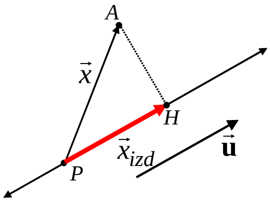
İZDÜŞÜM

Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler

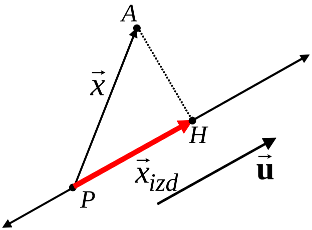
4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Bir A noktasının, verilen bir doğru üzerindeki izdüşüm noktası denilince, doğru üzerindeki A noktasına en yakın olan bir H noktası anlaşılır.
AH doğrusu, izdüşüm alınan doğruya dik bir doğru oluşturur. Bu anafikir kullanılarak, bir noktanın bir doğru üzerine dik izdüşüm noktası kolayca elde edilebilir.
Bunun yanında, bir noktanın, verilen doğru üzerindeki izdüşüm noktasını bulmak için, izdüşüm vektörünü kullanabiliriz. Bu bölümde, izdüşüm alınan nokta A ile izdüşüm noktası ise H ile gösterilecektir.



İzdüşüm Noktasının Elde Edilmesi



Buna göre, izdüşüm noktasını iki ana yöntemle elde etmek mümkündür.

Birinci Yöntem : Şekilden de takip edileceği gibi,

i) H noktası, üzerine izdüşüm alındığı doğru denklemini sağlar.

ii) $\overrightarrow{AH} \perp \vec{\mathbf{u}}$ olmalıdır.

Bu iki bilgi kullanılarak, H noktası kolayca elde edilir.

Örnek

$y = 2x - 1$ doğrusunun, $A(1, 2)$ noktasına en yakın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Doğrunun doğrultmanı : $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 2)$ *'dir. H noktası, doğru üzerinde olduğundan koordinatları* $H(t, 2t-1)$ *formundadır.*

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{\mathbf{u}} \Leftrightarrow (t-1, 2t-3) \perp (1, 2) \Longleftrightarrow t - 1 + 4t - 6 = 0$$

eşitliğinden, $t = \dfrac{7}{5}$ *olur. O halde, H noktasının koordinatları :*

$$H(t, 2t-1) = H(7/5, 9/5)$$

bulunur.

Örnek

$\mathbf{\frac{x-1}{2} = y = z}$ **doğrusunun, A $\mathbf{(1,2,3)}$ noktasına en yakın koordinatlarını bulunuz.**

Çözüm

Doğrunun doğrultmanı : $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (2,1,1)$ *'dir. H noktası, doğru üzerinde olduğundan koordinatları*

$$\frac{x-1}{2} = y = z = t \Rightarrow H(2t+1, t, t)$$

formundadır.

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{\mathbf{u}} \Leftrightarrow (2t, t-2, t-3) \perp (2,1,1) \Leftrightarrow 4t + t - 2 + t - 3 = 0,$$

eşitliğinden, $t = \frac{5}{6}$ *olur. O halde, H noktasının koordinatları :*

$$H(2t+1, t, t) = H(8/3, 5/6, 5/6)$$

bulunur.

Dik İzdüşüm Noktasının Bulunması için İkinci Yöntem

İkinci Yöntem : Bu yöntemde ise, bir $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünün bir $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörü üzerindeki izdüşüm vektörünün :

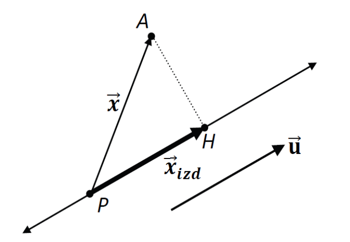
$$\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{y}}$$

olduğu kullanılarak yapılabilir. Burada, P noktası doğru üzerinde bir nokta olmak üzere, $\overrightarrow{PA}$ vektörünün doğrunun doğrultman vektörü üzerine izdüşümü kullanılarak, H noktası elde edilecektir. Aşağıdaki teoremde bu yöntemi kullandık.

