



AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ
BİTİRME ÖDEVİ
ARASINAV SORULARININ
ÇÖZÜMLERİ

ADI SOYADI :

NO :

A A A A A A A

SINAV TARİHİ VE SAATİ :

Bu sınav 40 sorudan oluşmaktadır ve sınav süresi 90 dakikadır.

SINAVLA İLGİLİ UYULACAK KURALLAR

1. Cevap kağıdınıza soru kitapçığımızın türünü işaretlemeyi unutmayınız.
2. Her soru eşit değerde olup, puanlama yapılırken doğru cevaplarımızın sayısından yanlış cevaplarımızın sayısının dörtte biri düşülecektir.
3. Sınavda pergel, cetvel, hesap makinesi gibi yardımcı araçlar ve müsvedde kağıdı kullanılması yasaktır. Tüm işlemlerinizi soru kitapçığı üzerinde yapınız.
4. Sınav süresince görevlilerle konuşulmayacak ve onlara soru sorulmayacaktır. Yanlış olduğunu düşündüğünüz sorularla ilgili, görevlilere soru sormayınız. Bu çok küçük bir olasılık olsa da, jüri bu tür durumları daha sonra değerlendirecektir.
5. Öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.
6. Dışarıya çıkan bir aday tekrar sınava alınmayacaktır.
7. Cep telefonuyla sınava girmek yasaktır. Cep telefonunuzu görevliye teslim ediniz.
8. Soru kitapçıkları toplanacaktır.

1. $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, aşağıdaki f fonksiyonlarından hangisi ya da hangileri $(0, 2)$ aralığında türevlenebilirdir? (Not : $[a]$ ifadesi, tamdeğer a 'yı ifade etmektedir)

I. $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor$,

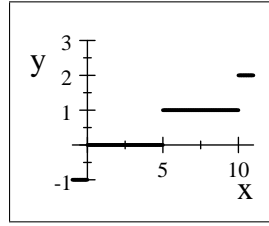
II. $f(x) = \sqrt{x}$

III. $f(x) = |x - 1|$

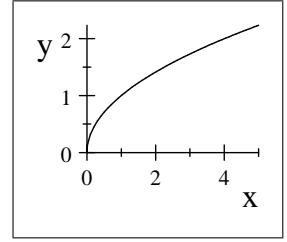
IV. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq 1 \\ 3x - 2, & x > 1 \end{cases}$

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) II, III, IV

Çözüm : IV'ün ve III'ün $x = 1$ noktasında türevlenemediği açıktır. IV. için, $f'(1^-) = 2$ ve $f'(1^+) = 3$ olduğundan, sağdan ve soldan türevler farklı olduğu için $x = 1$ noktasında türevlenemez. III. için, $f'(1^-) = -1$ ve $f'(1^+) = 1$ olduğundan türev yok. I. ve II.'nin türevlenebilir olduğu grafiklerinden de hemen görülebilir.



$(0, 2)$ 'da $f(x) = 0$ 'dır ve türevlenebilir.



$(0, 2)$ aralığında fonksiyon türevlenebilir.

2. $\int_0^2 |x - 1| dx = ?$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) 4

Çözüm : $\int_0^2 |x - 1| dx = \int_0^1 (-x + 1) dx + \int_1^2 (x - 1) dx = 1$

3. $\int \ln x dx = ?$

A) $\ln x + 1$ B) $\ln x - 1$ C) $x \ln x - 1$ D) $\ln x - x$ E) $x(\ln x - 1)$

Çözüm : $\int u dv = uv - \int v du$ kısmi integrasyon formülü uygulayalım. $u = \ln x$ ve $dx = dv$ denilirse,

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \text{ ve } dx = dv \Rightarrow x = v$$

olacağından, $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x$ bulunur.

