AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

BİTİRME ÖDEVİ I
ARASINAV SORULARININ ÇÖZÜMLERİ

2015 - 2016 GÜZ DÖNEMİ

ADI SOYADI : ....

NO : ....

A	A	A	A	A	A	A

SINAV TARİHİ VE SAATİ :

Bu sınav 40 sorudan oluşmaktadır ve sınav süresi 90 dakikadır.

SINAVLA İLGİLİ UYULACAK KURALLAR

1. Cevap kağıdınıza soru kitapçığınızın türünü işaretlemeyi unutmayınız.

2. Her soru eşit değerde olup, puanlama yapılırken doğru cevaplarınızın sayısından yanlış cevaplarınızın sayısının dörtte biri düşülecektir.

3. Sınavda pergel, cetvel, hesap makinesi gibi yardımcı araçlar ve müsvedde kağıdı kullanılması yasaktır. Tüm işlemlerinizi soru kitapçığı üzerinde yapınız.

4. Sınav süresince görevlilerle konuşulmayacak ve onlara soru sorulmayacaktır. Yanlış olduğunu düşündüğünüz sorularla ilgili, görevlilere soru sormayınız. Bu çok küçük bir olasılık olsa da, jüri bu tür durumları daha sonra değerlendirecektir.

5. Öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.

6. Dışarıya çıkan bir aday tekrar sınava alınmayacaktır.

7. Cep telefonuyla sınava girmek yasaktır. Cep telefonunuzu görevliye teslim ediniz.

8. Soru kitapçıkları toplanacaktır.

1. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}}$ **fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde azalandır?**

A) $(-\infty, 0)$ **B)** $(-2, -1)$ **C)** $(-1, 0)$ **D)** $(0, 2)$ **E)** $(0, \infty)$

Çözüm : $f'(x) < 0$ olduğu aralıkta fonksiyon azalandır:

$f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2} < 0$ ise $x \neq 0$, $x^2 - 1 < 0$ eşitsizliğine göre, $(-1, 0) \cup (0, 1)$ elde edilir. Yanıt C. f fonksiyonu $(-1, 0)$ aralığında azalandır.

---

2. $\boldsymbol{f(x) = x(x^2-1)(x^2-4)}$ **olmak üzere** $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ **denkleminin kaç reel kökü vardır.**

A) 0 **B) 1** **C) 2** **D) 3** **E) 4**

Çözüm : $f(x) = x(x^2-1)(x^2-4) = (x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$ fonksiyonu için,

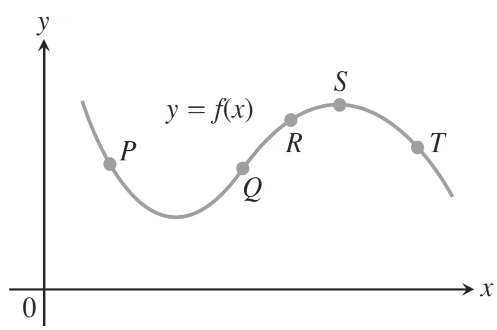
$$f(k) = f(k+1), k = -2, -1, 0, 1$$

olduğundan Rolle teoremi gereği, her $k = -2, -1, 0, 1$ için $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (k, k+1)$ vardır. $f'(x)$ fonksiyonu 4. dereceden bir polinom olduğundan $f'(x) = 0$ denkleminin **4** reel kökü vardır.

---

4. Yanda grafiği verilmiş fonksiyonun hangi noktasında birinci türevi negatif, ikinci türevi pozitiftir?

A) P **B) Q** **C) R** **D) S** **E) T**



Çözüm : $f'(x) < 0$ olduğu aralıkta fonksiyon azalan, $f''(x) > 0$ olduğu aralıkta fonksiyon konvekstir. Bu koşulları sağlayan tek nokta **P** noktasıdır.