Teorem

Bir A noktasından, doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *olan ve P noktasından geçen bir d doğrusu üzerine çizilen dikme ayağının koordinatları,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{PA}$ *olmak üzere,* $H = P + \dfrac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle}{\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}$ *ile bulunur.*

Kanıt.



Doğrunun herhangi bir P noktasını alalım. $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ diyelim. Doğrunun doğrultman vektörü de, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olsun. Buna göre, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü,

$$\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} = \frac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle}{\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}$$

olur. $\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} = \overrightarrow{PH}$ vektörü olduğundan, $H - P = \dfrac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle}{\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow H = P + \dfrac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle}{\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}$ elde edilir. $\square$

Örnek

$y = 2x - 1$ doğrusunun, $A(1,2)$ noktasına en yakın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Doğrunun doğrultmanı : $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,2)$ *'dir. Doğru üzerindeki herhangi bir nokta* $P(1,1)$ *alınabilir. Buna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{PA} = (0,1)$ *olduğundan,*

$$H = P + \frac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle}{\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,1) + \frac{2}{5}(1,2) = \left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5} \right)$$

elde edilir.

Örnek

$\frac{x-1}{2} = y = z$ doğrusunun, $A(1,2,3)$ noktasına en yakın olduğu noktasının koordinatları bulunuz.

Çözüm

Doğru üzerindeki herhangi bir P noktası, $P(1,0,0)$ alınabilir.

$\overrightarrow{u} = (2,1,1)$ *ve* $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{PA} = (0,2,3)$ *olduğundan,*

$$H = P + \frac{\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u} \rangle}{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle} \overrightarrow{u} = (1,0,0) + \frac{\langle (0,2,3), (2,1,1) \rangle}{\langle (2,1,1), (2,1,1) \rangle} (2,1,1) = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6} \right)$$

bulunur.

Problem

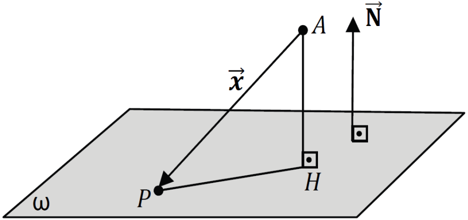
$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}$, $z=1$ *doğrusunun,* $A(1,1,1)$ *noktasına en yakın olduğu noktasının koordinatları bulunuz.*

Problem

$\dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z+1}{2}$ *doğrusunun,* $A\left(1,1,1\right)$ *noktasına en yakın olduğu noktasının koordinatları bulunuz.*

Bir Noktanın, Düzlem Üzerindeki Dik İzdüşüm Noktasının Koordinatları

Bir A noktasının, verilen bir düzlem üzerindeki izdüşüm noktası denilince, düzlem üzerindeki A noktasına en yakın olan bir H noktası anlaşılır. AH doğrusu, izdüşüm alınan doğruya dik, **yani düzlemin normaline paraleldir.** Bu anafikir kullanılarak, bir noktanın bir düzlem üzerine dik izdüşüm noktası kolayca elde edilebilir. Ayrıca, izdüşüm vektörü kullanılarak da H noktası bulunabilir.

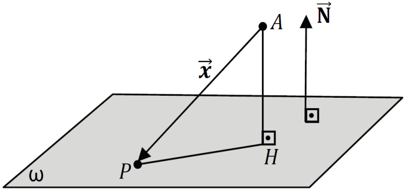


Buna göre, izdüşüm noktasını iki ana yöntemle elde etmek mümkündür.
<u>Birinci Yöntem :</u> Şekilden de takip edileceği gibi,

i) $\overrightarrow{AH} \parallel \overrightarrow{\mathbf{N}}$ olmalıdır.

ii) H üzerine izdüşüm alındığı düzlem denklemini sağlar.

