AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

BİTİRME ÖDEVİ
FİNAL SORULARININ ÇÖZÜMLERİ

16 Ocak 2015

ADI SOYADI : ....

NO : ....

A	A	A	A	A	A	A

SINAV TARİHİ VE SAATİ :

Bu sınav 40 sorudan oluşmaktadır ve sınav süresi 90 dakikadır.

SINAVLA İLGİLİ UYULACAK KURALLAR

1. Cevap kağıdınıza soru kitapçığınızın türünü işaretlemeyi unutmayınız.

2. Her soru eşit değerde olup, puanlama yapılırken doğru cevaplarınızın sayısından yanlış cevaplarınızın sayısının dörtte biri düşülecektir.

3. Sınavda pergel, cetvel, hesap makinesi gibi yardımcı araçlar ve müsvedde kağıdı kullanılması yasaktır. Tüm işlemlerinizi soru kitapçığı üzerinde yapınız.

4. Sınav süresince görevlilerle konuşulmayacak ve onlara soru sorulmayacaktır. Yanlış olduğunu düşündüğünüz sorularla ilgili, görevlilere soru sormayınız. Bu çok küçük bir olasılık olsa da, jüri bu tür durumları daha sonra değerlendirecektir.

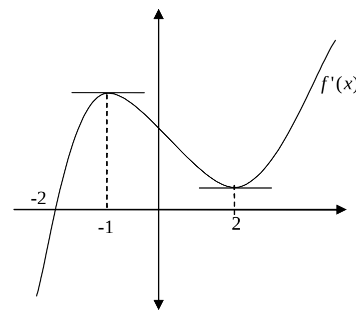
5. Öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.

6. Dışarıya çıkan bir aday tekrar sınava alınmayacaktır.

7. Cep telefonuyla sınava girmek yasaktır. Cep telefonunuzu görevliye teslim ediniz.

8. Soru kitapçıkları toplanacaktır.

1. Yandaki grafikte $f\left(x\right)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Buna göre, seçeneklerden hangisi yanlıştır?



A) $\left(-2,-1\right)$ aralığında f konvekstir.

B) Fonksiyonun iki tane extremum noktası vardır.

C) Fonksiyonun iki tane dönüm noktası vardır.

D) $\left(-2,\infty\right)$ aralığında f fonksiyonu artandır.

E) Hiçbiri

Çözüm : A) doğrudur. Çünkü, $\left(-2,-1\right)$ aralığında $f'\left(x\right)$ türevinin grafiği artan olduğundan, $f''\left(x\right)>0$ olacaktır. Bu ise, f'in konveks olması demektir.

B) yanlıştır. Çünkü, $f'\left(x\right)=0$ olan tek nokta $x=-2$ dir ve $x>-2$ için $f'\left(x\right)>0$ ve $x<-2$ için $f'\left(x\right)<0$ olduğundan bu nokta ekstremum noktadır. $f\left(x\right)$'in sadece 1 tane ekstremum noktası vardır.

C) doğrudur. Çünkü, $f'\left(x\right)$'in yerel maksimum-minimum noktaları $x=-1$ ve $x=2$ noktalarıdır. O halde, bu noktalarda $f'\left(x\right)$'in türevi yani $f''\left(x\right)=0$ olmalıdır. Bu ise bu iki noktanın dönüm noktası olduğunu gösterir.

D) doğrudur. Çünkü, $\left(-2,\infty\right)$ aralığında $f'\left(x\right)$ daima pozitif olduğundan, $f\left(x\right)$ fonksiyonu bu aralıkta artandır.

---

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{(\cos x)\,dx}{1+\sin^2 x}=?$

A) 0 **B) $\frac{\pi}{4}$** **C) $\frac{\pi}{3}$** **D) $\frac{\pi}{2}$** **E) π**

Çözüm : $\sin x=u$ dönüşümü yapılırsa, $\cos x dx=du$ olduğundan,

$$\int\frac{du}{1+u^2}=\arctan u \text{ olduğundan, } \int_0^{\pi/2}\frac{(\cos x)\,dx}{1+\sin^2 x}=\arctan\left(\sin x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}$$

bulunur.

---

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\cot x}\right)^x=?$

A) e^2 **B) e** **C) 1** **D) 2** **E) $2e$**

Çözüm : Yanıt B.

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{\cot x}\right)^x=\lim_{x\to 0}\left(e^{x\cot x}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\cot x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}}=e^1=e.$$

4. $\boldsymbol{f(x,y,z) = x^2\, yz + e^{x+y}}$ **ise,** $\boldsymbol{\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(3,2,1) = ?}$

A) 3 **B) 1** **C) 2** **D) 6** **E) 4**

Çözüm : $\dfrac{\partial f}{\partial z} = x^2 y \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 2x$ olduğundan, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(3,2,1) = 6$ olur.