---

4. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}}{\displaystyle 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}}$ **olduğuna göre,** $\boldsymbol{f(x) = ?}$

A) $\dfrac{\sinh x}{\sin x}$ **B)** $\dfrac{\sinh x}{2\sin x}$ **C)** $\dfrac{\sin x}{\sinh x}$ **D)** $\dfrac{\sin x}{\cosh x}$ **E)** $\dfrac{\sin x}{2\sinh x}$

Çözüm : $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots$, $e^{-x} = 1 - \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} - \cdots$, $\sin x = 1 - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots$ seri açılımları ile, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^x}{2}$ eşitliği gözönüne alınırsa,

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2\sin x} = \frac{\sinh x}{\sin x}$$

elde edilir.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{2^n \cdot 3^n}$ **toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

Çözüm : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{2^n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^3}\right) = \frac{1}{1-1/2} - \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{2}.$

---

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **serisi yakınsak ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğru olmayabilir?**

A) $\lim_{x\to\infty} a_n = 0$ **'dır.**

B) (a_n) **dizisi yakınsak bir dizidir.**

C) **Yeteri kadar büyük her k için $a_k > a_{k+1}$ 'dir.**

D) (a_n) **dizisi sınırlı bir dizidir.**

E) **Öyle bir $c > 0$ vardır ki, her k için, $|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| < c$'dir.**

Çözüm : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise,

i) Genel teriminin limiti sıfır olmalıdır. (A doğru)

ii) Genel teriminin limiti sıfırsa, yakınsaktır. (B doğru)

iii) Her zaman doğru değildir. Örneğin alterne seri. $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2\right)$.

iv) Genel terimin limiti sıfırsa, a_n dizisi sınırlıdır. (Yakınsak her dizi sınırlıdır.)

v) Seri yakınsak olduğundan, $\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ limiti var ve sonludur. Dolayısıyla, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ kısmi toplamlar dizisi de sınırlıdır.

belirli bir k değerinden sonra, $a_{k+1} < a_k$ olacaktır.

---

7. $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$ **integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}} + 6e^{\sqrt[3]{x}} + C$ B) $\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}} + e^{\sqrt[3]{x}} + C$

C) $\sqrt[3]{x^2}e^{x} - \sqrt[3]{x}e^{x} + e^{x} + C$ D) $x^2e^{\sqrt[3]{x}} - xe^{\sqrt[3]{x}} + 2e^{\sqrt[3]{x}} + C$

E) $x^2e^{x^3} + 5xe^{x^3} + e^{x^3} + C$

Çözüm : İlk olarak $t^3 = x$ değişken değiştirmesi ile $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx = \int 3t^2e^t dt$ bulunur. Şimdi, kısmi integrasyon ile, $P(x)$ polinomu için,

$$\int P(x)\, e^x dx = e^x \left(P(x) - P'(x) + P''(x) - P'''(x) + \cdots\right) + c$$

olduğu kullanılırsa,

$$\int 3t^2 e^t dt = \left(3t^2 - 6t + 6\right) e^t + C$$

elde edilir. $t = \sqrt[3]{x}$ olduğundan $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx = 3\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}} + 6e^{\sqrt[3]{x}} + C$ bulunur.

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$ **serisi yakınsaklık aralığındaki bir x değeri için aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\dfrac{1}{2-x}$ **B)** $\dfrac{1}{2+x}$ **C)** $\dfrac{2}{1-x}$ **D)** $\dfrac{2}{1+x}$ **E)** $\dfrac{1}{1+2x}$

Çözüm : $|x| < 2$ için $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ olacağından

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2-x}$$

bulunur.

