LİNEER BAĞIMSIZLIK, GERME, TABAN

Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Vektörlerin Lineer Bileşimi

Tanım

Bir vektör kümesinde, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\overrightarrow{\mathbf{z}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$$

vektörüne, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörlerinin bir **lineer bileşimi** denir. Kısaca, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörleri cinsinden yazılışına, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörünün $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılması denir.

Örnek

Örneğin, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1, 3, 4)$ vektörünü standart birim vektörlerin lineer bileşimi olarak

$$\overrightarrow{\mathbf{z}} = 1\vec{\mathbf{e}}_1 + 3\vec{\mathbf{e}}_2 + 4\vec{\mathbf{e}}_3$$

şeklinde yazabiliriz. Bu yazılış çoğu zaman $\overrightarrow{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 4\vec{\mathbf{k}}$ şeklinde karşımıza çıkar.

Örnek

Düzlemde, $\overrightarrow{z} = (2,3)$ vektörünü, $\overrightarrow{x} = (1,2)$ ve $\overrightarrow{y} = (2,5)$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazınız.

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{z}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *eşitliğinden,*

$$(2,3) = \lambda_1 (1,2) + \lambda_2 (2,5) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + 5\lambda_2)$$

olur ki, vektörlerin eşitliğinden,

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2 \qquad ve \qquad 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 3$$

bulunur. Bu denklem sisteminin çözümünden, $\lambda_1 = 4$ *ve* $\lambda_2 = -1$ *bulunur. Yani,* $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ *vektörü,* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörünün lineer bileşimi olarak*

$$\overrightarrow{\mathbf{z}} = 4\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 2, 3)$ **vektörünü,** $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 2, 0)$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1, 0, 1)$ **vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazmak mümkün müdür?**

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{y}} + \lambda_3 \overrightarrow{\mathbf{z}}$ *olacak şekilde* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *reel sayısı olup olmadığını inceleyelim.*

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 2, 3) = \lambda_1 (1, 1, 0) + \lambda_2 (2, 2, 0) + \lambda_3 (1, 0, 1)$$
$$(1, 2, 3) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_3)$$

eşitliğinden, $\lambda_3 = 3$ *olacağından, ilk iki bileşenden*

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = -2 \qquad \textit{ve} \qquad \lambda_1 + 2\lambda_2 = 2$$

elde edilir ki, bu mümkün değildir. O halde, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *vektörünü,* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ *vektörlerinin lineer bileşimi olarak, yani*

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{y}} + \lambda_3 \overrightarrow{\mathbf{z}}$$

formunda yazmak mümkün değildir.

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{u}}=(2,4,6)$ **vektörünü** $\overrightarrow{\mathbf{x}}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}=(1,3,4)$, $\overrightarrow{\mathbf{z}}=(2,1,0)$ **vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazalım.**

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = 2\overrightarrow{\mathbf{x}} + 0\overrightarrow{\mathbf{y}} + 0\overrightarrow{\mathbf{z}}$ *şeklinde yazılabilir. Burada açıktır ki,* $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *vektörü* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *vektörüne bağımlıdır.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{u}}=(5,4,10)$ *vektörünü* $\overrightarrow{\mathbf{x}}=(1,1,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}=(1,2,4)$, $\overrightarrow{\mathbf{z}}=(0,1,2)$ *vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazınız.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,2,3)$ *vektörü,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,2,1)$ *vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabilir mi?*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,-1,7)$ *vektörü,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,2,1)$ *vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabilir mi?*

Örnek

$\mathbb{R}^4$ uzayında $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$, $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ vektörlerinden, biri diğerlerinin lineer bileşimi olarak yazılamayacak şekilde maksimum sayıda vektör seçiniz.

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ *ile oluşan matrisi elemanter satır operasyonlarıyla eşelon forma getirelim.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{S_3 \to S_3 - S_1 \\ S_4 \to S_4 - 2S_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{S_3 \to S_3 - S_2 \\ S_4 \to S_4 - S_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eşelon formunda gördüğümüz gibi, dördüncü satırı tamamen sıfırladık. Bu, dördüncü satırın, diğerlerine bağlı olduğunu gösterir. Bu matristen başka bir satırı daha sıfırlamak mümkün değildir. Bu matrisin rankı 3'tür. Bu $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$, $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ *vektörlerinden biri diğerlerinin lineer bileşimi olarak yazılamayacak şekilde maksimum 3 vektör seçilebileceğini ifade eder. O halde, sıfırlayamadığımız* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ *vektörlerini alırsak, biri diğerleri cinsinden yazılamaz.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 1, 0, 1)$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (0, 1, 1, 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (2, 1, -1, 0)$, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 1, 3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 3, 1, 4)$ *vektörleri arasından, biri diğerlerinin lineer bileşimi olarak yazılamayacak şekilde, en fazla kaç vektör seçilebilir?*