---

5. $\boldsymbol{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n(2n+1)}}$ **serisinin yakınsaklık yarıçapı kaçtır?**

A) $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ **B) 1** **C)** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ **D) 2** **E)** $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

Çözüm : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-1/2)^n}{3^n(2n+1)}$ şeklinde yazılırsa,

$a_n = \dfrac{2^n}{3^n(2n+1)}$ olduğundan, Oran (veya kök testinden)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}(2n+3)}}{\dfrac{2^n}{3^n(2n+1)}} = \frac{2}{3} \quad \left(\text{veya } \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n(2n+1)}} = \frac{2}{3}\right)$$

olduğundan, yakınsaklık yarıçapı $R = 3/2$'dir. $|x - 1/2| \leq 3/2$ için seri yakınsaktır.

---

6. $\boldsymbol{\left((-1)^n \dfrac{3n+1}{3n-1}\right)}$ **dizisi için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?**

I. Sınırlıdır **II. Yakınsaktır** **III. Üst limiti vardır** **IV. Alt limiti vardır**

A) III, IV **B) I,III,IV** **C) I,II,IV** **D) II,III,IV** **E) I,II,III,IV**

Çözüm : I. Dizi sınırlıdır. $a_n \leq 2$, II. Üst limiti 1'dir. IV. Alt limiti -1'dir. Alt ve üst limitleri farklı olduğundan yakınsak değildir. Yanıt B

---

7. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

I. $\boldsymbol{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|}$ **serisi yakınsak ise,** $\boldsymbol{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$ **serisi mutlak yakınsaktır.**

II. $\boldsymbol{\displaystyle\lim_{x\to\infty} a_n = 0}$ **ise,** $\boldsymbol{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$ **serisi yakınsaktır.**

III. $\boldsymbol{\displaystyle\lim_{x\to\infty} a_n \neq 0}$ **ise,** $\boldsymbol{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$ **serisi ıraksaktır.**

IV. $\boldsymbol{n \in \mathbb{Z}^+}$ **için** $\boldsymbol{a_n < b_n}$ **ise,** $\boldsymbol{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$ **yakınsak ise,** $\boldsymbol{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n}$ **serisi de yakınsaktır.**

A) I ve IV **B) Yalnız III** **C) I, III** **D) I, III, IV** **E) III, IV**

Çözüm : I. Mutlak yakınsaklığın tanımıdır ve doğrudur

II. Yanlıştır. Örneğin, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisinin genel teriminin limiti sıfır olmasına rağmen ıraksaktır.

III. Doğrudur

IV. Yanlıştır. Belirli bir indisten sonraki her elemanı yakınsak bir serinin elemanlarından büyük olan bir seri yakınsak olmayabilir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsaktır. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ dir ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır.

---

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n n!}$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $e^{\pi} - 1$ **B)** $e^{1/\pi}$ **C)** $e^{-1/\pi}$ **D)** $e^{1/\pi} - 1$ **E)** e^{π}

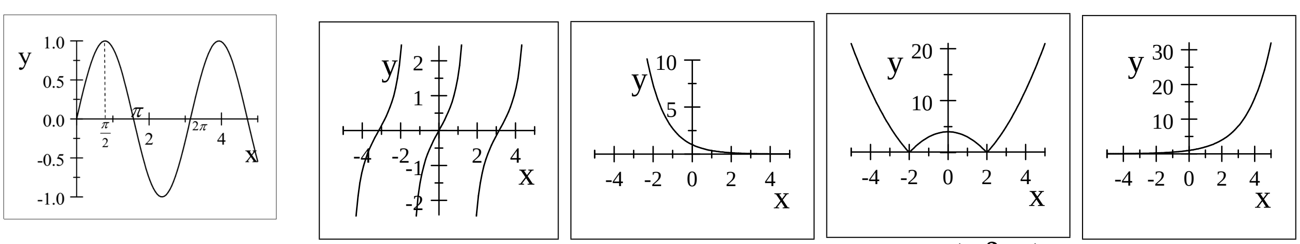
Çözüm : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olduğunu kullanacağız. Buna göre,

$$e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ olduğundan, } x = \frac{1}{\pi} \text{ için, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n n!} = e^{1/\pi} - 1$$

bulunur.

---

9. Aşağıda grafiği ve denklemi verilen fonksiyonlardan kaç tanesi yanlıştır?



I. $y = \sin 2x$ **II.** $y = \tan x$ **III.** $y = e^x$ **IV.** $y = |x^2 - 4|$ **V.** $y = \ln x$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

Çözüm : I, III ve V yanlış verilmiştir. I, $\sin x$'in, III, $\ln x$'in V ise e^x'in grafiğidir.

A A

10. $R = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -6 & -3 & b \\ -2 & a & c \end{bmatrix}$ **matrisi ortogonal matris olduğuna göre,** $a + b + c = ?$

A) 1 **B)** -5 **C)** -2 **D)** 3 **E)** -11

Çözüm : Ortogonal bir matriste tüm satırlar ve sütunlar birbirine dik olmalı. S ile satırları, K ile sütunları göstermek üzere,

$$\begin{aligned} S_1 &\perp S_2 \Leftrightarrow \langle S_1, S_2 \rangle \Leftrightarrow -18+6-6b=0 \Rightarrow b=-2, \\ K_1 &\perp K_2 \Leftrightarrow \langle K_1, K_2 \rangle \Leftrightarrow -6+18-2a=0 \Rightarrow a=6, \\ S_1 &\perp S_3 \Leftrightarrow \langle S_1, S_3 \rangle \Leftrightarrow -6-12-6c=0 \Rightarrow c=-3, \end{aligned}$$

olduğundan, $a+b+c=c=1$ olur.