---

9. $1 \leqslant x \leqslant 4$ **olmak üzere** $y = \dfrac{1}{x^2}$ **eğrisi altında ve x-ekseni üstünde kalan bölgeyi iki eşit parçaya bölen dikey doğru aşağıdakilerden hangisidir.**

A) $x = 1$ **B)** $x = 2$ **C)** $x = \dfrac{3}{2}$ **D)** $x = \dfrac{4}{5}$ **E)** $x = \dfrac{8}{5}$

Çözüm : Söz konusu bölgenin alanı $A = \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^4 = \frac{3}{4}$ olduğundan

$$\frac{A}{2} = \frac{3}{8} = \int_1^a \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^a = -\frac{1}{a} + 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{5}{8} \Rightarrow a = \frac{8}{5}$$

elde edilir.

---

10. 7. Hacmi $\int_0^{\pi} 2\pi\,(4-x)\sin^4 x\,dx$ **ile verilen dönel cisim aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $y = \sin^4 x$ **eğrisi, x-ekseni, $x = 0$ ve $x = \pi$ doğruları ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cisim**

B) $y = 4 - x$ **doğrusu, x-ekseni, $x = 0$ ve $x = \pi$ doğruları ile sınırlı bölgenin $y = \sin^4 x$ eğrisi etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cisim**

C) $y = \sin^4 x$ **eğrisi, y-ekseni, $y = 0$ ve $y = \pi$ doğruları ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cisim**

D) $y = \sin x$ **eğrisi, x-ekseni, $x = 0$ ve $x = \pi$ doğruları ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cisim**

E) $y = \sin^2 x$ **eğrisi, y-ekseni, $x = 0$ ve $x = \pi$ doğruları ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cisim**

Çözüm : Verilen formüldeki $4 - x$ çarpanından dolayı dönme y-ekseni etrafındadır. Yanıt A seçeneğidir.

---

11. $f(x) = (\sin x - 1)(\sin x + 2)$fonksiyonunun alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) -5 B) 0 C) 1 D) 5 E) 7

Çözüm : $f(x)$ fonksiyonunu $f(x) = \sin^2 x + \sin x - 2$ şeklinde yazalım.

$$f'(x) = 2\sin x \cos x + \cos x = 0$$

eşitliğinden $\cos x = 0$ ve $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ olur. Buradan $\cos x = 0$ icin f

$$(x) = \sin^2 x + \sin x - 2 = (1 - \cos^2 x) + \sqrt{1 - \cos^2 x} - 2 = 0$$

bulunur.

---

12. Bir dikdörtgenin üç kenarının uzunluğu 80cm ise alanı en çok kaç olabilir.

A)800cm^2 B)600cm^2 C) 400cm^2 D) 200cm^2 E)100cm^2

Çözüm : $y + 2x = 80$ ve alan $A(x) = xy = x(80 - 2x)$ olduğundan,

$$A'(x) = 80 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 20 \text{ ve } A''(x) = -4 < 0 \text{ (maksimum)}$$

olur. $A(x) = 800\ cm^2$ bulunur.

---

13. Taban yarıçapı 4 cm olan silindir şeklindeki bir lastik borunun yüksek sıcaklık altında boyu uzamaktadır.

Silindirin yüksekliğinin artış hızı $0,1\ cm/sn$ olduğuna göre silindirin hacminin değişim hızı kaç cm/sn dir?

A) $1,5\pi$ B) $1,6\pi$ C) 2π D) 4π E) 9π

Çözüm : Silindirin hacmi $V = \pi r^2 h$ 'dır. Buna göre,

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \pi 16 \frac{1}{10} = 1,6\pi$$

bulunur.

---

14. Aşağıda serilerden kaç tanesi yakınsaktır?

I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ **II)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **III)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ **IV)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{1/n}}$ **V)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000+n}$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm : I ve V) ıraksaktır. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1000} = 1 \neq 0.$

II) Iraksaktır. Çünkü, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ için yakınsaktır.

Buna göre, III) yakınsaktır. Ayrıca, IV) bir geometrik seri olduğundan yine yakınsaktır.