Bu iki bilgi kullanılarak, H noktası kolayca bulunabilir.
Bu yöntemi, şu şekilde de uygulayabiliriz. A noktasından geçen ve doğrultusu $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{N}}$ olan, doğrunun denklemi bulunur. Bu doğru ile düzlemin kesişimi istenen noktadır.



Örnek

$x + y - 2z = 5$ düzleminin, $A(1, 2, 3)$ noktasına en yakın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

İstenen nokta $H(a, b, c)$ olsun.

$$\overrightarrow{AH} \| \overrightarrow{\mathbf{N}} \Leftrightarrow \frac{a-1}{1} = \frac{b-2}{1} = \frac{c-3}{-2} = k$$

olmalıdır. Buradan, $H(a, b, c) = H(k+1, k+2, -2k+3)$ olur. H noktası düzlem denklemini sağlayacağından,

$$(k+1) + (k+2) - 2(-2k+3) = 5$$

eşitliğinden, $k = \dfrac{4}{3}$ olur. O halde, $H = \left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ elde edilir.

Çözüm

2.Yol : *Öncelikle, A noktasından geçen ve doğrultmanı :* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{N}} = (1, 1, -2)$ *olan doğruyu bulalım.*

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2} = k$$

doğrusunun, $x + y - 2z = 5$ *düzlemiyle kesişimi istenen noktadır.*

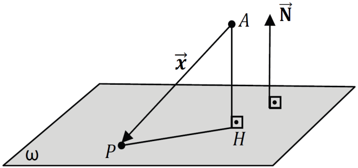
$$(k+1) + (k+2) - 2(-2k+3) = 5 \Rightarrow k = 4/3$$

olduğundan, $H = (7/3, 10/3, 1/3)$ *elde edilir.*

İkinci Yöntem : Bu yöntemde ise, bir $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünün bir $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörü üzerindeki izdüşüm vektörünün :

$$\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{y}}$$

olduğu kullanılarak yapılabilir. Burada, P noktası düzlem üzerinde bir nokta olmak üzere, $\overrightarrow{AP}$ vektörünün düzlemin normal vektörü üzerine izdüşümü kullanılarak, H noktası elde edilecektir. Aşağıdaki teoremde bu yöntemi kullandık.



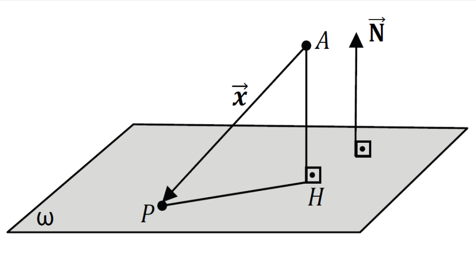
Teorem

Bir A noktasından, normali $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ olan ve P noktasından geçen bir ω düzlemi üzerine çizilen dikme ayağının koordinatları,

$$H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{N}}$$

ile bulunur.

Kanıt.



Düzlemin herhangi bir P noktasını alalım. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ diyelim. $\overrightarrow{AH}$ vektörü, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörüdür. Buna göre,

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{N}} \Rightarrow H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{N}}$$

elde edilir. □

Örnek

$x + y - 2z = 5$ düzleminin, $A(1,2,3)$ noktasına en yakın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Düzlem üzerindeki herhangi bir P noktası, $P(2,3,0)$ alınabilir. Düzlemin normali, $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (1,1,-2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{AP} = (1,1,-3)$ *olduğundan,*

$$H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{N}}, \overrightarrow{\mathbf{N}} \right\rangle}\overrightarrow{\mathbf{N}} = (1,2,3) + \frac{\langle (1,1,-3),(1,1,-2)\rangle}{\langle (1,1,-2),(1,1,-2)\rangle}(1,1,-2) = \left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

bulunur.