$\mathbb{V}$ bir vektör kümesi olsun. $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k \in \mathbb{V}$ olmak üzere, $\mathbb{V}$ kümesindeki her $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörü, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörleri cinsinden yazılabiliyorsa, yani, $\mathbb{V}$ uzayının her $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörü $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörlerinin lineer bileşimi ise, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörleri $\mathbb{V}$ **uzayını geriyor** denir ve

$$\mathbf{Sp}\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k\right\} = \mathbb{V}$$

biçiminde yazılır. (Not : Buradaki Sp ifadesi, ingilizce Span=Germe kelimesinin ilk iki harfini göstermektedir.)

Örnek

$\mathbb{R}^2$ uzayındaki her vektör, $\vec{\mathbf{e}}_1 = (1, 0)$ ve $\vec{\mathbf{e}}_2 = (0, 1)$ vektörleri cinsinden

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (a, b) = a\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + b\overrightarrow{\mathbf{u}}_2$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre, $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ uzayını gererler, $\mathbf{Sp}\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2\} = \mathbb{R}^2$.Benzer şekilde, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki her vektör, $\vec{\mathbf{i}} = (1, 0, 0)$, $\vec{\mathbf{j}} = (0, 1, 0)$ ve $\vec{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$ vektörleri cinsinden $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (a, b, c) = a\vec{\mathbf{i}} + b\vec{\mathbf{j}} + c\vec{\mathbf{k}}$ şeklinde yazılabilir. Buna göre, $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ uzayını gererler. $\mathbf{Sp}\left\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\right\} = \mathbb{R}^3$.

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,2)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (2,1)$ vektörlerinin $\mathbb{R}^2$ uzayını gerdiğini gösteriniz.

Çözüm

Her $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (a,b)$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ 'nin lineer bileşimi olarak yazılabildiğini gösterelim.

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (a,b) = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{y}} + \lambda_3 \overrightarrow{\mathbf{z}} = \lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (1,2) + \lambda_3 (2,1)$$

eşitliğinden,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = a \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = b \end{cases}$$

olur. Bilinmeyen sayısı fazla olduğundan, sonsuz çözüm vardır. $\lambda_2 = t$ diyelim. Bu iki denklemin farkından $\lambda_3 = a - b + t$ olur ve buradan da $\lambda_1 = 2b - a - 3t$ elde edilir. O halde, her $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ vektörü, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (2b - a - 3t)\, \overrightarrow{\mathbf{x}} + t\, \overrightarrow{\mathbf{y}} + (a - b + t)\, \mathbf{z}$$

biçiminde yazılabilir. Yani, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ uzayını gererler ve $\mathbf{Sp}\left\{\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right\} = \mathbb{R}^2$ *yazılabilir.*

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ **vektörlerinin** $\mathbb{R}^3$ **uzayını germediği gösteriniz.**

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{w}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ *olduğundan* $\mathbb{R}^3$ *uzayını germezler. Örneğin,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 1, 1)$ *vektörünü, bu üç vektörün cinsinden yazmak mümkün değildir.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (0, 1, 1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (1, 1, 1)$ *vektörlerinin* $\mathbb{R}^3$ *uzayını gerdiğini gösteriniz.*

n Boyutlu Öklid Uzayında Germe ve Lineer Bağımsızlık

$\mathbb{R}^2$ uzayını birbirinden bağımsız en az iki vektörle gerebiliriz.
$\mathbb{R}^3$ uzayını birbirlerine bağlı olmayan en az üç vektörle gerebiliriz.
$\mathbb{R}^n$ uzayını birbirlerine bağlı olmayan en az n vektörle gerebiliriz.

Örnek

Aşağıdakilerden hangileri yanlıştır?