15. $\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\left(\displaystyle\int\limits_{x^3}^{0}\dfrac{\mathbf{d}t}{1+4t^2}\right)=?$

A) $-3x^2\tan^{-1}(2x)$ **B)** $\dfrac{-3x^2}{1+4x^6}$ **C)** $\dfrac{-1}{1+4x^6}$ **D)** $3x^2\tan^{-1}(2x)$ **E)** $\dfrac{3x^2}{1+4x^6}$

Çözüm : $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_{a(x)}^{b(x)}F(t)\,dt\right)=F(b(x))\,b\prime(x)-F(a(x))\,a'(x)$ eşitliğini kullanalım.

$F(t)=\dfrac{1}{4t^2+1}$, $a(x)=x^3$ ve $b(x)=0$ olduğundan,

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{x^3}^{0}\frac{dt}{1+4t^2}\right)=F(0)\,b'(x)-F(x^3)\,3x^2=-\frac{1}{4\left(x^3\right)^2+1}3x^2=\frac{-3x^2}{1+4x^6}$$

elde edilir.

---

16. $\displaystyle\int\limits_{0}^{x}\frac{\sin t}{t}dt$ **ifadesi x'in kuvvetlerine göre yazılırsa, aşağıdakilerden hangisi elde edilir?**

A) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **B)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}$ **C)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$

D) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **E)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$

Çözüm : $\forall x\in\mathbb{R}$ için $\sin x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ olduğundan

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

olur. O halde

$$\int\limits_{0}^{x}\frac{\sin t}{t}dt=\int\limits_{0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$$

elde edilir.

---

17. $x^2+(y-1)^2=1$ **çemberinin y-ekseni boyunca döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) π **B)** 2π **C)** $\dfrac{\pi}{3}$ **D)** $\dfrac{2\pi}{3}$ **E)** $\dfrac{4\pi}{3}$

Çözüm : İstenilen hacim

$V=\pi\int\limits_{0}^{2}\left[1-(y-1)^2\right]\mathrm{d}y=\pi\int\limits_{0}^{2}\left(-y^2+2y\right)\mathrm{d}y=\pi\left(-\dfrac{y^3}{3}+y^2\Big|_0^2\right)=\dfrac{4\pi}{3}$ olur.

18. $\displaystyle\int_0^1 f(1-x)\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\displaystyle 2\int_0^1 f(x)\,dx$ B) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ C) $\displaystyle\int_1^0 f(t)\,dt$ D) $\displaystyle -\int_0^1 f(x)\,dx$ E) $\mathbf{0}$

Çözüm : $1-x=t$ dönüşümünü uygularsak, $-dx=dt$ olur.

$$\int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 -f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx$$

elde edilir. Doğru yanıt **E** şıkkıdır.

---

19. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin türleri hangisinde doğru verilmiştir?

I $\boldsymbol{(2x^3+y^3)dx + x^2y\,dy = 0}$

II $\boldsymbol{(y\sin x - \sin y)dx - (x\cos y + \cos x)dy = 0}$

III $\boldsymbol{((x+1)y - x^2)dx + x\,dy = 0}$

IV $\boldsymbol{(5xy - y^4)dx + dy = 0}$

A) I: Tam II: Bernoulli III: Homojen IV: Lineer

B) I: Homojen II: Tam III: Bernoulli IV: Lineer

C) I: Tam II: Homojen III: Lineer IV: Bernoulli

D) I: Bernoulli II: Lineer III: Tam IV: Homojen

E) I: Homojen II: Tam III: Lineer IV: Bernoulli

Çözüm : denklemi için $M(x,y)=2x^3+y^3, N(x,y)=x^2y$ olup bu iki fonksiyon aynı dereceden (2. dereceden) homojen fonksiyonlar olduğundan homojen diferansiyel denklemdir.

II denklemi için $M(x,y)=y\sin x-\sin y, N(x,y)=-(x\cos y+\cos x)$ seçimi ile
$M_y=\sin x-\cos y=N_x$ olduğundan tam diferansiyel denklemdir.

