MATRİSLER

Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Tanım

$\mathcal{F}$ bir sayı kümesi olmak üzere, $i = 1, 2, ..., m$ ve $j = 1, 2, ..., n$ için, $a_{ij} \in \mathcal{F}$ elemanlarıyla oluşturulan, $m \cdot n$ elemanlı

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

biçimindeki tabloya $\mathcal{F}$ kümesi üzerinde $m \times n$ türünde (tipinde) bir **matris** denir. Bu matris kısaca,

$$\left[a_{ij}\right], i = 1, 2, ..., m \text{ ve } j = 1, 2, ..., n \quad \text{veya} \quad \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$$

şeklinde gösterilebilir.

Tanım

(Matrisin satır ve sütunları) Matrisler genel olarak A, B, C şeklinde büyük harfler ile gösterilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sıralı $n-$lilerine bu **matrisin satırları** ve

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

sıralı $m-$lilerine de bu **matrisin sütunları veya kolonları** denir. Genel olarak, m satır ve n sütunlu, ve elemanları $\mathcal{F}$ kümesinden alınan matrislerin kümesi, $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}_n^m$ veya $\mathcal{F}_{m\times n}$ ile gösterilir.

Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix}\pi & 1 & 2 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 3 & 3/4\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_{2\times 4}(\mathbb{R}),\quad B=\begin{bmatrix}\overline{1} & \overline{4} & \overline{0}\\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{3}\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

$$C=\begin{bmatrix}1+i & i\\ 3-i & 2\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}),\qquad D=\begin{bmatrix}1 & 2/3\\ 3/5 & 2\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q}).$$

Matrisin elemanlarını indislerle net olarak belirtebiliriz. Örneğin, yukarıdaki matrisler için elemanlar aşağıdaki gibi belirtilebilir.

$$a_{21}=0,\ a_{11}=\pi,\quad b_{23}=\overline{3},\ c_{12}=i,\ d_{21}=3/5.$$

Matris Çeşitleri

Şimdi, en temel matris çeşitlerinin tanımlarını verelim.

1. Sıfır Matrisi : Tüm elemanları sıfır olan matrise **sıfır matrisi** denir. 0 ile gösterilir.

Örneğin, $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi 2×3 türünden sıfır matrisidir.

2. Kare Matris : Satır ve sütun sayıları eşit olan matrise **kare matris** denir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisi $n \times n$ türünden bir kare matristir. Bir kare matrisde, a_{ii} elemanlarının bulunduğu köşegene, matrisin **asal köşegeni** denilir. Yani, matrisin $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarının bulunduğu köşegendir.

3. Köşegen matris : Bir kare matrisin asal köşegeni hariç tüm elemanları sıfır ise, bu matrise köşegen matris denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4. Üçgen matris : Bir kare matrisin asal köşegeninin üstündeki veya altındaki elemanların tamamı sıfır ise bu matrise üçgen matris denir. Eğer köşegenin üstündeki elemanlar sıfır ise, **alt üçgensel matris,** altındaki elemanlar sıfır ise de **üst üçgensel matris** denir.
Yani, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinde her $i < j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine **alt üçgensel matris**, her $i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine **üst üçgensel matris** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisleri sırasıyla üst üçgensel ve alt üçgensel matrislerdir.

5. Birim Matris : Bir köşegen matrisin tüm elemanları 1 ise bu matrise **birim matris** denir. $n \times n$ türünden birim matris I_n ile gösterilir.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisi, $n \times n$ türünden birim matristir.

6. Skaler Matris : Bir köşegen matrisin tüm elemanları birbirine eşit ise bu matrise **skaler matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisi bir skaler matristir.

Tanım

Aynı türden iki matrisi toplayabiliriz. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ise, A ve B matrislerinin toplamı

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 12 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } A + B = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 15 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

olur.

Tanım

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için, A matrisinin λ sayısıyla çarpımı

$$\lambda A = \lambda [a_{ij}]_{m \times n} = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } 4A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 20 & -16 & 8 \end{bmatrix}$$

olur.

Toplama Özelikleri : A, B, C matrisleri, $m \times n$ türünden matrisler olsun.

i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Birleşme Özeliği)

ii) $A + B = B + A$ (Değişme Özeliği)

iii) $A + 0 = A$ (Etkisiz Eleman)

iv) $A + (-1)A = 0$ (Ters Eleman)

Skalerler Çarpım Özelikleri : A, B matrisleri, $m \times n$ türünden matrisler ve $r, s \in \mathbb{R}$ olsun.

i) $r \in \mathbb{R}$ için, $r(A + B) = rA + rB$

ii) $(r + s)A = rA + sA$

iii) $(rs)A = r(sA)$

iv) $1 \cdot A = A$

Not Matrislerde toplama ve skalerle çarpım işlemlerinin bu özeliklerine göre, matrislerin kümesi, reel sayılar kümesi üzerinde **Vektör Uzayı** aksiyomlarını sağlar.