A) $\mathbf{Sp}\{(1,0),(1,1)\} = \mathbb{R}^2$
B) $\mathbf{Sp}\{(1,0),(1,1),(0,0)\} = \mathbb{R}^2$
C) $\mathbf{Sp}\{(1,3),(3,1),(1,1)\} = \mathbb{R}^2$
D) $\mathbf{Sp}\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\} = \mathbb{R}^3$
E) $\mathbf{Sp}\{(1,0,1),(0,1,1)\} = \mathbb{R}^3$
F) $\mathbf{Sp}\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\} = \mathbb{R}^3$
G) $\mathbf{Sp}\{(1,1),(2,2)\} = \mathbb{R}^2$

Çözüm

$\mathbb{R}^2$ *uzayını birbirine bağlı olmayan en az iki vektörün bulunduğu bir vektör kümesiyle germek mümkündür. Bu nedenle, A), B), C) doğrudur. Fakat, G) yanlıştır. Çünkü,* $(1,1)$ *ve* $(2,2)$ *vektörleri* $(2,2) = 2(1,1)$ *olduğundan birbirine bağlıdır. Kısaca aynı doğrultuyu gösterirler ve* $\mathbb{R}^2$ *uzayını geremezler.*
$\mathbb{R}^3$ *uzayını ise, birbirine bağlı olmayan en az üç vektörün bulunduğu bir vektör kümesiyle germek mümkündür. Bu nedenle, E) ve F) yanlıştır. F)'nin yanlış olduğunu,* $(1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0)$ *olduğundan kolayca görebiliriz. Yani, F)'deki vektörler birbirine bağlıdır. D)'nin doğru olduğunu göstermek için, verilen üç vektörün birbirinden bağımsız olduğunu göstermeliyiz. Bunu lineer bağımsızlık konusundan sonra daha kolay gösterebiliriz. Burada göstermeyeceğiz.*

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,2,3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (2,1,4)$ vektörleri $\mathbb{R}^3$'ü germezler, fakat $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bir düzlemi gererler. Bu düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm

$\mathbf{Sp}\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\} = \{(x,y,z) : (x,y,z) = a\overrightarrow{\mathbf{u}} + b\overrightarrow{\mathbf{v}};\quad a,b \in \mathbb{R}\}$ *şeklinde yazabiliriz.*

$$(x,y,z) = a(1,2,3) + b(2,1,4) = (a+2b, 2a+b, 3a+4b)$$

eşitliğinden, $a+2b = x$, $2a+b = y$ *ve* $3a+4b = z$ *olmalıdır. Bu sistemden* a *ve* b *değerlerini yok ederek* x,y,z*'ye bağlı bir denklem elde edeceğiz. İlk iki denklemden,* $-3a = x-2y \Rightarrow a = \dfrac{2y-x}{3}$ *olur. Buradan,* $2b = x - \dfrac{2y-x}{3} \Rightarrow b = \dfrac{2x-y}{3}$ *olur.* a *ve* b*'yi son denklemde yerine yazarsak,*

$$(2y-x) + 4\left(\frac{2x-y}{3}\right) = z \Rightarrow 6y - 3x + 8x - 4y = 3z \Rightarrow 5x + 2y - 3z = 0$$

elde edilir ve $\mathbf{Sp}\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\} = \{(x,y,z) : 5x+2y-3z = 0,\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$ *bulunur.*

Çözüm

2. Yol : *İki vektörle aynı düzlemde olan herhangi*

$$\overrightarrow{\mathbf{w}} = (x, y, z) = a\,\overrightarrow{\mathbf{u}} + b\,\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

vektörü için, determinant özellikleri göz önüne alınırsa, $\det\left(\overrightarrow{\mathbf{w}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = 0$ *olmalıdır (Bir satır farklı iki satırların lineer bileşimidir). Buna göre,*

$$\det\left(\overrightarrow{\mathbf{w}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5x + 2y - 3z = 0$$

elde edilir.

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,1,1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1,2,3)$ *vektörleri tarafından gerilen uzayı bulunuz.*

Problem

$\mathbb{V} = \{(x,y,z) : 2x + y + z = 0\}$ *uzayı aşağıdaki uzaylardan hangilerine eşittir?*

A) $\mathbb{V} = \mathbf{Sp}\{(1,1,-3), (1,0,-2)\}$

B) $\mathbb{V} = \mathbf{Sp}\{(1,1,-3), (1,0,-2), (0,0,0)\}$

C) $\mathbb{V} = \mathbf{Sp}\{(1,1,-3), (1,0,-2), (0,-1,1)\}$

D) $\mathbb{V} = \mathbf{Sp}\{(1,1,-3), (-1,1,1)\}$

E) $\mathbb{V} = \mathbf{Sp}\{(1,1,-3), (-1,1,1), (1,2,1)\}$

Tanım

$\mathbb{R}^n$ uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörleri ve $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ için,

$$\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{\mathbf{u}}_k = \vec{0}$$

olması, ancak ve ancak

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

olmasıyla mümkün ise, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörlerine $\mathbb{R}^n$ de **lineer bağımsız vektörler** denir. Diğer yandan,

$$\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{\mathbf{u}}_k = \vec{\mathbf{0}}$$

olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ sayılarından en az biri sıfırdan farklı olarak bulunabiliyorsa, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörlerine $\mathbb{R}^n$ de **lineer bağımlı vektörler** denir.

