M}$ **yüzeyinin singüler noktası varsa bulunuz. (10 puan)**

2. $\varphi(U) = \mathbb{M}$ **yüzeyinin** $p = \varphi(0,0) = (0,0,1)$ **noktasındaki birinci ve ikinci temel form katsayılarını bulunuz. (10 puan)**

3. $\varphi(U) = \mathbb{M}$ **yüzeyinin** $p = \varphi(0,0) = (0,0,1)$ **noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz. (10 puan)**

4. $\varphi(U) = \mathbb{M}$ **yüzeyinin** $p = \varphi(0,0) = (0,0,1)$ **noktasındaki şekil operatörünü bulunuz. (10 puan)**

5. $\varphi(U) = \mathbb{M}$ **yüzeyinin** $p = \varphi(0,0) = (0,0,1)$ **noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz. (10 puan)**

6. $\varphi(U) = \mathbb{M}$ **yüzeyinin** $p = \varphi(0,0) = (0,0,1)$ **noktasındaki asli eğriliklerini bulunuz. (10 puan)**

7) $f:\mathbb{M}\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=x^2+2y+z^2$ ve $p=\varphi(q)=\varphi(0,0)$ ve $h_q=2\dfrac{\partial}{\partial u}(q)+3\dfrac{\partial}{\partial v}(q)$ olduğuna göre, $\varphi_*(\mathrm{h}_q)[f]=?$ **(10 puan)**

8) $\mathbb{M}$ **yüzeyi üzerindeki** $\alpha(t)=\varphi(\sin t,t)$ **eğrisinin** $\alpha(0)$ **ve** $\alpha(\pi/2)$ **arasıdaki uzunluğunu bulunuz. (10 puan)**

9) $\varphi(U)=\mathbb{M}$ **yüzeyinin alanını bulunuz. (10 puan)**

10. $\varphi(u,v)$ **parametrizasyonu ile verilen bir yüzey için,** φ_u **ve** φ_v **vektörleriyle gerilen paralelkenarın alanının** $\|\varphi_u\times\varphi_v\|=\sqrt{EG-F^2}$ **olduğunu gösteriniz. (15 puan)**

11. $\mathbb{M}$, $\mathbb{R}^3$ de **bir yüzey olmak üzere,** $\mathrm{v}_p,\mathrm{w}_p\in T_p(\mathbb{M})$ **lineer bağımsız iki vektör ise** $S(\mathrm{v}_p)\times S(\mathrm{w}_p)=K(p)\,\mathrm{v}_p\times\mathrm{w}_p$ **olduğunu kanıtlayınız. (15 puan)**

Başarılar
Doç.Dr. Mustafa Özdemir

DİFERENSİYEL GEOMETRİ 2 - 03.08.2016 - ARASINAV
ADI SOYADI : .... NUMARA : ....

$U=(-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)$ olmak üzere, $\varphi: U\to\mathbb{R}^3$, $\varphi(\mathrm{u},\mathrm{v})=(\mathrm{sinu},\mathrm{sinv},\mathrm{cosu})$ parametrizasyonu ile verilen $\varphi(U)=\mathbb{M}$ yüzeyi için 1-8 sorularını yanıtlayınız.

1. $\varphi(U)=\mathbb{M}$ yüzeyinin singüler noktası varsa bulunuz. (10 puan)

Çözüm : φ_* dönüşümüne karşılık gelen Jakobiyen matris :

$$J(\varphi)=\begin{bmatrix}\cos u & 0\\ 0 & \cos v\\ -\sin u & 0\end{bmatrix}$$

biçimindedir. Her $p\in U$ için rank 2 ise, singüler nokta yoktur. İlk sutünun sıfır vektöründen farklı olacağı açıktır. İkinci sütun 0 vektörü olursa, rank 1 olur. Bu ise, $\cos v=0\Leftrightarrow v=\pm\pi/2$ durumunda mümkündür. Fakat, $v=\pm\pi/2\notin(-\pi/2,\pi/2)$ olduğundan, yüzeyin singüler noktası yoktur.