4. $x = 3t^2$ ve $y = t^3 + 1$ ise $\frac{d^2 y}{dx^2}(1) = ?$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{24}$

Çözüm :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy/dt}{dx/dt} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{3t^2}{6t} \right) = \frac{d(t/2)}{dx} = \frac{d(t/2)/dt}{dx/dt} = \frac{1/2}{6t} = \frac{1}{12t}$$

olduğundan, $\frac{d^2y}{dx^2}(1) = \frac{1}{12}$ olur.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{2n+1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 3

Çözüm : $a_n = \frac{2^n}{2n+1}$ olduğundan, Oran veya kök testinden

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{\frac{2n+3}{2^n}} = 2, \quad \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{2n+1}} = 2$$

olduğundan, yakınsaklık yarıçapı $R = 1/2$ 'dir. $|x-1| \leq 1/2$ için seri yakınsaktır.



6. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

I. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 0$ 'dır. (DOĞRU)

II. $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 0$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır. (YANLIŞ Örneğin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi iraksaktır)

III. $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi iraksaktır. (DOĞRU)

IV. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi, $p \leq 1$ için iraksaktır. (DOĞRU)

- A) Yalnız I B) Yalnız IV C) I, III D) I, III, IV E) III, IV

7. $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2, & x \leq 2 \\ 3x + c, & x \geq 2 \end{cases}$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında türevlenebiliyorsa $c = ?$

- A) -5 B) 4 C) 3 D) -4 E) Hiçbiri

Çözüm : 1) $x = 2$ de sürekli olmalı. O halde, $a \cdot 2^2 - 2 = 3 \cdot 2 + c \implies 4a - c = 8$.

2) $x = 2$ de sağ türev=sol türev olmalı. Buradan, $2 \cdot a \cdot 2 = 3 \implies a = \frac{3}{4} \implies c = -5$. Cevap A.

8. $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} = ?$

- A) π B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Çözüm : $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = x \implies \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \implies \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\arccos \frac{3}{\sqrt{10}} = y \implies \cos y = \frac{3}{\sqrt{10}} \implies \sin y = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$x + y$ 'yi bulmalıyız. Buna göre,

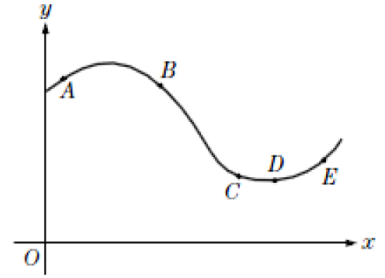
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

eşitliğinden, $\cos(x + y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies x + y = \frac{\pi}{4}$ bulunur. Cevap C.

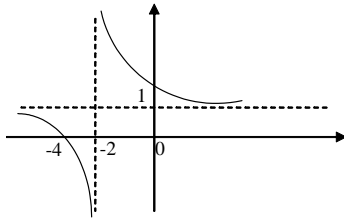
9. Yanda grafiği verilmiş fonksiyonun hangi noktalarda hem birinci, hem de ikinci türevi negatiftir?

- A) A B) B C) C D) D E) E

Çözüm : Söz konusu noktanın bir komşuluğunda fonksiyon hem azalan (1. türev negatif), hem de konkav, yani aşağı büküye (2. türev negatif) olmalıdır. Yanıt B noktasıdır.



10. Aşağıdaki grafiğin denklemi hangisidir?



- A) $y = \frac{x}{x+2}$ B) $y = \frac{x-4}{x+2}$ C) $y = \frac{x+4}{x-2}$ D) $y = \frac{1}{x-2}$ E) $y = \frac{x+4}{x+2}$

Çözüm : 1) $f(-4) = 0$ 'dır. (C ve E sağlar.)

2) $x = -2$ dikey asimptottur. (E sağlar.) Yani $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \mp \infty$ olmalı.

3) $y = 1$ yatay asimptottur. (E sağlar.) Yani $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ olmalı.

Cevap E.

11. $y^3x + x^2y^2 - 4x = 0$ eğrisinin $(1, 1)$ noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?