---

11. $a_1 = \sqrt{2}$ ve $n > 1$ için $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$ olduğuna göre (a_n) dizisinin limiti kaçtır?

A) 1 **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 5**

Çözüm : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ olsun. Buna göre, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = x$ olacağından,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2-a_n} = \sqrt{2 - \lim_{n\to\infty} a_n} \Rightarrow x = \sqrt{2-x}$$

denkleminden $x=1$ bulunur.

---

12. $y = \int\limits_{x^2}^{x^4} e^{t^2}\, dt$ olduğuna göre, $\dfrac{dy}{dx}(1)$ kaçtır?

A) $4e^2+2e$ **B) $2e^4+e^2$** **C) $2e$** **D) $2e^4$** **E) $4e+2$**

Çözüm : $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_{a(x)}^{b(x)} F(t)\, dt\right) = F(b(x))\, b\prime(x) - F(a(x))\, a'(x)$ formülünü kullanacağız. Buna göre,

$$\frac{dy}{dx} = \left(4x^3\right)\left(e^{x^8}\right) - (2x)\left(e^{x^4}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx}(1) = 4e - 2e = 2e$$

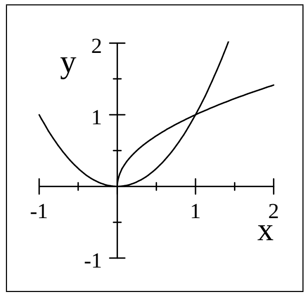
olur. Yanıt C.

---

13. $y = x^2$ parabolü ile ve $y = \sqrt{x}$ parabolü arasında kalan bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{\pi}{10}$ **B) $\dfrac{3\pi}{10}$** **C) $\dfrac{\pi}{6}$** **D) $\dfrac{\pi}{3}$** **E) $\dfrac{7\pi}{10}$**

Çözüm : y ekseni etrafındaki dönme olduğundan, hacim $V = \pi \int\limits_a^b \left(f^2(y) - g^2(y)\right) dy$ formülüyle bulunabilir.



$y^2 = \sqrt{y}$ denkleminden, $y = 0$ ve $y = 1$ olduğu kolayca görülür. O halde hacim

$$V = \pi \int_0^1 (y - y^4)\, dy = \frac{3\pi}{10}$$

olur.

---

14. $f(x)$, $\mathbb{R}$'de sürekli bir fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki fonksiyonlardan kaç tanesi $\mathbb{R}$'de <u>kesinlikle</u> süreklidir?

I. $\sin f(x)$ **II.** $\sqrt{f(x)}$ **III.** $\cot f(x)$ **IV.** $\ln f(x)$ **V.** $e^{f(x)}$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 4

Çözüm : I ve V kesinlikle sürekli olacaklardır. Fakat, II, III ve IV sürekli olmayabilirler. Örneğin, $f(x) = x - 1$ için,

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{x-1},\ \ \cot(x-1) = \frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)} \ \text{ ve } \ln(x-1)$$

tüm reel sayılar kümesinde sürekli değillerdir.

A A

15. Aşağıdakilerden hangisi üçüncü mertebeden (basamaktan) bir lineer diferansiyel denklemdir?

A) $y^3 + y'' + y' = e^x \cos x$ **B)** $y''' - 2x^3 y'' + y' + \ln y = 0$ **C)** $y''' - 2(y')^3 + y = 0$

D) $x^3 y'' - xy' - y' = \ln(x^3)$ **E)** $y''' + (\cos x)\, y''' - y' + \sin x = 0$

Çözüm : $a_3(x)\, y''' + a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$ formunda olan tek seçenek E seçeneğidir.

---

16. $\boldsymbol{y'-y=2x}$ **diferensiyel denkleminin** $\boldsymbol{y(0)=1}$ **koşulunu sağlayan çözümü aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\boldsymbol{y=2e^{x}-x-1}$ **B)** $\boldsymbol{y=2e^{2x}+x-1}$ **C)** $\boldsymbol{y=3e^{x}-2x-2}$

D) $\boldsymbol{y=e^{3x}-x}$ **E)** $\boldsymbol{y=e^{2x}+x}$

Çözüm : Denklem 1. mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir. Buna göre,

$y'+P(x)\,y=Q(x)\Rightarrow \mu(x)=e^{\int P(x)dx}$ ve $y=\dfrac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)\,Q(x)\,dx+c\right]$

formülü kullanılırsa, $P(x)=-1$ olduğundan,

$$\mu(x)=e^{\int -dx}=e^{-x}\Rightarrow y=\frac{1}{e^{-x}}\left[\int e^{-x}2xdx+c\right]=\frac{1}{e^{-x}}\left(-2e^{-x}(x+1)+c\right)=-2x-2+ce^{x}$$

bulunur. Buradan, $y(0)=1$ için, $c=3$ olacağından, $y=3e^{x}-2x-2$ elde edilir.