İki Matrisin Çarpımı

Tanım

$A = [a_{ij}]_{m\times p}$ ve $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ olsun. Elemanları,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n)$$

şeklinde oluşturulan $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ matrisine **A ile B matrisinin çarpımı** denir ve bu matris AB şeklinde gösterilir. Tanımdan da görüldüğü gibi, iki matrisin çarpılabilmesi için, **birinci matrisin sütun sayısı, ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır.** A ve B matrislerinin AB çarpımı mümkün ise, A ve B matrislerine AB sırasında, çarpılabilir matrisler denir. AB çarpımının mümkün olması BA çarpımının mümkün olmasını gerektirmez. $m \times n$ ve $n \times k$ türünden iki matrisin çarpımı $m \times k$ türünden bir matristir.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \end{bmatrix}$ **ve** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{23} \\ \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} & \mathbf{b}_{33} \end{bmatrix}$ **matrislerini çarpalım.**

Çözüm : A matrisinin sütun sayısı, B matrisinin satır sayısına eşit olduğundan, AB çarpımı mümkündür ve 2×3 türünden bir matristir. Fakat, B matrisinin sütun sayısı, A matrisinin satır sayısına eşit olmadığından, BA çarpımı mümkün değildir. Tanım kullanılırsa

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ ise } \mathbf{AB} = ?$$

Çözüm

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 18 & 7 \end{bmatrix} \textit{ olur.}$$

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ ise } \mathbf{AB} = ?$$

Çözüm

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \textit{ olur.}$$

Örnek

$\mathbf{a_{ij} = (i-2j)^{i-j}}$ **ve** $\mathbf{b_{ij} = \dfrac{ij}{i+j}}$ **olmak üzere,** $\mathbf{A = [a_{ij}]_{4\times 3}}$ **ve** $\mathbf{B = [b_{ij}]_{3\times 5}}$ **matrisleri veriliyor. Buna göre,** $\mathbf{AB = C = [c_{ij}]}$ **ise,** $\mathbf{c_{41} =?}$

Çözüm

C matrisinin elemanları $c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$ *ile elde edilir. Buna göre,*

$$c_{41} = \sum_{k=1}^{3} a_{4k} b_{k1} = a_{41} b_{11} + a_{42} b_{21} + a_{43} b_{31}$$

toplmını bulmalıyız. Buradan,

$$c_{41} = (4-2)^{4-1} \cdot \frac{1 \cdot 1}{1+1} + (4-4)^{4-2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2+1} + (4-6)^{4-3} \frac{3 \cdot 1}{3+1} = \frac{5}{2}$$

elde edilir. Siz de $c_{42} = \dfrac{44}{15}$ *olduğunu görünüz.*

Problem

$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i<j \\ 2, & i=j \\ 0, & i>j \end{cases}$ **olmak üzere,** $A = [a_{ij}]_{4\times 5}$ **ve** $b_{ij} = \begin{cases} 1, & i\neq j \\ 2, & i=j \end{cases}$ **olmak üzere,** $B = [b_{ij}]_{5\times 6}$ **matrisi veriliyor.** $C = AB = [c_{ij}]_{4\times 6}$ **çarpımında,** c_{34} **elemanını hesaplayınız.**

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{-5} \end{bmatrix}$ **olduğuna göre $\mathbf{A}^{\mathbf{n}}$ matrisini hesaplayınız.**

Çözüm

Önce, sırasıyla, A^2, A^3 *ve* A^4*'ü hesaplayalım.*

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ -18 & -11 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ -18 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 12 \\ -27 & -17 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = AA^3 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 12 \\ -27 & -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 16 \\ -36 & -23 \end{bmatrix}$$

Bu şekilde devam mı edeceğiz!!!
Bir kuralı var mı acaba?

Çözüm

Bu matrislere göre,

$$A^n = \begin{bmatrix} 6n+1 & 4n \\ -9n & -6n+1 \end{bmatrix}$$

olduğu düşünülebilir. Fakat bunu da tümevarımı kullanarak kanıtlamalıyız.

$n = 1$ *için doğrudur ve* $n = k$ *için,* $A^k = \begin{bmatrix} 6k+1 & 4k \\ -9k & -6k+1 \end{bmatrix}$ *olduğunu kabul edelim.*

$$A^{k+1} = AA^k = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6k+1 & 4k \\ -9k & -6k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(k+1)+1 & 4(k+1) \\ -9(k+1) & -6(k+1)+1 \end{bmatrix}$$

olduğundan, iddiamız $n = k+1$ *için de doğru olur. O halde,*

$$A^n = \begin{bmatrix} 6n+1 & 4n \\ -9n & -6n+1 \end{bmatrix}$$

olduğu kesindir.

Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre,* A^{100} *matrisini hesaplayınız.* **Yanıt :** $A^{100} = -A$.

