FULL SORU VERSİYONU
Çözümleri Kitapta Bulabilirsiniz.

MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 5 (460 sayfa)
ANALİZ - CEBİR 2
TANITIM DÖKÜMANI

(Kitabın içeriği hakkında bir bilgi verilmesi amacıyla bu döküman hazırlanmıştır.)
KİTABIN ORJİNALİNDE BULUNAN, TEOREM İSPATLARI, KONU ANLATIMI ve ÇÖZÜMLERİN OLDUĞU KISIMLAR,
BU DÖKÜMANA KONULMAMIŞTIR.
Bu dökümanda,
KİTAPTA BULUNAN SORULAR BULUNMAKTADIR.
Konuların içeriğini ve soruların çözümlerini
MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 5 (Analiz - Cebir 2)
ALTIN NOKTA YAYINLARI
kitabında bulabilirsiniz.

Bu kitap,

Logaritma
Trigonometri
Karmaşık Sayılar
Limit, Süreklilik, Türev
Fonksiyonel Denklemler
Eşitsizlikler (Aritmetik - Geometrik - Harmonik Ortalama Eşitsizliği, Cauchy - Schwarz Eşitsizliği, Kuvvet Ortalamaları Eşitsizliği, Simetrik Ortalamalar Eşitsizliği, Bernoulli Eşitsizliği, Yeniden Düzenleme veya Permütasyon Eşitsizliği, Chebysev Eşitsizliği, Jensen Eşitsizliği, Genelleştirilmiş Aritmetik - Geometrik Ortalama Eşitsizliği, Schur Eşitsizliği, Hölder Eşitsizliği, Minkowski Eşitsizliği, Muirhead Eşitsizliği, Geometrik Eşitsizlikler)

konularında farklı, sıradışı ve kısmen zor problemler çözmek isteyen öğretmen ve öğrencilerimiz için, güzel bir kaynak olarak kullanılmaktadır.
Bu konulardaki lise Matematik yarışmalarında sorulan sorular, kitaba ilave edilmiştir.

Kitabın içeriğindeki konuları, Aşağıdaki İÇİNDEKİLER bölümünden inceleyebilirsiniz

Mustafa Özdemir
İrtibat İçin : mozdemir07@gmail.com
veya Altın Nokta Yayınevi

İçindekiler

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

BEŞİNCİ BÖLÜM

ALTINCI BÖLÜM

AŞAĞIDAKİ ÖRNEKLERİN ve PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 5 (Analiz - Cebir 2) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.

Mustafa Özdemir

Logaritma

1.1 Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

Örnek 1 $x, y, z > 1$ *reel sayıları ve* w *pozitif sayısı için,* $\log_x w = 24$, $\log_y w = 40$ *ve* $\log_{xyz} w = 12$ *olduğuna göre,* $\log_z w$ *değeri kaçtır?* (*AIME*)

Örnek 2 m *ve* n *aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$\frac{2}{\log_4 2000^6} + \frac{3}{\log_5 2006^6} = \frac{m}{n}$$

ise $m + n = ?$ (*AIME*)

Örnek 3 $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ *ve* $\log_8 b + \log_4 a^2 = 7$ *olduğuna göre,* ab *değerini bulunuz.* (*AIME*)

Örnek 4 $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $f(1) = 2^{2006}$ *ve* $n \geq 1$ *için*

$$f(n+1) = \begin{cases} \log_2 f(n); & f(n) > 0 \text{ ise} \\ 0; & f(n) \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde bir fonksiyon tanımlansın. $f(n) < 1$ *olacak şekilde en küçük* n *tamsayısını bulunuz.*

Örnek 5 $2^{-\log_6 2} \cdot 3^{\log_6 18}$ *ifadesini hesaplayınız.*

Örnek 6 $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$ *olduğuna göre* $(\log_2 x)^2$ *değerini bulunuz.* (*AIME*)

Örnek 7 10000 *sayısının tüm pozitif bölenlerin logaritmalarının toplamını bulunuz.*

Problem : Siz de 1000000 sayısının kendisi haricindeki tüm pozitif bölenlerinin logaritmalarının toplamının 141 olduğunu görünüz. (AIME)

Örnek 8 $f(x) = \log_{x+3} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ *fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.*

Örnek 9 50^{50} *sayısı kaç basamaklıdır?* ($\log_{10} 5 \approx 0.698$)

1.2 Logaritmik Denklemler

Örnek 10 $\log_x 2 \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 11 $(0,4)^{\log^2 x+1} = (6,25)^{2-\log x^3}$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 12 $\log_{3x}(\frac{3}{x}) + \log_3^2 x = 1$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 13 $\log_{3x} 3 + \log_{27} 3x = -4/3$ *denkleminin kökler toplamını bulunuz.*