- A) $-\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $-\frac{4}{5}$ D) $-\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{5}$

Çözüm : $F(x, y) = 0$ için, $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{y^3 + 2xy^2 - 4}{3xy^2 + 2x^2y}$ olduğundan,

$$\frac{dy}{dx}(1, 1) = -\frac{1 + 2 - 4}{3 + 2} = \frac{1}{5}$$

bulunur. Cevap E.

12. $y = 3x + \int_1^{x^2} e^{t^2} dt$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}(1)$ kaçtır?

- A) $2e + 3$ B) $2e^4 + 3$ C) $2e$ D) $2e^4$ E) $e + 3$

Çözüm : $\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} F(x; t) dt \right) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) dt + F(x, b(x)) b'(x) - F(x, a(x)) a'(x)$

formülünden, yani,

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} F(t) dt \right) = F(b(x)) b'(x) - F(a(x)) a'(x)$$

eşitliğinden,

$$\frac{dy}{dx} = 3 + e^{x^4} (x^2)' - e^{1^2} (1)' \implies y'(1) = 3 + 2e$$

elde edilir. Cevap A.

13. Aşağıda $y = -x^2 + 2x$ parabolü ile ve $y = x$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

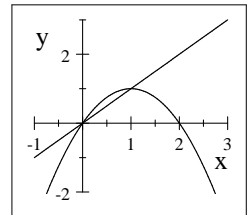
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{7}{6}$

Çözüm : Eğrilerin kesişme noktası $x = -x^2 + 2x$ eşitliğinden,

$$x^2 - x = 0 \implies x = 0, x = 1$$

olur. Buna göre, istenen alan

$$S = \int_0^1 (-x^2 + 2x - x) dx = \int_0^1 (-x^2 + x) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$



bulunur. Cevap C.



14. $y'' - 2y' - 3y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$ başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir? (FLÖSS - 2012)

- A) $y = e^{-x} + 2e^{3x}$ B) $y = 2e^{-x} + e^{3x}$ C) $y = \frac{5}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-3x}$
D) $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{5}{2}e^{-3x}$ E) Hiçbiri

Çözüm : $D^2 - 2D - 3 = 0 \Rightarrow D_1 = -1$ veya $D_2 = 3$ olur. Buna göre, denklemin genel çözümü $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$ formundadır. $y' = -c_1e^{-x} + 3c_2e^{3x}$ olduğundan,

$$y(0) = c_1 + c_2 = 3 \quad \text{ve} \quad y'(0) = -c_1 + 3c_2 = 5$$

eşitliklerinden, $c_1 + c_2 = 3$ ve $-c_1 + 3c_2 = 5$ olur. Buradan, $4c_2 = 8$, $c_2 = 2$, $c_1 = 1$ ve $y = e^{-x} + 2e^{3x}$ elde edilir.

15. $\frac{dy}{dx} = 2xy$, $y(1) = 1$ diferansiyel denkleminin çözümü hangisidir?

- A) $y = e^{x^2} - 2$ B) $y = e^{x^2-1}$ C) $y = e^{x^2-2}$ D) $y = e^{x^2}$ E) $y = e^{x^2+1}$

Çözüm : Ayrılabilir diferansiyel denklemdir. $\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$ şeklinde yazılırsa,

$$\ln y = x^2 + \ln c \Rightarrow y = e^{x^2 + \ln c}$$

olur. $y(1) = 1$ ise, $1 = ce^1$ eşitliğinden, $c = e^{-1}$ bulunur. O halde, $y = e^{x^2 + \ln e^{-1}} \Rightarrow y = e^{x^2-1}$ bulunur.



16. $e^x \cdot y'' + x^2 y' + y = 2y^3$ diferansiyel denklemi için aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

- I. Mertebesi 2'dir. II. Derecesi 3'tür. III. Lineerdir.

- A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III D) II ve III E) Yalnız II

Çözüm : Sadece I doğrudur.