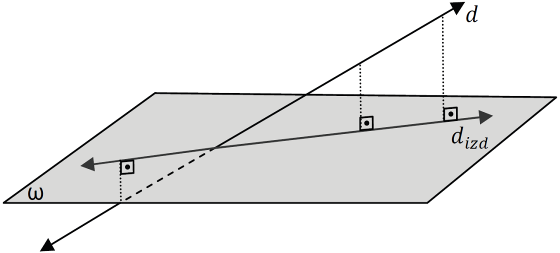
Problem

$2x + y - z = 5$ *düzleminin* $A(1, 2, 3)$ *noktasına en yakın koordinatlarını bulunuz.*

Problem

$x + 2y - z = 5$ *düzleminin* $A\left(1, 2, 3\right)$ *noktasına en yakın koordinatlarını bulunuz.*

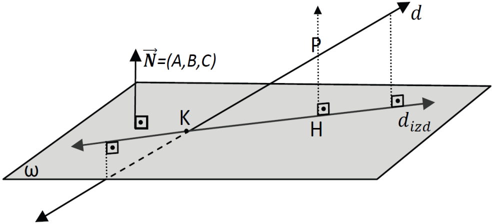
Dik İzdüşüm Doğrusu



Tanım

Düzlemi dik kesmeyen bir d doğrusunun, her noktasının düzlem üzerine dik izdüşümlerinin alınmasıyla düzlem üzerinde elde edilen doğruya, d doğrusunun **dik izdüşüm doğrusu** denir ve d_{izd} ile gösterilir. Doğru, düzlemi dik keserse dik izdüşümü sadece bir nokta olur.

Dik İzdüşüm Doğrusunun Bulunması



1. Adım : d doğrusu ile düzlemin K kesişim noktası bulunur.
2. Adım : P, doğru üzerindeki bir nokta ve P'nin düzlem üzerindeki izdüşümü de H noktası olmak üzere PH doğrusunun denklemi bulunur. Bunun için, PH doğrusunun doğrultmanının $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{N}}$ olduğu kullanılır.
3. Adım : Denklemi bulunan PH doğrusuyla düzlemin kesişim noktası olan H noktası bulunur.
4. Adım : İki noktası bilinen doğru denkleminden, K ve H'den geçen dik izdüşümü doğrusunun denklemi belirlenir.

Örnek

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z$ **doğrusunun** $2x+y+z=11$ **düzlemi üzerindeki dik izdüşüm doğrusunun denklemini bulunuz.**

Çözüm

1. Adım. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z=k$ *diyelim. Buna göre,* $x=2k+1,\ \ y=3k+1,\ \ z=k$ *eşitlikleri düzlem denkleminde yerine yazılırsa,*

$$2\left(2k+1\right)+\left(3k+1\right)+k=11$$

denkleminden $k=1$ *olarak bulunur. O halde,* $K\left(3,4,1\right)$ *olur.*

2. Adım. $\overrightarrow{\mathbf{u}}=\overrightarrow{\mathbf{N}}=\left(2,1,1\right)$ *ve* $P\left(1,1,0\right)$ *olduğundan, PH doğrusunun denklemi :*

$$d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}=\lambda$$

olur.

Çözüm

3. Adım. $x = 2\lambda + 1$, $y = \lambda + 1$ *ve* $z = \lambda$ *değerlerini düzlem denkleminde yerine yazalım.*

$$2\left(2\lambda + 1\right) + \left(\lambda + 1\right) + \lambda = 11$$

denkleminden $\lambda = \dfrac{4}{3}$ *olur ve* H *noktası,* $H(\dfrac{11}{3}, \dfrac{7}{3}, \dfrac{4}{3})$ *bulunur.*

4. Adım. *HK doğrusunun denklemi :*

$$\frac{x-3}{\dfrac{11}{3}-3} = \frac{y-4}{\dfrac{7}{3}-4} = \frac{z-1}{\dfrac{4}{3}-1} \quad \text{veya} \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-1}{1}$$

bulunur.

Problem

$x-1=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{2}$ *doğrusunun* $x+y-z=6$ *düzlemi üzerindeki dik izdüşüm doğrusunun denklemini bulunuz.*