III denklemi, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{x+1}{x}y=x$ şeklinde yazılabilir. Bu da lineer diferansiyel denklemdir.

IV denklemi, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5xy=y^4$ olarak Bernoulli diferansiyel denklemi biçiminde yazılabilir. Yani denklem Bernoulli diferansiyel denklemidir.

---

20. $(Ae^{x}y^{4}+x^{2})dx+(2Be^{x}y^{3}+2y^{3})dy=0$ **diferansiyel denklemi tam ise** $\dfrac{B}{A}=?$

A) 1 **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 5**

Çözüm : Denklem için $M(x,y)=Ae^{x}y^{4}+x^{2}, N(x,y)=2Be^{x}y^{3}+2y^{3}$ olup denklem tam olduğundan $M_y=N_x$ olacağından $4Ae^{x}y^{3}=2Be^{x}y^{3}$ olur ve burdan $\dfrac{B}{A}=2$ bulunur.

---

21. $y''+2y'+y=0$ **diferansiyel denklemi için** $y(0)=1$ **ve** $y'(0)=3$ **ise** $y''(0)=?$

A) -7 **B) 3** **C) 7** **D)** -3 **E) 5**

Çözüm : Diferansiyel denklemin karakteristik polinomu olan $L(m)=m^{2}+2m+1$ polinomunun kökleri $m_1=m_2=-1$'dir. O zaman 2. mertebeden sabit katsayılı homojen denklemin genel çözümü $y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$ olup $y(0)=1$ ve $y'(0)=3$ koşulları için $y(x)=e^{-x}+4xe^{-x}$ bulunur. Böylece, $y''(0)=-7$ bulunur.

---

22. $f(x)=\begin{cases}4x+1, & 0<x\leq 1\\ 3x^{2}+m, & 1<x<2\end{cases}$ **fonksiyonunun olasılık yoğunluk fonksiyonu olması için** m **kaç olmalıdır?**

A) -9 **B) 8** **C)** -8 **D) 10** **E)** -10

Çözüm : $\int_0^1(4x+1)\,dx+\int_1^2(3x^{2}+m)\,dx=1$ olmalıdır. Buna göre,

$$1=2x^{2}+x\Big|_0^1+x^{3}+mx\Big|_1^2=m+10$$

eşitliğinden, $m=-9$ bulunur.

---

23. 60 kişilik bir sınıftaki öğrencilerden 12 tanesinin yaşı 17'den küçük, 15 tanesinin kilosu 60 kg'dan fazla ve 20 tanesinin boyu 165 cm'den uzundur. Bunlardan 9 tanesinin hem boyunun 165 cm'den uzun, hem de kilosunun 60 kg'dan fazla olduğu biliniyor. 3 tanesinin de hem yaşının 17'den küçük, hem kilosunun 60 kg'dan fazla, hem de boyunun 165 cm'den uzun olduğu biliniyor. Bu durumda bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin boyunun 165 cm'den uzun ve kilosunun 60 kg'dan fazla olduğu bilindiğine göre yaşının 17'den küçük çıkma olasılığı kaçtır?

A) $\dfrac{3}{17}$ **B)** $\dfrac{1}{2}$ **C)** $\dfrac{1}{3}$ **D)** $\dfrac{3}{4}$ **E)** $\dfrac{2}{3}$

Çözüm : Sınıftan rastgele seçilen öğrenciyle ilgili aşağıdaki olaylar tanımlansın:

A_1 : Yaşının 17'den küçük olması
A_2 : Kilosunun 60 kg'dan fazla olması
A_3 : Boyunun 165 cm'den fazla olması

Buna göre, $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=\dfrac{3}{60}$ ve $P(A_2\cap A_3)=\dfrac{9}{60}$ olur. Buradan

$P(A_1\diagup(A_2\cap A_3))=\dfrac{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}{P(A_2\cap A_3)}=\dfrac{\frac{3}{60}}{\frac{9}{60}}=\dfrac{1}{3}$ elde edilir.