Örnek 14 $\log_4 \sqrt{x^{4/3}} + 3\log_x(16x) = 7$ *denklemini sağlayan* x *değerini bulunuz.*

Örnek 15 $\log_x(5x-2) = 3$ *denkleminin kaç tane kökü vardır?*

Örnek 16 $\sqrt{1995}x^{\log_{1995} x} = x^2$ *denkleminin pozitif köklerinin çarpımının son üç basamağı kaçtır?* (*AIME*)

Örnek 17 $\begin{cases} \log_{225} x + \log_{64} y = 4 \\ \log_x 225 - \log_y 64 = 1 \end{cases}$ *denklem sisteminin çözümleri* (x_1, y_1) *ve* (x_2, y_2) *ise,* $\log_{30}(x_1 x_2 y_1 y_2)$ *değerini hesaplayınız.* (*AIME*)

Örnek 18 $\begin{cases} x + \log(x + \sqrt{x^2+1}) = y \\ y + \log(y + \sqrt{y^2+1}) = z \\ z + \log(z + \sqrt{z^2+1}) = x \end{cases}$ *denklem sisteminin tüm reel çözümlerini bulunuz.*

Örnek 19 *Aşağıdaki denklem sisteminin çözümleri* (x_1, y_1, z_1) *ve* (x_2, y_2, z_2) *olduğuna göre,* $y_1 + y_2$ *değerini bulunuz.* (*AIME*)

$$\begin{cases} \log(2000xy) - (\log x)(\log y) = 4 \\ \log(2yz) - (\log y)(\log z) = 1 \\ \log(zx) - (\log z)(\log x) = 0 \end{cases}$$

1.3 Logaritmalı Eşitsizlikler

Örnek 20 $\log_{2x-1} \dfrac{3x^2+2}{x^2-1} < \log_{2x-1} 3$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.*

Örnek 21 $\log_{1/2} x + \log_3 x > 1$ *eşitsizliğini çözünüz.*

Örnek 22 $\dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{1}{\log_2 x - 1} < 1$ *eşitsizliğini çözünüz.*

1.4 Karışık Örnekler

Örnek 23 $\dfrac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}}=3$ *denklemini sağlayan* x *değerlerini bulunuz.*

Örnek 24 *Bir üçgenin kenarlarının uzunlukları* $\log 12$, $\log 75$ *ve* $\log n$ *olduğuna göre,* n *pozitif sayısının alabileceği değerlerin sayısı kaçtır?* (*AIME*)

Örnek 25 $\log_2(x+y)-\log_3(x-y)=1$ *ve* $x^2-y^2=2$ *denklemlerini sağlayan tüm* (x,y) *reel sayı ikililerini bulunuz.*

Örnek 26 $x\in(1,64)$ *olduğuna göre,* $(\log_2 x)^4+12(\log_2 x)^2\log_2(8/x)$ *ifadesinin en büyük değerini bulunuz.*

Örnek 27 $\log_3 27\cdot\log_x 7=\log_{27}x\cdot\log_7 3$ *ise,* x*'in alabileceği en küçük değeri bulunuz.*

Örnek 28 $x\geq 3$ *reel sayıları için,* $\log_2(\log_3 x)-\log_3(\log_2 x)=0$ *denkleminin kaç kökü vardır?*

Örnek 29 a,b,c *pozitif reel sayılar olmak üzere,* $a^{\log_3 7}=27$, $b^{\log_7 11}=49$ *ve* $c^{\log_{11}25}=\sqrt{11}$ *ise,*

$$S=a^{(\log_3 7)^2}+b^{(\log_7 11)^2}+c^{(\log_{11}25)^2}$$

değeri kaçtır? (*AIME*)

Örnek 30 $a,b,c>1$ *ve* $S=\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab$ *olsun.* S*'nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.*

Örnek 31 $m\geq n$ *olacak şekildeki* (m,n) *pozitif tamsayı ikilileri için*

$$|\log m-\log k|<\log n$$

eşitsizliğini sağlayan tam 50 *farklı pozitif tamsayı olduğuna göre,* mn *çarpımının alabileceği tüm değerlerin toplamı kaçtır?* (*AIME*)

Örnek 32 $x,y,z\in\mathbb{Z}^+$ *için* xyz=10^{81} *ve* $(\log x)(\log yz)$+$(\log y)(\log z)$=468 *ise*

$$\sqrt{(\log x)^2+(\log y)^2+(\log z)^2}$$

değerini hesaplayınız. (*AIME*)