17. Genel çözümü $x^2 + 4y^2 = xy + c$ olan diferansiyel denklem aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $4yy' + x = 0$ B) $2x + 4y' = 0$ C) $(8y - x)y' = y - 2x$
D) $(4y - x)y' = 2x$ E) $2yy' = x + y$

Çözüm : $x^2 + 4y^2 = xy + c$ eşitliğinin x 'e göre türevi alınır, sırasıyla,

$$2x + 8yy' = y + xy' \Rightarrow y'(x - 8y) = 2x - y \Rightarrow y - 2x = (8y - x)y'$$

elde edilir.



18. Aşağıdakilerden kaç tanesi örten fonksiyondur?

I. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 2x - 1$

II. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$

III. $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan x$

IV. $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$

V. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

Çözüm : I. Örten değil. $y = 2$ için $f(x) = 2x - 1 = 2$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{Z}$ yoktur.

II. Örten değil. $y = 0$ için $f(x) = x^3 = 0$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{Z}^+$ yoktur.

III. Örtendir.

IV. Örten değil. $y = 0$ için $f(x) = \frac{1}{x} = 0$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ yoktur.

V. Örten değil. $y = 0$ için $f(x) = 2^x = 0$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ yoktur. Cevap A

19. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & 0 < x \leq 1 \\ 3x^2 + m, & 1 < x < 2 \end{cases}$ fonksiyonunun olasılık yoğunluk fonksiyonu olması için m kaç olmalıdır?

- A) 9 B) 8 C) -8 D) 2 E) -1

Çözüm : $\int_0^1 (2x + 1) dx + \int_1^2 (3x^2 + m) dx = 1$ olmalıdır. Buna göre,

$1 = x^2 + x|_0^1 + x^3 + mx|_1^2 = 2 + (8 + 2x) - (1 + x) = x + 9$ eşitliğinden, $x = -8$ olur. Cevap C

20. X rastgele değişkeni, bir metal paranın 3 kez atılmasında gelen yazıların sayısını gösterdiğine göre, $P(X \leq 2)$ olasılığı kaçtır?

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{3}{8}$

Çözüm : 3 kez yazı gelme olasılığı $P(3) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ve $P(X \leq 2) + P(X > 2) = 1$ dir.

Buradan $P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - P(3) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ Cevap C

21. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, & x \in \mathbb{Q} \\ 2x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ şeklinde tanımlanıyor. S kümesi, f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaların kümesi ise, hangisi doğrudur?

- A) $S = \emptyset$ B) $S = \mathbb{Q}$ C) $S = \mathbb{R}$ D) $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ E) $S = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Çözüm : Fonksiyon sadece $x_0 = 0$ noktasında süreklidir. Çünkü, $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 'dir. Cevap D



22. $T(x, y, z) = (2x + y, x - z, x + y + z)$ lineer dönüşümünün çekirdeği nedir?

- A) $\{(-2t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ B) $\{(t, t, -2t) : t \in \mathbb{R}\}$ C) $\{(0, 0, 0)\}$
D) $\{(t, -2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ E) $\{(t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$

Çözüm : $\text{Çek}(T) = \{u : T(u) = 0\}$

$$(2x + y, x - z, x + y + z) = (0, 0, 0) \implies \left. \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} \implies x = z = t, y = -2t$$

olacağından, $\text{Çek}(T) = \{(t, -2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ bulunur. Cevap D

23. X sürekli rastgele değişken olsun. X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{Diğer Noktalarda} \end{cases} \quad \text{ise } P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right) \text{ olasılığı nedir?}$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{5}{72}$ E) $\frac{1}{12}$

Çözüm : $\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}$ için $F(X) = x$ 'dir.

$$\int_{1/3}^{1/2} P(x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{1/3}^{1/2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{18} = \frac{5}{72}$$

olarak bulunur. Cevap D

24. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 8 D) 6 E) 10

Çözüm : $\det(\lambda I - A) = 0$ 'dan

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$$

denkleminin kökleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 4 \implies \lambda_1 \lambda_2 = 8$ Cevap C

25. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ determinanının değeri nedir?