Problem

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre,* A^{100} *matrisini hesaplayınız.* **Yanıt :** $A^{100} = A$.

Teorem

A, $m \times p$ türünden, B, $p \times q$ türünden ve C, $q \times n$ türünden birer matris olsunlar.
i) $(AB)C = A(BC)$ eşitliği sağlanır. (Birleşme Özelliği)
ii) $A(B + C) = AB + AC$ özelliği sağlanır. (Dağılma Özelliği)
iii) $r, s \in R$ olsun. Bu durumda, $(rA)(sB) = (rs)AB$ özelliği sağlanır.

Kanıt.

i) $A = [a_{ij}]_{m\times p}$, $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ ve $C = [c_{ij}]_{q\times n}$ olsunlar.

$$AB = [a_{ij}]\,[b_{ij}] = [d_{ij}]_{m\times q} \text{ ve } d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad BC = [b_{ij}]\,[c_{ij}] = [e_{ij}]_{p\times n} \text{ ve } e_{ij} = \sum_{r=1}^{q} b_{ir} c_{rj}$$

$$(AB)\,C = [d_{ij}]\,[c_{ij}] = [u_{ij}]_{m\times n} \text{ ve } u_{ij} = \sum_{s=1}^{q} d_{is} c_{sj} = \sum_{s=1}^{q}\sum_{t=1}^{p} a_{it} b_{ts} c_{sj}$$

$$A\,(BC) = [a_{ij}]\,[e_{ij}] = [v_{ij}]_{m\times n} \text{ ve } v_{ij} = \sum_{t=1}^{p} a_{it} e_{tj} = \sum_{t=1}^{p}\sum_{s=1}^{q} a_{it} b_{ts} c_{sj}$$

eşitliklerinden, $(AB)\,C = A\,(BC)$ bulunur. Diğerlerini de siz kanıtlayınız. □

Not Matrislerde çarpma işleminin değişme özelliği yoktur. $AB \neq BA$ 'dır. Eğer $AB = BA$ eşitliği sağlanıyorsa A ve B matrisleri değişmelidir denir.

Problem

$(A+B)^2$ *ifadesini hesaplayınız.*

Örnek

A kare matrisi için, $A^{p+1} = A$ şeklinde bir $p > 0$ tamsayısı var ise, A matrisine periyodik matris denir. Bu eşitliği sağlayan en küçük p sayısına da A matrisinin periyodu denir. Buna göre, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ **matrisinin periyodunu bulunuz.**

Çözüm

$C^{p+1} = C$ olacak şekildeki en küçük p değerini arıyoruz.

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C^3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = C$$

O halde, $p+1=3 \Rightarrow p=2$ olacağından, C matrisinin periyodu 2'dir.

Örnek

Sıfır matrisinden farklı bir A kare matrisi için, $\mathbf{A^p = 0}$ olacak şekilde bir $\mathbf{p > 0}$ tamsayısı var ise, A matrisine nilpotent matris denir. En küçük p'ye de Nilpotentlik derecesi denir. Buna göre,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

matrisinin nilpotent matris olduğunu gösteriniz. Nilpotentlik derecesini bulunuz.

Çözüm

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan, A matrisi niloptent matristir ve nipotentlik derecesi 2'dir.

Bir Matrisin Transpozesi

Tanım

Bir matrisin satır ve sütunlarını değiştirerek elde edilen matrise o matrisin **transpozesi** denilir ve bir A matrisinin transpozesi A^T ile gösterilir.
Buna göre, bir $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin transpozesi $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ şeklinde olacaktır.
$(A^t)_{ij} = a_{ji}$ yazabiliriz.
Örneğin, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -7 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ matrisi için $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ biçimindedir.

Teorem

$A = [a_{ik}]_{m\times p}$ ve $B = [b_{kj}]_{p\times n}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $(A^T)^T = A$
2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4) $(AB)^T = B^T A^T$

Kanıt.

İlk üçü oldukça açıktır. Dördüncüsünü kanıtlayalım.

$$\left((AB)^T\right)_{ji} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(B^T\right)_{jk} \left(A^T\right)_{ki} = \left(B^T A^T\right)_{ji}$$

olur. Bu ise, $(AB)^T = B^T A^T$ olduğunu gösterir. $\square$

Simetrik Matris

Tanım

Bir matriste elemanlar asal köşegene göre simetrik ise, bu matrise **simetrik matris** denir. Devriği kendisine eşit olan matris **simetrik matristir.** Yani, $A^T = A$ ise A bir simetrik matristir. Diğer bir tanımla, bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinde, her i, j için $a_{ij} = a_{ji}$ ise A matrisine **simetrik matris** denir.

Örneğin,

$$A = A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisi bir simetrik matristir.