2. Yol : Seçeneklere göre $y'-y$ farkının $2x$ olduğu tek seçeneğin C olduğu görülebilir.

---

17. $\boldsymbol{\dfrac{d^2y}{dx^2}=x^2+e^{x}}$ **diferansiyel denkleminin** $\boldsymbol{y(0)=1}$ **ve** $\boldsymbol{y'(0)=0}$ **koşullarını sağlayan çözümü aşağıdakilerden hangisidir? (ÖABT - 2013)**

A) $\boldsymbol{y=x^3+e^{x}-1}$ **B)** $\boldsymbol{y=\frac{2}{3}x^3-x+e^{x}}$ **C)** $\boldsymbol{y=\frac{x^4}{5}-x^2+e^{x}}$

D) $\boldsymbol{y=\frac{x^4}{12}-x+e^{x}}$ **E)** $\boldsymbol{y=\frac{x^5}{6}-x^2+e^{x}}$

Çözüm : $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=x^2+e^{x}\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\int\left(x^2+e^{x}\right)dx=e^{x}+\dfrac{1}{3}x^3+c_1$ eşitliğinden,

$y'(x)=e^{x}+\dfrac{1}{3}x^3+c_1$ olur. $y'(0)=0$ olduğundan, $c_1=1$'dir. Diğer yandan,

$$\frac{dy}{dx}=e^{x}+\frac{1}{3}x^3+1\Rightarrow y=e^{x}+\frac{x^4}{12}+x+c_2$$

olur ki, $y(0)=1$ için, $c_2=0$ bulunur. Yanıt $y=\dfrac{x^4}{12}-x+e^{x}$.

---

18. $\boldsymbol{(4x+y)\,dx+(2y+x)\,dy=0}$ **diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\boldsymbol{2x^2+y^2+2xy=c}$ **B)** $\boldsymbol{x^2+y^2+4xy=c}$ **C)** $\boldsymbol{2x^2+y^2+xy=c}$

D) $\boldsymbol{x^2+y^2+4xy=c}$ **E)** $\boldsymbol{x^2+y^2+2xy=c}$

Çözüm : $M(x,y)=4x+y$, $N(x,y)=2y+x$ ve $M_y=1=N_x$ olduğundan denklem tam diferansiyel denklemdir. Gruplandırma yöntmi ile çözülebilir.

$$\begin{aligned}(4x+y)\,dx+(2y+x)\,dy=0 &\Rightarrow 4xdx+(ydx+xdy)+2ydy=0\\ &\Rightarrow \int 4xdx+\int(ydx+xdy)+\int 2ydy=\int 0\\ &\Rightarrow 2x^2+\int d(xy)+y^2=c\end{aligned}$$

olduğundan, denklemin çözümü $2x^2+xy+y^2=c$ elde edilir.

19. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

I. G grubunun mertebesi 9 ise G abeldir.

II. G grubunun mertebesi 3 ise G abeldir ve devirlidir.

III. $|G| = 12$ ise G nin mertebesi 6 olan altgrubu vardır.

IV. $\mathbf{GL}(3,\mathbb{R}) \leq \mathbf{SL}(3,\mathbb{R})$ dir.

A) I B) I ve II C) III D) III ve IV E) II ve IV

Çözüm : **I.** doğrudur. Çünkü, p asal sayı olmak üzere, mertebesi p^2 olan her grup abeldir. (Not : p^n için genelleme yapılamaz, örneğin mertebesi 2^3 olan ve abel olmayan grup vardır.)

II. doğrudur. Mertebesi p asal sayısı olan her grup devirlidir ve abeldir.

III. yanlıştır. Lagrange teoreminin tersi her zaman doğru değildir. Lagrange teoremine göre, G sonlu grubunda, $H \leq G$ ise $|H| \mid |G|$ olur. Fakat, tersi yani, $k \mid |G|$ ise G grubunun mertebesi k olan altgrubu olmayabilir. Örneğin, $|A_4| = 12$ dir. $6 \mid 12$ olmasına rağmen, A_4 grubunun mertebesi 6 olan bir altgrubu yoktur.

IV. Yanlıştır. $\mathbf{SL}(3,\mathbb{R})$ kümesi yani, determinantı 1 olan 3×3 matrislerin kümesi, determinantı sıfırdan farklı olan (tersini matrisler) matrislerin kümesi olan $\mathbf{GL}(3,\mathbb{R})$ kümesinin bir altgrubudur. Yani doğrusu, $\mathbf{SL}(3,\mathbb{R}) \leq \mathbf{GL}(3,\mathbb{R})$ olmalıydı.

Not : Temel Matris Grupları

Genel Lineer Grup : $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$,

Special(Özel) Lineer Grup : $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$,

Ortogonal Grup : $\mathbf{O}(n,\mathbb{R}) = \left\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^T = A^{-1},\ \det A = \pm 1\right\}$ ve

Special Ortogonal Grup : $\mathbf{SO}(n,\mathbb{R}) = \left\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^T = A^{-1},\ \det A = 1\right\}$

---

20. X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

olarak veriliyor. Buna göre, X'in beklenen değeri kaçtır?