24) X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\lambda > 0$ olmak üzere

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

şeklinde verilmiştir. X 'in beklenen değeri nedir?

A) 1 **B)** 2 **C)** $\frac{1}{\lambda}$ **D)** $\frac{1}{\lambda^2}$ **E)** λ

Çözüm : X 'in beklenen değeri $E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx$ bulunur. Kısmi integrasyon ile

$$E(X) = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

bulunur. **Cevap C**.

---

25) X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{3}{8}\left(x^2+1\right), \quad -1 \leq x \leq 1$$

şeklinde verilmiştir. X 'in standart sapmasını bulunuz.

A) 0 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{2}}{5}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{\sqrt{10}}{5}$

Çözüm : X 'in beklenen değeri $E(X) = \mu = \int_{-1}^{1} x\frac{3}{8}(x^2+1)\,dx = 0$ bulunur. $Var(X) = E\left((X-\mu)^2\right)$ olduğundan

$$Var(X) = E\left(X^2\right) = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{3}{8}\left(x^2+1\right) dx = \frac{2}{5}$$

olur. O halde standart sapma $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ elde edilir.

---

26. Aşağıdaki kaç tanesi lineer dönüşümdür?

I. $T(x,y,z) = (2x+y, x-z, x+y+z)$ **II.** $T(x,y,z) = (2x+y, x, 2)$
III. $T(x,y,z) = (2x+y, 0, x)$ **IV.** $T(x,y,z) = e^{\pi}\, xyz$
V. $T(x,y,z) = (x, (\sin 3)\, y, e^2 z + y)$

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 5

Çözüm : Bir lineer dönüşüm, sıfır vektörünü sıfır vektörüne götürür. Diğer yandan, katsayılar reel sayı olabilir, ama değişkenler sadece birinci dereceden terimler ile bunların toplam ve farklarından oluşabilir. Değişkenler üstel, köklü, logaritmik, trigonometrik, çarpım, ikinci veya daha büyük dereceden polinom fonksiyonlar olarak bulunamaz. Buna göre, sadece II lineer dönüşüm değildir.

27. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ **ise, aşağıdakilerden hangisi bu matrisin tersini verir?**

(İpucu : Cayley - Hamilton Teoremi)

A) $\boldsymbol{A^2 - 4A + 4I}$ B) $\boldsymbol{A^2 - A + I}$ C) $\boldsymbol{A^2 - 4I}$

D) $\boldsymbol{-A^2 + A + I}$ E) $\boldsymbol{-A^2 + 4I}$

Çözüm : Cayley - Hamilton teoremini kullanalım. Her matris kendi karakteristik polinomunu sağlar. A matrisinin, karakteristik polinomu : $\det(\lambda I_3 - A) = 0$ dır. Hesaplanırsa,

$$\det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

olduğundan, $A^3 - A^2 + A + I = 0$ eşitliği, A^{-1} ile çarpılırsa, $A^{-1} = -A^2 + A + I$ elde edilir.

---

28. $\boldsymbol{G = \mathbb{Q}}$ **olmak üzere, hangi** $\boldsymbol{H}$ **için** $\boldsymbol{G}$ **grubunun işlemi** $\boldsymbol{G/H}$ **ye taşınamaz?**

A) $\boldsymbol{H = \{0\}}$ B) $\boldsymbol{H = \mathbb{Z}_6}$ C) $\boldsymbol{H = \frac{7}{3}\mathbb{Z}}$ D) $\boldsymbol{H = 7\mathbb{Z}}$ E) $\boldsymbol{H = 3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z}}$

Çözüm : $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Q}$ nun normal altgrubu değildir, işlemleri farklıdır. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_6$ grup değildir.