Ters Simetrik Matris

Tanım

Bir matriste elemanların asal köşegene göre sadece işaretleri farklı ise, bu matrise ters **simetrik matris** denir. Diğer bir tanımla, bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinde, her i, j için $a_{ij} = -a_{ji}$ ise A matrisine **ters simetrik matris** denir. Devriği negatifine eşit olan matris ters **simetrik matristir.** Yani, $A^T = -A$ ise A bir ters simetrik matristir.

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & -6 & 0 \end{bmatrix} \text{ için } A^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -6 \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

ve $A^T = -A$ olduğundan, A bir ters simetrik matristir. Kısaca,

Örnek

Ters simetrik matrisin asal köşegenindeki elemanların 0 olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *matrisi ters simetrik olsun. Bu durumda,* $\forall i, j$ *için*

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

olacaktır. $i = j$ *alınırsa,*

$$a_{ii} = -a_{ii}$$

eşitliğinden,

$$2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$$

elde edilir. Bu asal köşegendeki elemanların 0 olduğunu gösterir.

Örnek

Her kare matris, simetrik ve ters simetrik iki matrisin toplamı olarak yazılabilir ve bu yazılış tek türlüdür. Kanıtlayınız

Çözüm

S simetrik ve T ters simetrik matrisler olmak üzere, herhangi bir A kare matrisi $A = S + T$ olacak şekilde S ve T matrislerinin varlığını arayalım.

$$A^T = S^T + T^T = S - T$$

olduğundan,

$$A + A^T = 2S \Rightarrow S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$$

ve buradan da, $T = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$ elde edilir.
$A = S_1 + T_1$ olacak şekilde başka bir yazılış olduğunu kabul edersek, $S_1 = S$ ve $T_1 = T$ olması gerektiği sonucuna varılır. Yani yazılış tek türlüdür.

Problem

A matrisi ters simetrik matris ise, A^3 matrisinin de ters simetrik olacağını gösteriniz.

Problem

A ve B matrisleri simetrik ise, AB çarpımının simetrik olmayabileceğini gösteriniz.

Hermityen Matris

Tanım

$\overline{A}$, A matrisinin elemanlarının karmaşık(kompleks) eşleniklerinin alınmasıyla elde edilen matrisi göstermek üzere, bir A kare matrisi için, $A = \left(\overline{A}\right)^T$ ise, A matrisine **hermitiyen matris** denir. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2+i \\ 1+i & 2 & 3-4i \\ 2-i & 3+4i & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri birer hermityen matristir. $A = \left(\overline{A}\right)^T$ ve $B = \left(\overline{B}\right)^T$ olduğu kolayca görülebilir. Her reel simetrik matrisin bir Hermityen matris olduğu açıktır. Bu matrislere dikkat edilirse, asal köşegendeki elemanlar reel sayıdır. Aklımıza, Hermityen matrislerin asal köşegenindeki elemanların reel sayı olup olmayacağı sorusu gelir. Aşağıdaki örnekle bu soruyu yanıtlayalım.

Örnek

Bir hermitiyen matrisin köşegen elemanlarının reel sayı olması gerektiğini gösteriniz.

Çözüm

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisini alalım. Buna göre,

$$\left(\overline{A}\right)^T = [\overline{a_{ji}}]_{n \times n}$$

olacaktır. Buna göre, $i = j$ için,

$$a_{ii} = \overline{a_{ii}}$$

olması gerekir. Bir karmaşık sayının eşleniğinin kendisine eşit olması, bu sayının imajiner kısmının olmaması durumunda, yani bir reel sayı olması durumunda mümkündür. O halde, asal köşegen elemanları reel sayı olmalıdır.

Tersinir Matris - Singüler Matris

Tanım

A ve B, $n \times n$ türünden kare matrisler olsun. Eğer,

$$AB = BA = I$$

ise, B'ye A matrisinin tersi $(B = A^{-1})$ ve A yada B matrisinin tersi $(A = B^{-1})$ denir. Bir matrisin tersi var ise, bu matrise **regüler matris** veya **tersinir matris** denir. Eğer, matrisin tersi yok ise, matrise **singüler** veya **tekil matris** denilir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersi yoktur ve singülerdir.

NOT

$\triangle = ad - bc \neq 0$ *ise* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *matrisinin tersi vardır ve*

$$A^{-1} = \frac{1}{\triangle}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ile bulunur. Doğruluğunu, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ *olduğunu göstererek kanıtlayabiliriz. Buradaki,* $\triangle = ad - bc$ *değerine* A *matrisinin determinantı denir. Determinantı ve bir matrisin tersinin bulunmasını daha sonra detaylı olarak inceleyeceğiz.*

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini bulunuz.**

Çözüm

$\triangle = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -5$ *olduğundan,* $A^{-1} = \dfrac{1}{-5} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ *olur.*

Problem

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.* **Yanıt :** $A^{-1} = \dfrac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$

Teorem

A ve B, $n \times n$ türünden kare matrisler olsun. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ eşitliği vardır.

Kanıt.