- $\mathbb{R}^2$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 1)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1, 0)$ vektörleri için, $\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{y}} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = (0, 0)$ olabilmesi için, ancak ve ancak $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olması gerekir. O halde, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ lineer bağımsızdır.

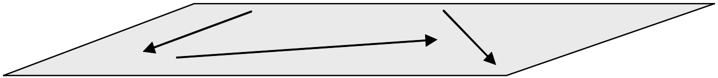
Örnek

$\mathbb{R}^2$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3,9)$ vektörleri lineer bağımlıdırlar. $\overrightarrow{\mathbf{y}} = 3\overrightarrow{\mathbf{x}}$ dir.
$\overrightarrow{\mathbf{y}} - 3\overrightarrow{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ eşitliğinde, hem $\lambda_1 = 1$ hem de $\lambda_2 = -3$ sıfırdan farklıdır.
$\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,0,2)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (3,1,5)$ vektörleri $\overrightarrow{\mathbf{x}} + 2\overrightarrow{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\mathbf{z}} = \vec{0}$ olduğundan lineer bağımlıdırlar., bu vektörlerden birini, diğerlerine bağlı olarak, diğerleri cinsinden yazabiliriz. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = -1$ sıfırdan farklıdır.

$\mathbb{R}^2$ de aynı doğrultudaki iki vektör lineer bağımlıdır.

Problem

$\mathbb{R}^2$ de lineer bağımlı iki vektör, $\mathbb{R}^3$ de lineer bağımlı üç vektör yazınız.



$\mathbb{R}^3$ de aynı düzlemdeki üç vektör lineer bağımlıdır.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,1,0)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (-1,0,1)$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{y}} + \lambda_3 \overrightarrow{\mathbf{z}} = \vec{0}$ *durumunun sadece* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ *iken sağlandığını göstermeliyiz.*

$$\lambda_1 (1,2,3) + \lambda_2 (1,1,0) + \lambda_3 (-1,0,1) = (0,0,0)$$

eşitliğinden,

$$\{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0,\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \text{ ve } 3\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

olur ki, tek çözüm $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ *çözümüdür. O halde,* $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ *lineer bağımsızdır.*

n Boyutta n vektör için Lineer Bağımlılık ve Determinant İlişkisi

$\mathbb{R}^3$ de verilen üç vektörün oluşturduğu 3×3 determinantı göz önüne alalım. Eğer, bu üç vektör lineer bağımlı ise, herhangi bir vektör, diğer vektörlere bağlı olarak yazılabileceğinden determinant sıfır olur. Örneğin,

$$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \quad \text{ve} \quad a\overrightarrow{\mathbf{x}} + b\overrightarrow{\mathbf{y}}$$

vektörlerini gözönüne alalım. Determinant özellikleri kullanılırsa,

$$\det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, a\overrightarrow{\mathbf{x}} + b\overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = a\det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) + b\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

olduğu görülebilir. Bu düşünce, $\mathbb{R}^n$ uzayındaki n tane lineer bağımlı vektör için de geçerlidir. Buna göre,

$\mathbb{R}^2$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}$ lineer bağımlıdır $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = 0$;
$\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ lineer bağımlıdır $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right) = 0$;
$\mathbb{R}^n$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}$ lineer bağımlıdır $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}\right) = 0$
olur.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, k, 3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 2, 3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (2, 1, 1)$ vektörleri lineer bağımlı ise k kaçtır?

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ *lineer bağımlı ise,* $\det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right) = 0$ *olmalıdır. Buna göre,*

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4k - 7 = 0$$

olması gerektiğinden, $k = 7/4$ *olur.*

Problem

$\mathbb{R}^3$ *de* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 4, 3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0, k, 3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (2, 1, 1)$ *vektörleri lineer bağımlı ise k kaçtır?*

Örnek

$\mathbb{R}^4$ de $\overrightarrow{x} = (1, k, 3, 0)$, $\overrightarrow{y} = (1, 2, 2, 3)$, $\overrightarrow{z} = (2, 1, 1, 1)$ ve $\overrightarrow{w} = (0, 1, 0, 1)$ vektörleri lineer bağımlı ise k kaçtır?