2. $\varphi(U)=\mathbb{M}$ yüzeyinin $p=\varphi(0,0)=(0,0,1)$ noktasındaki birinci ve ikinci temel form katsayılarını bulunuz. (10 puan)

Çözüm :

$$\begin{aligned}
&\varphi_u=(\cos u,0,-\sin u)\Rightarrow E=\langle\varphi_u,\varphi_u\rangle=1\\
&\varphi_v=(0,\cos v,0)\Rightarrow G=\langle\varphi_v,\varphi_v\rangle=\cos^2 v \text{ ve } F=\langle\varphi_u,\varphi_v\rangle=0\\
&\varphi_u\times\varphi_v=(\sin u\cos v,0,\cos u\cos v)\\
&\|\varphi_u\times\varphi_v\|=\sqrt{\sin^2 u\cos^2 v+\cos^2 u\cos^2 v}=\cos v\\
&\mathbf{N}\circ\varphi=\frac{\varphi_u\times\varphi_v}{\|\varphi_u\times\varphi_v\|}=(\sin u,0,\cos u)\Rightarrow\mathbf{N}\circ\varphi(q)=(0,0,1)\\
&\varphi_{uu}=(-\sin u,0,-\cos u)\Rightarrow\varphi_{uu}(q)=(0,0,-1)\\
&\varphi_{uv}=(0,0,0)\Rightarrow\varphi_{uv}(q)=(0,0,0)\\
&\varphi_{vv}=(0,-\sin v,0)\Rightarrow\varphi_{vv}(q)=(0,0,0)
\end{aligned}$$

değerlerinden,

$$\begin{array}{lll}
E=\langle\varphi_u,\varphi_u\rangle(q)=1 & F=\langle\varphi_u,\varphi_v\rangle(q)=0 & G=\langle\varphi_v,\varphi_v\rangle(q)=1\\
e=\langle\varphi_{uu},\mathbf{N}\rangle(q)=-1 & f=\langle\varphi_{uv},\mathbf{N}\rangle(q)=0 & g=\langle\varphi_{vv},\mathbf{N}\rangle(q)=0
\end{array}$$

bulunur.

3. $\varphi(U)=\mathbb{M}$ yüzeyinin $p=\varphi(0,0)=(0,0,1)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz. (10 puan)

Çözüm : $\mathbf{N}\circ\varphi(q)=(0,0,1)$ olduğundan, $p=(0,0,1)$ noktasındaki teğet düzlemin denklemi :

$$0(x-0)+0(y-0)+1(z-1)=0$$

eşitliğinden, $z=1$ elde edilir.

4. $\varphi(U)=\mathbb{M}$ yüzeyinin $p=\varphi(\pi/2,0)$ noktasındaki şekil operatörünü bulunuz. (10 puan)

Çözüm : $S_p=\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e & f\\ f & g\end{bmatrix}=\frac{1}{EG\text{-}F^2}\begin{bmatrix}G & \text{-}F\\ \text{-}F & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e & f\\ f & g\end{bmatrix}$

eşitliğine göre,

$$\begin{array}{ll}
E=\langle\varphi_u,\varphi_u\rangle(q)=1 & e=\langle\varphi_{uu},\mathbf{N}\rangle(q)=-1\\
F=\langle\varphi_u,\varphi_v\rangle(q)=0 & f=\langle\varphi_{uv},\mathbf{N}\rangle(q)=0\\
G=\langle\varphi_v,\varphi_v\rangle(q)=1 & g=\langle\varphi_{vv},\mathbf{N}\rangle(q)=0
\end{array}$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$S_p=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

elde edilir.

5. $\varphi(U)=\mathbb{M}$ yüzeyinin $p=\varphi(0,0)$ noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz. (10 puan)

Çözüm : $K(p)=\det S_p$ ve $H(p)=\frac{1}{2}izS_p$ eşitliklerinden,

$$K(p)=\det\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0 \text{ ve } H(p)=\frac{1}{2}iz\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\frac{-1}{2}$$

elde edilir.

6. $\varphi(U)=\mathbb{M}$ yüzeyinin $p=\varphi(0,0)$ noktasındaki asli eğriliklerini bulunuz. (10 puan)

Çözüm : $S_p=\begin{bmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ eşitliğinden,

$$k_1=-1 \text{ ve } k_2=0$$

istenen asli eğriliklerdir.

7. $f:\mathbb{M}\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=x^2+2y+z^2$ ve $p=\varphi(q)=\varphi(0,0)$ ve $h_q=2\dfrac{\partial}{\partial u}(q)+3\dfrac{\partial}{\partial v}(q)$ olduğuna göre, $\varphi_*(\mathrm{h}_q)[f]=?$ (10 puan)

Çözüm : $\varphi_*(h_q)[f]=h_q(f\circ\varphi)$ eşitliğini kullanabiliriz.

$$f\circ\varphi=f(\sin u,\sin v,\cos u)=\sin^2 u+2\sin v+\cos^2 u=1+2\sin v$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\varphi_*(h_q)[f]&=h_q(f\circ\varphi)=\sum_{k=1}^{2}h_i\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u_i}(q)\\
&=2\cdot 0+3\cdot 2\cos v(q)\\
&=6
\end{aligned}$$

bulunur.