$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ ve benzer şekilde, $\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = I_n$ olduğundan, tanım gereği AB matrisinin tersi $B^{-1}A^{-1}$ olur. Yani, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir. □

Teorem

Bir matrisin tersi var ise tektir.

Kanıt.

A matrisinin tersi, hem C hem de B olsun. Buna göre,

$$AB = BA = I \text{ ve } AC = CA = I \text{ ise}$$

$$AB = I \Rightarrow C(AB) = CI = C \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow IB = C \Rightarrow B = C$$

elde edilir. Yani, iki farklı tersi olamaz. □

Teorem

A, $n \times n$ türünden bir kare matris olsun. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ eşitliği vardır.

Kanıt.

$\left(A^T\right)\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^T\right)^{-1}\left(A^T\right) = I$ yazılabilir. Diğer yandan,

$$A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I^T = I \qquad \text{ve} \qquad \left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = I^T = I$$

olduğundan, hem $\left(A^T\right)^{-1}$ hem de $\left(A^{-1}\right)^T$ matrisi A^T matrisinin tersidir. Fakat bir matrisin tersi tek olduğundan, $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ elde edilir. □

Örnek

Bir A matrisinin tersi varsa ve AB = 0 ise B = 0 olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$AB = 0$ eşitliğinin her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılısa, $A^{-1}AB = A^{-1}0$ eşitliğinden, $B = 0$ bulunur.

Ortogonal Matris

Tanım

Bir A matrisinin tersi, transpozesine eşit ise, A matrisine **ortogonal matris** denir. Yani, $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine ortogonal matris denir. Bir matrisin tersini bulmadan da, ortogonal olup olmadığını kontrol edebiliriz. $A^{-1} = A^T$ eşitliğinin her iki tarafının A ile çarpılmasıyla elde edilen,

$$A^T A = AA^T = I$$

eşitliği sağlanırsa, A matrisi ortogonal bir matristir. Ortogonal kelimesi, geometride dik kelimesiyle eşdeğerdir. Bir matrise neden ortogonal denildiğini, dik olma anlamıyla ilişkisini iç çarpım konusunda göreceğiz.

Örnek

Aşağıdaki matrislerin ortogonal olup olmadıklarını kontrol ediniz.

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ **b)** $\mathbf{B}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **c)** $\mathbf{C}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Çözüm

a) $AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *olduğundan, A ortogonaldir.*

b) $BB^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \neq I$ *olduğu hemen görülebilir. Buna göre B matrisi ortogonal matris değildir.*

c) $CC^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *olduğundan, C matrisi de ortogonal matristir.*

Örnek

A ters simetrik ve B ortogonal matris olduğuna göre,

$$\mathbf{B^{-1}AB}$$

matrisinin ters simetrik olduğunu gösteriniz.

Çözüm

A ters simetrik ise, $A^t = -A$ *ve* B *ortogonal ise* $B^{-1} = B^t$ *olur. O halde,*

$$\begin{aligned}\left(B^{-1}AB\right)^t &= B^t A^t \left(B^{-1}\right)^t \\ &= B^{-1}\left(-A\right)\left(B^t\right)^t \\ &= -\left(B^{-1}AB\right)\end{aligned}$$

olduğundan, $B^{-1}AB$ *matrisi de ters simetriktir.*

Problem

2×2 ve 3×3 türünden birer ortogonal matris örneği veriniz.

Problem

A matrisi ortogonal ise tersinin de ortogonal olduğunu gösteriniz.

Problem

A ve B matrisleri ortogonal ise, AB çarpımının da ortogonal olduğunu gösteriniz.

Problem

Her $t \in \mathbb{R}$ *için,* $\dfrac{1}{1+t+t^2}\begin{bmatrix} -t & t+t^2 & 1+t \\ 1+t & -t & t+t^2 \\ t+t^2 & 1+t & -t \end{bmatrix}$ *matrisinin ortogonal matris olduğunu gösteriniz.*

Bir Matrisin İzi

Bir kare matrisin, asal köşegeni üzerindeki elemanların toplamına **matrisin izi** denir. *izA* ile gösterilir. Yani,

$$izA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

şeklindedir ve aşağıdaki özellikler sağlanır

i) $iz(A+B) = izA + izB$

ii) $c \in \mathbb{R}$ için, $iz(cA) = c.izA$

iii) $iz(AB) = iz(BA)$

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisinin izini bulunuz.**

Çözüm

$izA = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + 2 = 5$'*dir.*

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **ve** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **olmak izere AB matrisinin izini bulunuz.**

Çözüm

$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ *diyelim.* $c_{ii} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{ki}$ *olduğundan,* $iz\,(AB) = \sum_{i=1}^{3} c_{ii} = 7 + 5 + 6 = 18$ *elde edilir.*

Problem

$iz\,(A + B) = izA + izB$ *olduğunu kanıtlayınız.*

Problem

$iz\,(AB) \neq izA \cdot izB$ *olduğunu kanıtlayınız.*

Birinci Elemanter Satır Operasyonu

Tanım

Bir A matrisi verilsin. A matrisinin satırları (veya sütunları) üzerinde yapılan aşağıdaki üç çeşit işleme **elemanter satır (veya sütun) işlemleri** denir.