---

29. Aşağıdakilerden hangisi devirli gruptur.?

A) $\mathbb{Q}$ B) $\mathbb{Z}$ C) $\mathbb{R}$ D) $\mathbb{C}$ E) $\mathbb{Q}^*$

Çözüm : $\mathbb{Z}$ dir. $\mathbb{Q}$ ve$\mathbb{Q}^*$devirli değildir, asal sayılar kümsesi üreteç kümesi olarak alınabilir. Bir devirli grubun her alt grubu da devirlidir. Buna göre $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ devirli olamaz.

---

30. Aşağıdakilerden hangisi $\boldsymbol{(\mathbb{Q}, +)}$ **grubunun altgrubu olamaz?**

A) $\boldsymbol{H = \{0\}}$ B) $\boldsymbol{H = \mathbb{Z}_6}$ C) $\boldsymbol{H = \frac{7}{3}\mathbb{Z}}$ D) $\boldsymbol{H = 7\mathbb{Z}}$ E) $\boldsymbol{H = 3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z}}$

Çözüm : $\mathbb{Z}_6$ grubunun işlemi farklıdır. Örneğin, $\mathbb{Q}$ kümesinde $2 + 5 = 7$ iken, $\mathbb{Z}_6$ grubuna göre $2 + 5 = 1$'dir.

---

31. Aşağıdakilerden hangisi bir yönüyle diğerlerinden farklıdır?

A) $\mathbb{C}$ B) $\boldsymbol{5\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z}}$ C) $\mathbb{R}$ D) $\mathbb{Q}$ E) $\mathbb{Q}^*$

Çözüm : $5\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z}$ grup değildir, diğerleri gruptur.

32. $\vec{x} = (1,0,1)$ **ve** $\vec{y} = (1,1,k)$ **vektörleri için,** $\dfrac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})$ **birim vektör ise** $k = ?$

A) 3 **B)** -2 **C)** 2 **D)** 0 **E)** 1

Çözüm : $\dfrac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}) == \dfrac{1}{3}(2,1,k+1)$ vektörü birim ise normu 1 olmalıdır. Buna göre,

$$\left\|\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})\right\| = \frac{1}{3}\|(\vec{x}+\vec{y})\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+1+(k+1)^2} = 1$$

eşitliğinden, $k^2+2k-3=0$ olur. O halde, $k=1$ veya $k=-3$'tür. Yanıt E.

---

33. $\vec{x} = (1,1,3)$, $\vec{y} = (1,-2,3)$ **ve** $\vec{z} = (2,1,k)$ **vektörleri lineer bağımlı ise** k **nedir?**

A) 4 **B)** 6 **C)** -2 **D)** 5 **E)** 1

Çözüm : $\det(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = 0$ olmalıdır. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 0$ ise, $18-3k=0 \Rightarrow k=6$ bulunur.

---

34. Aşağıdakilerden hangisi lineer bağımsızlığın taban olma koşulu için tek başına yeterli olmadığına bir örnektir?

A) $\mathbb{R}^2$, $\{(1,2);(0,0)\}$ **B)** $\mathbb{R}^3$, $\{(1,2,1);(2,1,1)\}$ **C)** $\mathbb{R}^2$, $\{(1,2);(2,1)\}$

D) $\mathbb{R}^2$, $\{(1,2);(2,1);(1,1)\}$ **E)** $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,0),(2,0,0)\}$

Çözüm : B) seçeneğindeki küme lineer bağımsızdır ama $\mathbb{R}^3$ iki vektörle gerilemeyeceğinden taban değildir. Diğerlerine bakalım. A) Lineer bağımlıdır. C) Lineer bağımsızdır ve $\mathbb{R}^2$ yi gererler. $\mathbb{R}^2$ nn tabanıdırlar. D) $\mathbb{R}^2$ yi gererler ama lineer bağımsız değildirler. E) Lineer bağımlıdırlar.