- A) -6 B) 3 C) 5 D) 4 E) 2

Çözüm : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6$ bulunur.

26. $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ ve $B = [b_{ij}]_{4 \times 4}$ matrisleri veriliyor. $\det A = 3$, $\det B = 4$ ise, $\det (2A^2B^{-2}) = ?$

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{9}{8}$ C) 9 D) 8 E) 24

Çözüm : $\det (2A^2B^{-2}) = 2^4 \det (A^2) \det (B^{-2}) = 16 (\det A)^2 (\det B)^{-2} = 16 \cdot 3^2 \cdot 4^{-2} = 9$.
Cevap C



27. \mathbb{Z}_{15} 'in 9 tarafından üretilen altgrubunun mertebesi kaçtır? (FLÖSS - 2012)

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 9 E) 4

Çözüm : I. Yol : $\langle 9 \rangle = \{9, 18 \equiv 3, 12, 21 \equiv 6, 0\}$ olduğundan $|\langle 9 \rangle| = 5$

II. Yol : $G = \langle x \rangle \Rightarrow |\langle x \rangle^k| = \frac{|x|}{\text{OBEB}(k, |x|)}$ olduğundan

$$\mathbb{Z}_{15} = \langle 1 \rangle, |\langle 9 \rangle| = \frac{|1|}{\text{OBEB}(9, |1|)} = \frac{15}{\text{OBEB}(9, 15)} = \frac{15}{3} = 5$$

Yanıt: B

28. Aşağıdakilerden hangisi devirli gruptur? (FLÖSS - 2012)

- A) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ B) $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6$ C) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$ D) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$ E) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$

Çözüm : $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$, $(m, n) = 1$ ise devirlidir. Yanıt: C

29. Aşağıdaki kümelerden hangisi bir halkadır ama bir cisim değildir?

- A) \mathbb{Z} B) \mathbb{Q} C) \mathbb{R} D) \mathbb{Z}_5 E) \mathbb{Z}_2

Çözüm : \mathbb{Z} kümesinde her elemanın (çarpmaya göre) tersi yoktur. Yani bölme işlemi yapılamadığı için cisim değildir. Yanıt: A

30. $f(x) = 5x^4 + 3x^2$ fonksiyonunun $[0, 2]$ aralığındaki ortalama değeri kaçtır?

- A) 20 B) 15 C) 13 D) 25 E) 21

Çözüm : Ort.Değer = $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2-0} \int_0^2 (5x^4 + 3x^2) dx = \frac{1}{2} (x^5 + x^3) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (2^5 + 2^3) = 20$.

31. Aşağıda serilerden hangisi iraksaktır?

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ E) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Çözüm : A) iraksak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

B), C) yakınsak, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ için yakınsaktır.

D), E) geometrik serilerdir. $|q| < 1$ iken $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ yakınsak olduğundan D), E) yakınsaktır.

Yanıt: A



32. Köşeleri $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$ olan üçgenin B köşesindeki iç açısının ölçüsü nedir? (ALÖSS - 2006)

A) 0° B) 45° C) 50° D) 60° E) 40°

Çözüm : $\vec{BA} = A - B = (3, 0, 4)$ ve $\vec{BC} = C - B = (7, 0, 1)$ olduğundan,

$$\cos B = \frac{\langle \vec{BA}, \vec{BC} \rangle}{\|\vec{BA}\| \|\vec{BC}\|} = \frac{21 + 0 + 4}{\sqrt{9 + 16} \sqrt{49 + 1}} = \frac{25}{5\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow B = 45^\circ$$

bulunur.

33. $\vec{u} = (1, 4, 3)$ ve $\vec{v} = (2, 2, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.

A) $\sqrt{65}$ B) $\sqrt{69}$ C) $\sqrt{63}$ D) $\sqrt{67}$ E) $\sqrt{61}$

Çözüm : Alan = $\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}$ veya Alan = $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ eşitliklerinden bulunabilir.