I) A matrisinin herhangi iki satırını (veya sütununu) kendi aralarında yer değiştirmek. $i - inci$ satır ile $j - inci$ satırın yer değiştirilmesi işlemini $S_i \leftrightarrow S_j$ şeklinde göstereceğiz. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Tanım

II) A matrisinin herhangi bir satırını (veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak. $i-inci$ satırın bir $\lambda \in \mathbb{R}$ ile çarpılmasını, $S_i \rightarrow \lambda S_i$ şeklinde göstereceğiz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \rightarrow 2S_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & -8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Üçüncü Elemanter Satır Operasyonu

Tanım

III) A matrisinin herhangi bir satırını (veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpıp başka bir satırına (veya sütununa) eklemek. $i-inci$ satırın bir λ katının, $j-inci$ satıra eklenmesini, $S_j \rightarrow S_j + \lambda S_i$ şeklinde göstereceğiz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \rightarrow S_2 + 2S_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Sütunlarda yapılan elemanter operasyonlarını, kolon kelimesinin ilk harfi olan K ile göstereceğiz. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Tanım

A ve B matrisleri aynı türden iki matris olsun. B matrisi, A matrisi üzerinde yapılacak elemanter satır (veya kolon) işlemleri sonucu elde edilebiliyor ise A ile B matrisine **denk matrisler** denir. Bu durum $A \sim B$ şeklinde gösterilir.

Örnek

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **matrisinin birim matrise denk bir matris olduğunu gösteriniz.**

Çözüm

Elemanter operasyonları uygulayarak görelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \rightarrow S_2 - S_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \rightarrow S_1 + 2S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \rightarrow -S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eşelon Form - Pivot

Tanım

Bir matrisin tamamı sıfır olmayan herhangi bir satırındaki en solda bulunan sıfırların sayısı, bu satırdan bir önceki satırın en solundaki sıfırların sayısından en az bir fazla ise bu matrise **eşelon formdadır** denir. Bu tanıma göre, eşelon formdaki bir matrisin bir satırı tamamen sıfır ise, bu satırın altındaki tüm satırlar da tamamen sıfır olmalıdır. Eşelon formdaki bir matriste, her satırdaki soldan sıfırdan farklı ilk elemana **pivot** denir. Eşelon formdaki bir matriste, matrisin sol tarafında bulunan sıfırlar merdiven şeklinde basamaklar oluşturdukları için, matrisin basamak biçimi tanımı da kullanılır. Aşağıdaki matrislerin her biri eşelon formdadır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Eşelon Formda Olmayan Matris Örnekleri

Örnek

Aşağıdaki matrisler ise, eşelon formda değildir. Çünkü, birinci matriste, 4'üncü satırda en soldaki sıfır sayısı 1'dir ve bir önceki üçüncü satırdaki en soldaki sıfır sayısından 1 fazla değildir. Yine ikinci matriste ise, üçüncü satırdaki soldaki sıfır sayısı, bir önceki satırın soldaki sıfır sayısından en az 1 fazla değildir. Son matriste de, üçüncü satırın tamamı sıfır olduğundan, bu satırın altındaki satırların da tamamen sıfır olması gerekirdi.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

İndirgenmiş Eşelon Form

Tanım

Bunun yanında, eşelon formdaki bir matriste her satırdaki soldan sıfırdan farklı ilk eleman 1 ise ve bu ilk 1'in olduğu sütundaki geri kalan tüm elemanlar 0 ise bu matrise **indirgenmiş eşelon formdadır** denir. Örneğin aşağıdaki matris indirgenmiş eşelon formdadır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Eşelon Forma Dönüştürülmüş Matris

Tanım

Herhangi bir A matrisine elemanter satır işlemleri uygulanarak, A matrisine denk olan eşelon matris elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen matrise A matrisinin **eşelon forma dönüştürülmüş matrisi** denir.

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$ **matrisini elemanter satır operasyonlarıyla eşelon forma getiriniz.**

Çözüm

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{S_2 \to S_2 - S_1 \\ S_3 \to S_3 - S_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3 \to S_3 - S_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bir Matrisin Rankı

Tanım

Bir A matrisi verilsin. A matrisini elemanter satır operasyonları yaparak eşelon forma getirebiliriz. A matrisinin eşelon formunda, en az bir elemanı sıfırdan farklı olan satır sayısına A **matrisinin rankı** denir ve Rank(A) ile gösterilir. Özel olarak, herhangi bir sıfır matrisinin rankı 0 kabul edilir.
Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi eşelon formdadır ve, en az bir elemanı sıfırdan farklı olan 2 satır (ilk iki satır) olduğundan, rankı 2'dir.