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{9}$ E) 1

Çözüm : Beklenen değer, $E(x) = \int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 x(2x)\,dx = \frac{2}{3}$ bulunur.

---

21. X rastgele değişkeni, yüzlerinde 1,2,3,4,5,6 olan iki zarın atılmasında, üste gelen sayıların toplamını gösterdiğine göre, $P(X \geq 10)$ olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{5}{18}$

Çözüm : $X \geq 10$ koşulunun olduğu durumlar, zarların $(4,6)$; $(6,4)$; $(5,5)$; $(6,5)$; $(5,6)$ ve $(6,6)$ gelmesi durumlarıdır. Evrensel kümemiz 36 olduğundan, yanıt $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ olur.

---

22. $\boldsymbol{u, v, w} \in \mathbb{R}^3$ **vektörleri için aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?** ($\times$ vektörel çarpımı, $\langle .,. \rangle$ ise iç çarpımı göstermektedir.)

I. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$

II. $\langle \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$

III. $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{u}$

IV. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \sin \boldsymbol{\theta}$

V. $\boldsymbol{u} // \boldsymbol{v}$ **ise** $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

VI. $\langle \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \mathbf{det}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

VII. $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ **iken** $\dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}$ **daima birim vektördür.**

A) 1 **B) 0** **C) 2** **D) 3** **E) 4**

Çözüm : I. Doğru. Karma çarpıma göre, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \langle \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$yazılabilir.

II ve III Doğru, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ vektörü hem u, hem de v'ye diktir.Yani, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ vektörünün hem u, hem de v ile iç çarpımı 0'dır.

IV. Yanlış. Eşitliğin sol tarafı vektör, sağ tarafı skaler olamaz. Doğrusu, $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \sin \boldsymbol{\theta}$ olmalıydı.

V. İki vektör birbirine paralel ise, vektörel çarpımın determinant tanımı göz önüne alınırsa, sonucun $\mathbf{0}$ (sıfır vektörü) olacağı kolayca görülebilir.

VI. Doğru, Karma çarpımı determinant ile de ifade edebiliriz.

VII. Doğru, sıfırdan farklı bir vektörü normuna bölerek birim vektör elde edebiliriz.

---

23. X **rastgele değişkeni için**

$$\boldsymbol{f}\,(x) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\binom{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}}, \qquad \boldsymbol{x} = \mathbf{0, 1, 2, 3}$$

olasılık fonksiyonu verilmiştir. Bu fonksiyon için 1. moment ($\boldsymbol{m_1}$) nedir?

A) $\mathbf{\frac{3}{2}}$ **B)** $\mathbf{\frac{1}{8}}$ **C)** $\mathbf{\frac{1}{2}}$ **D)** $\mathbf{\frac{3}{8}}$ **E) 0**

Çözüm : 1. yol :

$$m_x(t) = \sum_{x=0}^{3} e^{tx} \frac{1}{8}\binom{3}{x} = \frac{1}{8}\left(1 + 3e^t + 3e^{2t} + e^{3t}\right) = \frac{1}{8}\left(e^t + 1\right)^3$$

olduğundan, $m_x'(t) = \frac{3}{8}\left(e^t+1\right)^2 e^t \Rightarrow m_1 = m_x'(0) = \frac{3}{8}\left(e^0+1\right)^2 e^0 = \frac{3}{2}$ olur.

2.yol :

$$\begin{aligned} m_1 &= E(X) = \sum_{x=0}^{3} x f(x) = 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) + 3f(3) \\ &= 0 + \frac{1}{8}\binom{3}{1} + \frac{2}{8}\binom{3}{2} + \frac{3}{8}\binom{3}{3} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

olduğu bulunabilir.

24. $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ **matrisinin karakteristik denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\boldsymbol{x^3 + x^2 - 3x - 8}$ **B)** $\boldsymbol{x^3 - 3x - 8}$ **C)** $\boldsymbol{x^3 + 3x^2 - 8}$

D) $\boldsymbol{x^3 + 3x - 8}$ **E)** $\boldsymbol{x^3 - 3x^2 - 8}$

Çözüm : Bir A kare matrisinin karakteristik polinomu $P(x) = \det(xI - A)$ ile bulunur. Buna göre,

$$P(x) = \det(xI - A) = \det\left(\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = x^3 - 3x^2 - 8.$$

---

25. $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

A) 6 **B) 4** **C) 5** **D) 12** **E) 24**

Çözüm : İlk satırı diğer tüm satırlardan çıkaralım. Determinant değişmez. Üçgensel matrisin determinantı ise asal köşegendeki elemanların çarğımına eşittir.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

---

26. $\boldsymbol{A^T A = AA^T = I}$ **ise** $\boldsymbol{A}$ **matrisine ortogonal matris denir.** $\boldsymbol{A}$ **bir ortogonal matris olmak üzere,**

$$\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} + \mathbf{det}\, \boldsymbol{A^T} + \mathbf{det}\, \boldsymbol{A^{-1}} + \mathbf{det}\, \boldsymbol{A^2} = \boldsymbol{x}$$

ise $\boldsymbol{x}$**'in olabileceği değerlerin toplamını bulunuz.**

A) 6 **B) 4** **C) 1** **D) 0** **E) 2**

Çözüm : $\det\left(A^T A\right) = \det I \Rightarrow \det A^T \det A = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$ olabilir. Buna göre,

$$\det A = \det A^T \text{ ve } \det A^n = (\det A)^n$$

olduğu da kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \Rightarrow \det A + \det A^T + \det A^{-1} + \det A^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4; \\ \det A &= -1 \Rightarrow \det A + \det A^T + \det A^{-1} + \det A^2 = -1 - 1 - 1 + 1 = -2; \end{aligned}$$

olacağından, yanıt $4 - 2 = 2$ olur.