Çözüm

$\mathbb{R}^4$ *de,* $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{w}$ *lineer bağımlı ise,* $\det\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w}\right) = 0$ *olmalıdır. Buna göre,*

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3k + 5 = 0$$

olması gerektiğinden, $k = -5/3$ *olur.*

Problem

$\mathbb{R}^4$ *de* $\overrightarrow{x} = (2, 0, 3, 0)$, $\overrightarrow{y} = (1, k, 2, 3)$, $\overrightarrow{z} = (2, 1, 0, 1)$ *ve* $\overrightarrow{w} = (0, 1, 0, 1)$ *vektörleri lineer bağımlı ise* k *kaçtır***?**

Taban (Baz)

Tanım

$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı olsun. Bu uzayda verilen $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{u}}_m\right\}$ vektörleri hem lineer bağımsız ise, hem de $\mathbb{V}$ uzayındaki her vektör, bu vektörler cinsinden yazılabiliyorsa, yani $\mathbb{V}$ uzayını geriyorlarsa, $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{u}}_m\right\}$ vektörlerine $\mathbb{V}$ **uzayının bir tabanı** denir.

Örneğin, $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ uzayının bir tabanıdır. Bu üç vektör hem lineer bağımsızdırlar, hem de $\mathbb{R}^3$ uzayını gererler. Bu tabana, $\mathbb{R}^3$ uzayının standart tabanı denir. $\mathbb{R}^3$ uzayı için sonsuz sayıda taban bulunabilir. Örneğin

$$, \overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,0)\,, \overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,1) \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,0,1)$$

vektörleri $\mathbb{R}^3$ de lineer bağımsız olan ve $\mathbb{R}^3$'ü geren üç vektördür. Bu vektörler de, $\mathbb{R}^3$ için bir tabandır. $\mathbb{R}^n$ uzayındaki n lineer bağımsız vektör, daima $\mathbb{R}^n$ uzayını gereceğinden, $\mathbb{R}^n$ uzayında alınan n vektörden oluşan her lineer bağımsız vektör kümesi, $\mathbb{R}^n$ uzayı için bir tabandır.

Problem

$\mathbb{R}^2$ *uzayının farklı iki tabanını yazınız.*

Problem

$\mathbb{R}^3$ *uzayının farklı iki tabanını yazınız.*

Örnek

Bir vektör uzayında verilen vektörlerin lineer bağımsız olması, taban olması için yeterli midir? Bir tane örnek vererek açıklayınız.

Çözüm

Yeterli değildir. Örneğin, $\mathbb{R}^3$ *uzayında*

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,0,0) \;\; \text{ve} \;\; \overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,0)$$

vektörleri lineer bağımsızdır. Fakat, $\mathbb{R}^3$ *uzayını germezler. Bu nedenle* $\left\{\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\}$ *taban olamaz.*

Örnek

Bir vektör uzayında verilen vektörlerin, o uzayı germesi, taban olması için yeterli midir? Bir tane örnek vererek açıklayınız.

Çözüm

Yeterli değildir. Örneğin, $\mathbb{R}^2$ *uzayında* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1)$ *vektörlerinin* $\mathbb{R}^2$ *uzayını germelerine rağmen, bu üç vektör lineer bağımsız olmadıklarından (çünkü* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}$*),* $\mathbb{R}^2$ *uzayının tabanı değillerdir.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1,1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (1,2,3)$ *vektörleri* $\mathbb{R}^3$ *uzayının tabanı olabilir mi?*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,0,0,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,0,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1,1,0)$ *vektörleri* $\mathbb{R}^4$ *uzayının neden tabanı değildir?*

Problem

Aşağıdaki vektör kümelerinden hangileri $\mathbb{R}^3$ uzayı için bir tabandır? Nedenleriyle açıklayınız.

a) $\{(1,1,1)\,;(1,2,3)\,;(3,2,1)\}$,

b) $\{(1,1,1)\,;(1,2,3)\,;(2,3,4)\}$,

c) $\{(1,0,0)\,;(0,1,0)\,;(0,0,1)\,;(0,0,0)\}$,

d) $\{(1,1,1)\,;(1,2,3)\}$

Not $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_m$ vektörleri tarafından gerilen, $\mathbf{Sp}\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_m\} = \mathbb{V}$ uzayındaki, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_i$, $1 \leq i \leq m$ vektörlerinden seçilecek maksimum sayıdaki lineer bağımsız vektör, $\mathbb{V}$ uzayının bir tabanı olur. $\mathbb{R}^n$ uzayından seçilen herhangi n tane lineer bağımsız vektör, $\mathbb{R}^n$ uzayının tabanıdır.