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisinin rankını bulunuz.**

Çözüm

Önce, A matrisine elemanter satır operasyonları uygulayarak eşelon forma getirelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2 \rightarrow S_2 - 2S_1 \\ S_3 \rightarrow S_3 - S_1 \\ S_4 \rightarrow S_4 - 3S_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_3 \rightarrow S_3 - S_2 \\ S_4 \rightarrow S_4 - S_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinde, tüm elemanları sıfır olmayan satır sayısı 2 olduğundan, Rank $A = 2$'dir.

Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{-6} \end{bmatrix}$$ **matrisinin rankını bulunuz.**

Çözüm

Önce, A matrisine elemanter satır operasyonları uygulayarak eşelon forma getirelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 7 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{S_2 \to S_2 - 2S_1 \\ S_3 \to S_3 - S_1 \\ S_4 \to S_4 - S_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{S_3 \to S_3 - S_2 \\ S_4 \to S_4 + S_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinde, tüm elemanları sıfır olmayan satır sayısı 2 olduğundan, Rank $A = 2$'dir.

Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin rankını bulunuz.*

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & k & 3 \\ 1 & 2 & m \end{bmatrix}$$ *matrisinin rankı 2 ise $k+m$ kaçtır.*

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ *matrisinin rankını bulunuz.*

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$ *matrisinin rankını bulunuz.*

Elemanter Satır Operasyonlarıyla Ters Bulma

NOT

Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *matrisinin tersini bulmakta kullanacağımız bu yöntemi biraz daha kolaylaştırabiliriz. Bunun için,* A *matrisinin sağ tarafına bir* $I_{n\times n}$ *matrisi yazılır ve böylece,* $[A : I]$ *biçiminde* $n \times 2n$ *türünden bir matris elde edilir. Bu matrisin sol tarafındaki* A *matrisini birim matrise dönüştürmek için,* $[A : I]$ *matrisine elemanter satır operasyonları uygulanır.* A *matrisi birim haline geliyorsa, tersi vardır ve sağ tarafta bulunan* I *matrisinden elemanter satır operasyonları sonucunda elde edilen matris* A^{-1} *matrisi olur.*
Kısaca,

$$\left[A \mid I \right] \xrightarrow{\text{Elemanter Satır İşlemleri Uygulayarak A'yı birim yap. Bu işlemler, I matrisini de } A^{-1}\text{'e dönüştürür.}} \left[I \mid A^{-1} \right]$$

şeklinde açıklayabiliriz. Bir önceki örneğin, bu şekilde nasıl çözüldüğünü görelim.

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini bulunuz.**

Çözüm

Önce A matrisini, sağ tarafa da I birim matrisi yazıp $[A \mid I]$ *formunda yazalım. Şimdi, A matrisini birim matrise dönüştürecek şekilde elemanter satır operasyonları yapalım.*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \to S_2 - S_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1 \to S_1 + 2S_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_2 \to -S_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}]$$

olduğundan, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *olur.*

Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$ **matrisinin tersini bulunuz.**

Çözüm

Önce A matrisini, sağ tarafa da I birim matrisi yazıp $[A \mid I]$ formunda yazalım. Şimdi, A matrisini birim matrise dönüştürecek şekilde elemanter satır operasyonları yapalım.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\1&3&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[S_3\to S_3-S_1]{S_2\to S_2-S_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&-1&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_3\to S_3+S_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&-2&1&1\end{array}\right]$$

Çözüm

$$\xrightarrow[\substack{S_1 \to S_1 + S_3 \\ S_2 \to S_2 - S_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_1 \to S_1 - 2S_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_3 \to -S_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}\left(\mathbb{Z}_3\right)$ **matrisinin tersi varsa bulunuz.**

Çözüm

Önce A matrisini, sağ tarafa da I birim matrisi yazıp $[A \mid I]$ formunda yazalım. A matrisi $\mathbb{Z}_3$ kümesinde tanımlıdır. Yani, $\{0, 1, 2\}$ elemanlarından oluşan $\bmod 3$'de işlemlerimizi yapacağız. $3 \equiv 0 \pmod 3$ olduğunu unutmayınız. Örneğin, aşağıdaki ilk elemanter operasyonda ilk satırları diğer satırlara toplayarak, ilk sütundaki 2'nin altındaki elemanları $3 \equiv 0$ yaptık. Buna göre,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3 \to S_3 + S_1]{S_2 \to S_2 + S_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

elde edilir ki, sol taraftaki matrisin rankı 2 olduğundan, artık 3×3 türünden birim matris elde etmemiz mümkün değildir. Bu A matrisinin tersinin olmadığını gösterir.

Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

Problem

$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

Ödevler

Problem

$K = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

Problem

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

Problem

$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}\left(\mathbb{Z}_5\right)$ *matrisini tersini bulunuz.*

Problem

$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}\left(\mathbb{Z}_3\right)$ *matrisini tersini bulunuz.*

Problem

$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}\left(\mathbb{Z}_p\right)$ *matrisinin tersi olmadığına göre p asal sayısı kaçtır?*

Problem

$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

Ödevler

Problem

$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

SORU

$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ *ve* $B=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ *ise* $A+B=C=[c_{ij}]$ *için* $\sum_{k=1}^{3} c_{1k}=?$

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

SORU

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ *ve* $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ *ise* $AB = C = [c_{ij}]$ *ise,* $c_{21} = ?$

A) 28 **B)** 26 **C)** 13 **D)** 24 **E)** 16

SORU

A, B, $n \times n$ türünden matrisleri için, aşağıdakilerden hangileri yanlıştır?

I. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ II. $(A+I_n)^2 = A^2 + 2A + I_n$

III. $A^2 = I_n$ ise $A = I_n$'dır. IV. $A^2 = 0_n$ ise $A = 0_n$'dır.

A) I ve III **B)** II ve IV **C)** I ve IV **D)** III ve IV **E)** I,III ve IV

SORU

Matrislerdeki işlemlerle ilgili aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

I. Çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

II. Çarpma işlemine göre her elemanın tersi vardır.

III. Çarpma işleminin değişme özelliği vardır.

IV. Toplama işlemine göre her elemanın tersi vardır.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

SORU

$A=[a_{ij}]_{4\times 3}$ *ve* $B=[b_{ij}]_{3\times 2}$ *matrisleri veriliyor.* $AB=C=[c_{ij}]$ *ise,* c_{32} aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3}$ **B)** $\sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k2}$ **C)** $\sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{2k}$ **D)** $\sum_{k=1}^{4} a_{3k}b_{k2}$ **E)** $\sum_{k=1}^{3} b_{3k}a_{k2}$

SORU

$a_{ij} = (i-j)^i$ ve $b_{ij} = \dfrac{i \cdot j}{i+j}$ olmak üzere, $A = [a_{ij}]_{4\times 3}$ ve $B = [b_{ij}]_{3\times 2}$ matrisleri veriliyor. $AB = C = [c_{ij}]$ ise, $c_{32} = ?$

A) $\dfrac{28}{3}$ **B)** $\dfrac{16}{3}$ **C)** $\dfrac{19}{3}$ **D)** $\dfrac{24}{3}$ **E)** $\dfrac{17}{3}$

SORU

Aşağıdaki matrislerin kaç tanesi ters simetriktir?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

SORU

Aşağıdaki matrislerin kaç tanesi ortogonaldir?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

SORU

$A = \begin{bmatrix} 5/13 & a \\ b & 5/13 \end{bmatrix}$ matrisi ortogonal ise $|a \cdot b| = ?$

A) 0 **B)** $\dfrac{5}{13}$ **C)** $\dfrac{25}{169}$ **D)** $\dfrac{144}{169}$ **E)** 1

SORU

$A=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ matrisi simetrik ve ters simetrik iki matrisin toplamı olarak yazılırsa, simetrik matris hangisi olur?

A) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

SORU

A matrisi ters simetrik ise, aşağıdakilerden hangisi ters simetrik olmayabilir?

A) A^3 **B)** A^2 **C)** A^5 **D)** $-A$ **E)** $2A$

SORU

$A = \begin{bmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{bmatrix}$ *ortogonal matris ise,* $a^2 + b^2$ *kaçtır?*

A) 1 **B)** 2 **C)** 1/2 **D)** 2 **E)** 0

SORU

$$C = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & x & -2 \end{bmatrix}$$ *matrisi ortogonal matris ise* $x = ?$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** -3 **E)** -2

SORU

Aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

I. $A^{-1} = A$ ise A simetriktir.

II. $A^{T} = -A$ ise A ters simetriktir.

III. $A^{-1} = A$ ise A ortogonaldir.

IV. $A^{2} = I$ ise A matrisinin tersi kendisidir.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 0

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin rankı kaçtır?*

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 0

SORU

Elemanları $\mathbb{Z}_5$ cismine ait olan $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}$, matrisinin tersi yoksa $a =?$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 0

SORU

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersi hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

SORU

$\begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3)$ matrisinin tersi hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

SORU

$A = [a_{ij}]_{4\times 10}$, $a_{ij} = \dfrac{j}{j+i}$ ve $B = [b_{ij}]_{10\times 3}$, $b_{ij} = \dfrac{j}{i^2+i}$ olarak tanımlanıyor. Buna göre, $AB = C = [c_{ij}]$ çarpımında c_{21} elemanı kaçtır?

A) 3/7 **B)** 5/12 **C)** 1/4 **D)** 7/12 **E)** 11/12

KAYNAK

Mustafa Özdemir, Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınları, 4. Baskı, İzmir, 2019.