27. $(\mathbb{Z}_{18},+)$ **grubunun bütün alt gruplarının sayısı kaçtır?**

A) 3 **B) 4** **C) 6** **D) 8** **E) 9**

Çözüm : $\mathbb{Z}_{18}$ devirli grubunun her $d>0$, $d \mid 18$ için, mertebesi d olan bir alt grubu vardır. $18=2\cdot 3^2$ olduğundan, poizitif bölen sayısı $B(18)=(1+1)(2+1)=6$ kadar alt grubu vardır. Bunlar, $<1>$, $<2>$, $<3>$, $<6>$, $<9>$ ve $<18>$ gruplarıdır.

---

28. $(\mathbb{Z}_{12}^{*},\cdot)$ **grububun farklı devirli alt gruplarının sayısı kaçtır?**

A) 2 **B) 4** **C) 9** **D) 18** **E) 6**

Çözüm : $\mathbb{Z}_{12}^{*}$ grubunun elemanları 12 ile aralarında asal olan $\mathbb{Z}_{12}$'nin elemanlarından oluşur. Buna göre, $\mathbb{Z}_{12}^{*}=\{1,5,7,11\}$'dir. $<1>=<1>$, $<5>=\{5,1\}$, $<7>=\{7,1\}$ ve $<11>=\{11,1\}$ olmak üzere, $\mathbb{Z}_{12}^{*}$'nin 4 tane devirli altgrubu vardır.

---

29. $\boldsymbol{\sigma=(3456)}$, $\boldsymbol{\tau=(1573246)}$ **olduğuna göre** $\boldsymbol{\tau\sigma\tau^{-1}}$ **permütasyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

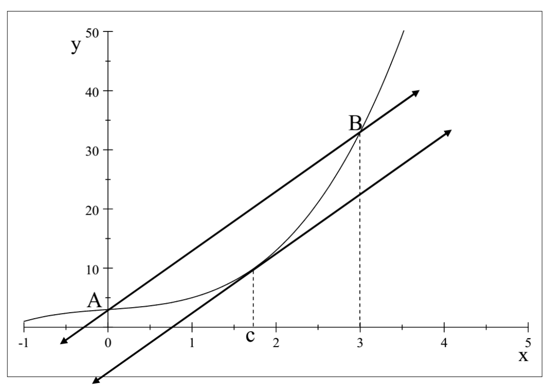
A) (3456) **B) (16)(574632)** **C) (2671)** **D) (1674253)** **E)(16)(74253)**

Çözüm : Birinci Yol : $\tau\sigma\tau^{-1}=\tau(3)\,\tau(4)\,\tau(5)\,\tau(6)=(2671)$'dir.

İkinci Yol : $\tau^{-1}=(6423751)$ olduğundan, $(1573246)(3456)\,(6423751)=(6712)=(2671)\,.$

---

30. **Şekilde** $\boldsymbol{y=x^3+x+3}$ **fonksiyonunun** $\boldsymbol{[-1,\infty)}$ **aralığındaki grafiği verilmiştir.** $\boldsymbol{x=0}$ **ve** $\boldsymbol{x=3}$ **apsisli A ve B noktalarından geçen doğru ile** $\boldsymbol{x=c}$ **apsisli noktada eğriye teğet olan doğru birbirine paralel olduğuna göre,** $\boldsymbol{c}$ **kaçtır?**



A) $\sqrt{3}$ **B)** $\dfrac{4}{3}$ **C)** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

D) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ **E)** $\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$

Çözüm : Ortalama değer teoremine göre, f fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir ise,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde en az bir c noktası vardır. Yani, A,B noktalarını birleştiren doğrunun eğimine eşit olan bir teğet doğru mutlaka vardır. AB doğrusunun eğimi : $m=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{33-3}{3}=10$ olduğundan, $f'(c)=10$ olan c noktasını yani, eğimi 10 olan teğetin eğriye değme noktasının apsisini bulalım. $f'(x)=3x^2+1\Rightarrow 3c^2+1=10\Rightarrow c=\sqrt{3}$ bulunur.

31. Aşağıda serilerden kaç tanesi mutlak yakınsaktır?

$$\text{I)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \quad \text{II)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{III)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{IV)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n} \quad \text{V)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n$$

A) 5 **B) 4** **C) 3** **D) 2** **E) 1**

Çözüm : $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine mutlak yakınsak seri denir. Buna göre, I. Iraksaktır, II. Mutlak Yakınsaktır. III. Yakınsaktır, fakat mutlak yakınsak değildir. Çünkü, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi harmonik seri olup, ıraksak bir seridir. IV. Mutlak Yakınsaktır. V. Mutlak Yakınsak Geometrik seridir. Yanıt C.