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2} = \sqrt{(1 + 16 + 9)(4 + 4 + 1) - (2 + 8 + 3)^2} \\ &= \sqrt{26 \cdot 9 - 169} = \sqrt{65} \end{aligned}$$

veya $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 5, -6)$ eşitliğinden, Alan = $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{65}$ bulunur.

34. $2x + 3y + z = 1$ ve $x - kz = 3$ düzlemleri birbirine dik ise k nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) -1

Çözüm : $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$ olmalı, buna göre $\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 0$ eşitliği sağlanmalıdır. $\vec{N}_1 = (2, 3, 1)$ ve $\vec{N}_2 = (1, 0, -k)$ olduğundan, $\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 1 \cdot k = 0 \Rightarrow k = 2$ elde edilir.

35. \mathbb{R}^3 uzayında $\vec{u}_1 = (3, -1, k)$, $\vec{u}_2 = (3, 1, 2)$, $\vec{u}_3 = (1, 2, 0)$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için k 'nın değeri ne olmalıdır?

- A) $\frac{14}{5}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{11}{2}$ D) $\frac{13}{5}$ E) 1

Çözüm : $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = 0$ ise $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ lineer bağımlıdır. Buna göre,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & k \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2 + 6k - k - 12 = 0 \Rightarrow 5k = 14 \Rightarrow k = \frac{14}{5}$$

bulunur.

36. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin rankı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} S_2 \rightarrow S_2 - S_1 \\ S_3 \rightarrow S_3 - S_1 \\ S_4 \rightarrow S_4 - 2S_1 \\ S_5 \rightarrow S_5 - S_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} S_3 \rightarrow S_3 + S_2 \\ S_4 \rightarrow S_4 - S_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} * \\ * \end{array}$$

olduğundan $Rank = 2$ 'dir.



37. \mathbb{R}^3 te $\vec{u} = (3, -2, 1)$ ve $\vec{v} = (-1, 2, 5)$ vektörlerinin gerdiği altuzayın denklemini aşağıdakilerden hangisidir? (FLÖSS - 2012)

- A) $3x + 4y - z = 0$ B) $3x + 2y - 5z = 0$ C) $4x - 3y + 2z = 0$
D) $x - y + z = 0$ E) $3x + 2y + 5z = 0$

Çözüm :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -10x - y + 6z - 2z - 2x - 15y = 0$$

$$\Rightarrow -12x - 16y + 4z = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 4y - z = 0$$

38. Bir X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu $x = 1, 2, \dots$ için, $f(x) = ae^{-3x}$, ise a aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $e^{-3}-1$ B) e^3-1 C) $1 - e^{-3}$ D) $1 - e^3$ E) e^3

Çözüm : $\sum_{x=1}^{\infty} ae^{-3x} = 1$ olmalıdır. Buna göre,

$$a \sum_{x=1}^{\infty} e^{-3x} = a \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^3}\right)^x = a \frac{\frac{1}{e^3}}{1 - \frac{1}{e^3}} = \frac{a}{e^3 - 1} = 1 \Rightarrow a = e^3 - 1$$

bulunur.

39. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri yanlıştır?

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

II. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots$

III. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

IV. $\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$

- A) Yalnız II B) II ve IV C) Yalnız IV D) II ve III E) Yalnız III

Çözüm : Sadece IV yanlıştır. Bu seri $\ln(x+1)$ ' in açılımıdır. $\ln x$, $x = 0$ noktasında tanımlı değildir.

40. $\alpha(t) = (t, 3t, \ln(2t-1))$ eğrisinin $\alpha(1)$ noktasındaki hız vektörünün normunu bulunuz.

- A) $\sqrt{14}$ B) $\sqrt{15}$ C) $\sqrt{12}$ D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{11}$

Çözüm : $\alpha'(t)$ hız vektörüdür. Buna göre,

$$\alpha'(t) = \left(1, 3, \frac{2}{2t-1}\right) \Rightarrow \alpha'(1) = (1, 3, 2) \Rightarrow \|\alpha'(1)\| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

elde edilir.