Problem

Aşağıdaki vektör kümeleriden hangileri $\mathbb{V} = \{(x, y, z) : x + y = z\}$ *uzayı için bir tabandır? Nedenleriyle açıklayınız.*

a) $\{(1, 1, 2)\,;\,(1, 2, 3)\}$,

b) $\{(1, 1, 2)\,;\,(1, 2, 3)\,;\,(2, 3, 5)\}$,

c) $\{(1, 3, 4)\,;\,(0, 1, 1)\}$,

d) $\{(0, 1, 1)\,;\,(1, 0, 1)\,;\,(0, 1, 0)\}$

Örnek

$\overrightarrow{x} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{y} = (0,1,1)$, $\overrightarrow{z} = (1,1,2)$, $\overrightarrow{w} = (1,1,0)$ vektörlerinden $\mathbb{R}^3$ için bir taban seçilebilir mi?

Çözüm

Vektörleri matris olarak yazarak, matrisi eşelon forma getirelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_3 \to S_3 - S_1 \\ S_4 \to S_4 - S_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_4 \to S_4 + S_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Buna göre, ilk üç vektör lineer bağımsızdır. $\mathbb{R}^3$ uzayı 3 boyutlu olduğundan, bu üç vektörü taban olarak seçebiliriz.

Örnek

$\mathbb{V} = \mathbf{Sp}\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{1,0,1}), \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{2,1,1}), \overrightarrow{\mathbf{u}}_3 = (\mathbf{1,1,0}), \overrightarrow{\mathbf{u}}_4 = (\mathbf{3,1,2})\}$ **uzayının bir tabanını bulunuz.**

Çözüm

Elemanter satır operasyonlarıyla, en fazla kaç tane lineer bağımsız vektör seçebileceğimizi görelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2 \to S_2 - 2S_1 \\ S_3 \to S_3 - S_1 \\ S_4 \to S_4 - 3S_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_3 \to S_3 - S_2 \\ S_4 \to S_4 - S_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan, seçilebilecek maksimum lineer bağımsız vektör sayısı 2'dir. Buna göre, sıfırlanmayan ilk iki vektör alınabilir. O halde, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = (1,0,1)$, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = (2,1,1)$ *vektörleri* $\mathbb{V}$ *uzayının bir tabanıdır.*

Uzayın Boyutu

Tanım

$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı olsun. $\mathbb{V}$ uzayının tabanındaki vektör sayısına $\mathbb{V}$ uzayının boyutu denir ve *boy* $(\mathbb{V})$ ile gösterilir. *boy* $(\mathbb{R}^n) = n$ olduğu açıktır. n boyutlu bir uzaydan seçilen lineer bağımsız n vektör, bu uzayın bir tabanıdır.

Örnek

$\mathbb{V} = \mathbf{Sp}\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{1, 0, 1}), \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{2, 1, 1}), \overrightarrow{\mathbf{u}}_3 = (\mathbf{1, 1, 0}), \overrightarrow{\mathbf{u}}_4 = (\mathbf{3, 1, 2})\}$ **uzayının boyutu kaçtır?**

Çözüm

Bir önceki örnekte, bu uzayın tabanının $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{u}}_2$ *alınabileceğini göstermiştik. Kısaca, tabanında 2 vektör olduğundan, bu uzayın boyutu 2'dir.*

Problem

Aşağıdaki uzayların boyutlarını bulunuz.

a) $\mathbb{V}_1 = \mathbf{Sp}\{\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,0,1,1)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,0,1)\}$ *uzayının boyutu kaçtır?*

b) $\mathbb{V}_2 = \mathbf{Sp}\{\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,0,1,1)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,0,1)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1,1,0)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{w}} = (1,1,1,1)\}$

c) $\mathbb{V}_3 = \mathbf{Sp}\{\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,0,1)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,0)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1,1)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{w}} = (1,1,0)\}$

KAYNAK

Mustafa Özdemir, Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınları, 4. Baskı, İzmir, 2019.