A A

32. Aşağıda denklemleri verilen kümelerden hangisi $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayıdır?

A) $xyz = 0$ **B)** $x + y + z = 1$ **C)** $\dfrac{y + 2x}{2} = z$ **D)** $\dfrac{x + y}{2} = 1$ **E)** $z = x + 1$

Çözüm : $\mathbf{V}$, bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ altkümesi aşağıdaki koşulları sağlarsa, $\mathbf{W}$ kümesine $\mathbf{V}$ uzayının bir altuzayı denir.

1. Sıfır vektörü $\mathbf{W}$'nun elemanı olmalıdır.

2. $a \in \mathcal{F}$ ve $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}$ ise $\mathbf{u} + a\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ olmalıdır. ($\mathbf{W}$'nun Kapalı Lineer Olması)

Buna göre, sıfır vektörüne sahip olan seçenekler sadece A ve C seçenekleridir. Fakat, A seçeneği, 2. koşul olan kapalı lineerlik koşulunu sağlamaz. Gerçekten, $(0,1,1), (1,0,0) \in \mathbf{W} = \{(x,y,z) : xyz = 0\}$ olmasına rağmen, $(0,1,1) + (1,0,0) = (1,1,1) \notin \mathbf{W}$'dir. Doğru yanıt C. Bu seçeneğin bu iki koşulu sağladığı kolayca görülebilir.

---

33. $\vec{x} \times \vec{y} = 2i + 6j + 2k$ olduğuna göre, $\vec{x}$ vektörü aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) $(1, -2, 5)$ **B)** $(3, -2, -3)$ **C)** $(-4, 1, 1)$ **D)** $(1, 1, -4)$ **E)** $(0, 1, -3)$

Çözüm : $\vec{x} \times \vec{y}$ vektörü, hem $\vec{x}$, hem de $\vec{y}$ vektörüne dik olan bir vektördür. O halde, $\vec{x}$ vektörü $(2,6,2)$ vektörüne dik olması gerekir. Seçeneklerde, bu vektöre dik olmayan tek vektör $(3,-2,-3)$ vektörüdür. Gerçekten, $\langle (3,-2,-3), (2,6,2) \rangle = -12$'dir.

---

34. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3}$, $z = 1$ ve $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z$ doğruları arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

A) 1 **B) 2** **C) 3** **D) 0** **E) −1**

Çözüm : $\vec{u} = (2,3,0)$ ve $\vec{v} = (3,-2,1)$ olduğundan, $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} = 0$ bulunur.

---

35. Köşelerinin koordinatları $A(1,1,1)$, $B(3,1,2)$, $C(1,2,3)$ olan üçgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ **B)** $\dfrac{3}{2}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ **D)** $\sqrt{6}$ **E)** $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

Çözüm : $\vec{x} = \overrightarrow{AB} = (2,0,1)$ ve $\vec{y} = \overrightarrow{AC} = (0,1,2)$ diyelim. Buna göre, üçgenin alanı :

$$Alan\,(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{\langle \vec{x},\vec{x}\rangle \langle \vec{y},\vec{y}\rangle - \langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 5 - 2^2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

olarak bulunur.

---

36. $\boldsymbol{u_1 = (1,1,2)}$, $\boldsymbol{u_2 = (1,2,0)}$, $\boldsymbol{u_3 = (1,0,4)}$, $\boldsymbol{u_4 = (2,3,2)}$, $\boldsymbol{u_5 = (1,1,1)}$ **olmak üzere, aşağıdaki vektör kümelerinden kaç tanesi $\mathbb{R}^3$ için bir tabandır.**

I. $\{\boldsymbol{u_1, u_2, u_3}\}$ **II.** $\{\boldsymbol{u_1, u_2, u_5}\}$ **III.** $\{\boldsymbol{u_2, u_3, u_4}\}$

IV. $\{\boldsymbol{u_1, u_3, u_1+u_3}\}$ **V.** $\{\boldsymbol{u_1, u_2, u_1+u_3}\}$

A) 0 **B) 1** **C) 2** **D) 3** **E) 4**

Çözüm : 1. Yol.

I taban değildir. Çünkü, $\det(\boldsymbol{u_1, u_2, u_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$ 'dır. Ayrıca, determinant özellikleri gereği **V**'de taban olamaz. (Çünkü, bu determinantta 3'üncü satıra birinci satır eklenmiş, determinant değişmez.)

IV'ün taban olmadığı aşikar. Bir satır, diğer iki satırın toplamı ise determinant sıfırdır. $\det(\boldsymbol{u_1, u_3, u_1+u_3}) = 0$.

II'ye bakalım. $\det(\boldsymbol{u_1, u_2, u_5}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ olduğundan, $\{\boldsymbol{u_1, u_2, u_5}\}$ tabandır.

III'e bakalım. $\det(\boldsymbol{u_2, u_3, u_4}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ olduğundan, $\{\boldsymbol{u_2}, u_3, \boldsymbol{u_4}\}$ de taban değildir.