---

35. Aşağıdaki vektörlerden hangisi $\vec{x} = (1,2,3)$ **ve** $\vec{y} = (3,3,4)$ **vektörleri tarafından üretilen (gerilen) uzaydadır?**

A) $(2,1,1)$ **B)** $(1,1,1)$ **C)** $(2,5,1)$ **D)** $(2,5,4)$ **E)** $(1,3,1)$

Çözüm : $\vec{x} = (1,2,3)$ ve $\vec{y} = (3,3,4)$ vektörleri ile üretilen (gerilen) uzayın denklemi :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -x+5y-3z=0$$

olduğundan, bu denklemi sağlayan tek vektörün A) seçeneğinde olduğu görülebilir.

---

36. Aşağıdakilerden hangisi $\mathbb{R}^2$ **nin bir ortogonal tabanıdır?**

A) $\{(1,0);(1,1)\}$ **B)** $\{(1,-1);(1,2)\}$ **C)** $\{(1,1);(-1,1)\}$

D) $\{(1,1);(0,1)\}$ **E)** $\{(1,0);(0,1),(0,0)\}$

Çözüm : Ortogonal tabanda, vektörler birbirine dik olmalıdır. Yanıt C.

37. $\vec{x} = (1,2,3,1)$ **ve** $\vec{y} = (3,1,2,1)$ **vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.**

A) $\frac{14}{15}$ **B)** $\frac{11}{15}$ **C)** $\frac{13}{15}$ **D)** $\frac{4}{5}$ **E)** $\frac{3}{5}$

Çözüm : $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} = \dfrac{3+2+6+1}{\sqrt{15}\sqrt{15}} = \dfrac{4}{5}$ bulunur.

---

38. Aşağıdakilerden hangisi $A(1{,}1{,}1)$, $B(1{,}2{,}3)$, $C(2{,}3{,}1)$ **noktalarının bulunduğu düzleme dik bir vektördür?**

A) $(2,0,-1)$ **B)** $(4,-2,1)$ **C)** $(-3,2,1)$ **D)** $(1,1,-2)$ **E)** $(1,2,-1)$

Çözüm : $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektörü, bu noktaların bulunduğu düzleme diktir. Buna göre, $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB}) = (0,1,2) \\ \overrightarrow{AC} = (1,2,0) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-4,2,-1)$ vektörü, A, B, C'nin bulunduğu düzleme diktir.

---

39. Köşelerinin koordinatları $A(1{,}1{,}1)$, $B(1{,}2{,}3)$, $C(2{,}3{,}1)$ **olan üçgenin alanını bulunuz.**

A) $2\sqrt{5}$ **B)** $\frac{\sqrt{23}}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{17}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{21}}{2}$ **E)** 5

Çözüm : $\text{Alan}(ABC) = \dfrac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$ olduğunu kullanalım. Bir önceki soruda, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4,2,-1)$ bulmuştuk. O halde, $\text{Alan}(ABC) = \dfrac{1}{2}\sqrt{16+4+1} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$ elde edilir.

---

40. $AX = B$ **formundaki bir lineer denklem sisteminde,** $[A : B]$ **genelleştirilmiş katsayılar matrisi**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & m & m & m^2 - m \\ 0 & 0 & m^2 + 2m & m + 2 \end{array}\right]$$

matrisine denktir. Bu sistemin 1 parametreye bağlı sonsuz çözümü olduğuna göre, m **kaçtır?**

A) 0 **B)** -2 **C)** -1 **D)** 2 **E)** 1

Çözüm : Bu sistemin 1 parametreye bağlı sonsuz çözümü olması için,
$Rank\,(A:B) = Rank\,(A) = 2$ olması gerekir.

$m = 0$ olursa, $\text{Rank}(A:B) = 2$, $\text{Rank}(A) = 1$ olduğundan çözüm olmaz.

$m = -2$ olursa, $\text{Rank}(A:B) = 2 = \text{Rank}(A) = 2$ olduğundan, sistemin 1 parametreye bağlı sonsuz çözümü olur. Yanıt B)