8. $\mathbb{M}$ yüzeyi üzerindeki $\alpha(t)=\varphi(\sin t,t)$ eğrisinin $\alpha(0)$ ve $\alpha(\pi/2)$ arasıdaki uzunluğunu bulunuz. (10 puan)

Çözüm : $u=\sin t\Rightarrow du=(\cos t)dt$ ve $v=t\Rightarrow dv=dt$ ve $E=1$, $F=0$ ve $G=\cos^2 v$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
s&=\int_0^{\pi/2}\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}\\
&=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1\cdot\cos^2 t\cdot\mathrm{d}t^2+0+\cos^2 t\cdot\mathrm{d}t^2}\\
&=\int_0^{\pi/2}\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t\\
&=\sqrt{2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

9. $\boldsymbol{\varphi(U) = \mathbb{M}}$ **yüzeyinin alanını bulunuz. (10 puan)**

Çözüm : $\boldsymbol{U = (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)}$ olduğundan, $u \in \boldsymbol{(-\pi,\pi)}$, $v \in (\boldsymbol{-\pi/2, \pi/2})$ için, istenen alan : $E = 1$, $F = 0$ ve $G = \cos^2 v$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} Alan &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos v \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\pi (\cos v)\,\mathrm{d}v = 4\pi \end{aligned}$$

elde edilir.

10. $\boldsymbol{\varphi(u,v)}$ **parametrizasyonu ile verilen bir yüzey için,** φ_u **ve** φ_v **vektörleriyle gerilen paralelkenarın alanının** $\boldsymbol{\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}}$ **olduğunu gösteriniz. (15 puan)**

Çözüm : φ_u ve φ_v vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını :

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \|\varphi_u\| \, \|\varphi_v\| \sin\theta$$

eşitliği ile verebiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned} \|\varphi_u \times \varphi_v\| &= \|\varphi_u\| \, \|\varphi_v\| \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ &= \|\varphi_u\| \, \|\varphi_v\| \sqrt{1 - \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2}{\|\varphi_u\|^2 \, \|\varphi_v\|^2}} \\ &= \sqrt{\|\varphi_u\|^2 \, \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2} \\ &= \sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2} \\ &= \sqrt{EG - F^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

11. $\mathbb{M}$, $\mathbb{R}^3$ **de bir yüzey olmak üzere,** $\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \in \boldsymbol{T_p}(\mathbb{M})$ **lineer bağımsız iki vektör ise** $\boldsymbol{S(\mathbf{v}_p) \times S(\mathbf{w}_p) = K(p)\, \mathbf{v}_p \times \mathbf{w}_p}$ **olduğunu kanıtlayınız. (15 puan)**

Çözüm : $S(\mathbf{v}_p) = a\mathbf{v}_p + b\mathbf{w}_p$ ve $S(\mathbf{w}_p) = c\mathbf{v}_p + d\mathbf{w}_p$ olmak üzere,

$$S_p = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

biçimindedir. $K(p) = \det S_p = ad - bc$ olduğunu kullanacağız.

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}_p) \times S(\mathbf{w}_p) &= (a\mathbf{v}_p + b\mathbf{w}_p) \times (c\mathbf{v}_p + d\mathbf{w}_p) \\ &= ac(\mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_p) + ad(\mathbf{v}_p \times \mathbf{w}_p) \\ &\quad + bc(\mathbf{w}_p \times \mathbf{v}_p) + bd(\mathbf{w}_p \times \mathbf{w}_p) \\ &= ad(\mathbf{v}_p \times \mathbf{w}_p) + bc(\mathbf{w}_p \times \mathbf{v}_p) \\ &= ad(\mathbf{v}_p \times \mathbf{w}_p) - bc(\mathbf{v}_p \times \mathbf{w}_p) \\ &= (ad - bc)(\mathbf{v}_p \times \mathbf{w}_p) \\ &= K(p)(\mathbf{v}_p \times \mathbf{w}_p) \end{aligned}$$

elde edilir.

Başarılar
Doç.Dr. Mustafa Özdemir