Yanıt 1.

2. Yol. Verilen vektörleri sırasıyla matrisin satırları olarak yazıp, eşelon forma getirelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_2 \to S_2 - S_1 \\ S_3 \to S_3 - S_1 \\ S_2 \to S_4 - 2S_1 \\ S_5 \to S_5 - S_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_3 \to S_3 + S_2 \\ S_4 \to S_4 - 2S_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_5$ bir taban olabilir. Fakat, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$, taban olarak alınamaz. Dolayısıyla $\{\boldsymbol{u_1, u_3, u_1+u_3}\}$ ve $\{\boldsymbol{u_1, u_2, u_1+u_3}\}$ kümeleri de taban olarak alınamaz.

37. $A(1,1,1)$, $B(3,1,2)$, $C(1,2,3)$ ve $D(3,2,k)$ noktaları aynı düzlemde ise k kaçtır?

A) $\frac{7}{2}$ **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** $\frac{5}{2}$

Çözüm : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ vektörleri aynı düzlemde olmalı, yani $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,0,1)\,, \ \ \overrightarrow{AC} = C - A = (0,1,2)\,, \ \ \overrightarrow{AD} = D - A = (2,1,k-1)\,,$$

için,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k-1 \end{vmatrix} = 2k - 8 = 0 \Rightarrow k = 4$$

elde edilir.

---

38. A ve B, S örnek uzayında herhangi iki olay olsun ($P(B) \neq 0$). B verilmişken A olayının koşullu olasılığı $P(A \diagup B)$ ile gösterilsin. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $P(A \diagup A) = 1$ **B)** $P(A \diagup S) = P(A)$ **C)** $P(\varnothing \diagup S) = 1$

D) $A \subset B$ ise $P(A \diagup B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$ **E)** $P(A \diagup B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Çözüm : Koşullu olasılık tanımı $P(A \diagup B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ 'dır ve E doğrudur. Diğer yandan,

A) $P(A \diagup A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$ olduğundan doğrudur.

B) $P(A \diagup S) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(A)}{1} = P(A)$ olduğundan doğrudur.

C) $P(\varnothing \diagup S) = \dfrac{P(\varnothing \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(\varnothing \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0}{1} = 0$ olduğundan yanlıştır.

D) $A \subset B$ için $P(A \diagup B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$ olduğundan doğrudur.

---

39. $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki Taylor seri açılımı şağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-1)^n}{n!}$ **B)** $\dfrac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n!}$ **C)** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-1)^n}{n!}$

D) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n!}$ **E)** $e\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n!}$

Çözüm : Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki Taylor açılımı,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

biçimindedir. Buna göre, $f(1)=e^{-1}$, $f'(1)=-e^{-1}$, $f''(1)=e^{-1}$, $f'''(1)=-e^{-1}, \ldots$ olduğundan,

$$e^{-x}=e^{-1}+\frac{-e^{-1}}{1!}(x-1)+\frac{e^{-1}}{2!}(x-1)^2+\frac{-e^{-1}}{3!}(x-1)^3+\cdots=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{\boldsymbol{n}}}{n!}$$

elde edilir. Yanıt A.

---

40. Herhangi bir $\boldsymbol{\alpha}$ eğrisinin, $\boldsymbol{\alpha(a)}$ ve $\boldsymbol{\alpha(b)}$ noktaları arasındaki yay uzunluğu $\boldsymbol{s=\int_a^b \|\alpha'(u)\|\,du}$ ile bulunabilir. Buna göre, $\boldsymbol{\alpha(t)=(\cos t)\,\mathrm{i}+(\sin t)\,\mathrm{j}+(2t)\,\mathrm{k}}$ eğrisinin $\boldsymbol{\alpha(0)}$ ve $\boldsymbol{\alpha(2)}$ noktaları arasındaki uzunluğu kaçtır?

A) $\boldsymbol{\sqrt{11}}$ **B)** $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ **C)** $\boldsymbol{5\sqrt{2}}$ **D)** $\boldsymbol{2\sqrt{10}}$ **E)** $\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

Çözüm : $\alpha'(t)=(-\sin t,\cos t,2)$ ve $\|\alpha'(t)\|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+4}=\sqrt{5}$ olduğundan,

$$s=\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}}\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,dt=\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}}\sqrt{5}dt=\left.\sqrt{5}t\right|_0^2=2\sqrt{5}$$

bulunur.

ÇIKARILAN SORULAR

$i = \sqrt{-1}$, π, $0,\overline{3}$ (devirli) ve $\sqrt{2}$ sayıları için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I- Dördü de cebirsel sayıdır.

II- π transandant (aşkın) ve $2,\overline{3}$, i ve $\sqrt{2}$ cebirsel sayıdır.

III- Sadece π irrasyonel sayıdır.

IV- π, $0,\overline{3}$ ve $\sqrt{2}$ irrasyonel sayıdır.

A) Yalnız II B) I, III C) II, III D) Yalnız IV E) II, IV

$(\mathbb{Z}_{12}, \oplus, \otimes)$ halkasının sıfır bölenlerinin sayısı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 4