Örnek 33 *Artan geometrik bir dizi oluşturan* a,b,c *pozitif tamsayıları için* $b-a$ *bir tamsayının karesi ve* $\log_6 a+\log_6 b+\log_6 c=6$ *ise* $a+b+c$ *değerini bulunuz.* (*AIME*)

Örnek 34 $[\![x]\!]$, *x sayısında büyük olmayan en büyük tamsayıyı göstersin. Her pozitif n tamsayısı için,* $f(n) = \sum_{k=1}^{100} [\![\log(kn)]\!]$ *biçiminde tanımlanıyor.* $f(n) \leq 300$ *olacak şekildeki en büyük n tamsayısını bulunuz.* (*AIME*)

Örnek 35 $\log_5 x + 3^{\log_3 y} = 5$ *ve* $x^y = 5^6$ *denklemlerini sağlayan kaç* (x, y) *ikilisi vardır?*

Örnek 36 $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$ *denklem sistemini çözünüz.*

Örnek 37 $2 \leq a \leq 2005$ *ve* $2 \leq b \leq 2005$ *olmak üzere,* $\log_a b + \log_b a = 5$ *denklemini sağlayan* (a, b) *tamsayı ikililerini sayısını bulunuz.* (*AIME*)

Örnek 38 *a ve r pozitif tamsayılar ve $a_1 = a$ olmak üzere, $a_1, a_2, ...$ ortak çarpanı r olan bir geometrik dizi olsun.*

$$\log_8 a_1 + \log_8 a_2 + \cdots + \log_8 a_{12} = 2006$$

ise, (a, r) *ikililerinin sayısı kaçtır?* (*AIME*)

Örnek 39 $\lceil x \rceil$ *ve* $\lfloor x \rfloor$ *sırasıyla x sayısından küçük veya eşit olan en büyük tamsayı ile x sayısından büyük veya eşit olan en küçük tamsayıyı göstersin. Buna göre,*

$$S = \sum_{k=1}^{1000} k\left(\lceil \log_{\sqrt{2}} k \rceil - \lfloor \log_{\sqrt{2}} k \rfloor\right)$$

toplamının 1000'e bölümünden kalan kaçtır? (*AIME*)

Örnek 40 $[\![x]\!]$, *x sayısından büyük olmayan en büyük tamsayıyı gösterdiğine göre,*

$$[\![\log_2 1]\!] + [\![\log_2 2]\!] + [\![\log_2 3]\!] + \cdots + [\![\log_2 n]\!] = 1994$$

eşitliğinin sağlanması için n kaç olmalıdır? (*AIME*)

Örnek 41 $(\log_b a - \log_a b)^2 + (\log_{b^{1/2}} a - \log_{a^2} b)^2 + \cdots + (\log_{b^{1/2^n}} a - \log_{a^{2^n}} b)^2$ *ifadesini sadeleştiriniz.*

Örnek 42 *3'ün kuvvetlerinden oluşan $a_0, a_1, a_2, ...$ artan geometrik dizisi veriliyor.*

$$\sum_{n=0}^{7} \log_3(a_n) = 308 \quad ve \quad 56 \leq \log_3\left(\sum_{n=0}^{7} a_n\right) \leq 57$$

olduğuna göre, $\log_3(a_{14})$ *değerini bulunuz.* (*AIME*)

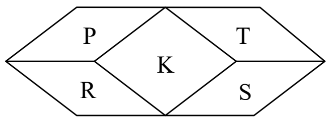
Trigonometri

2.1 Trigonometrik Fonksiyonlar

Örnek 43 *$k \in \mathbb{Z}$ için, $a_k = \sin^k x + \cos^k x$ olduğuna göre, $3a_4 - 2a_6 = 1$ olduğunu gösteriniz.*

Örnek 44 $\log \sin x + \log \cos x = -1$ *ve* $\log(\sin x + \cos x) = \dfrac{1}{2}(\log n - 1)$ *olduğuna göre n değerini bulunuz.* (*AIME*)

Örnek 45 Bir $ABCDEF$ altıgeni, şekildeki gibi 5 tane P, T, R, S ve K eşkenar dörtgenine parçalanıyor. P, T, R, S eşkenar dörtgenleri eştir ve her birinin alanları $\sqrt{2006}$'dır. K eşkenar dörtgeninin alanının olabileceği tamsayı değerlerin sayısı kaçtır? (AIME)



Örnek 46 $(1 + \sin t)(1 + \cos t) = 5/4$ *ve* $(m, n) = 1$ *olacak şekildeki k, m, n pozitif tamsayıları için,*

$$(1 - \sin t)(1 - \cos t) = \frac{m}{n} - \sqrt{k}$$

eşitliği sağlanıyorsa, $k + m + n$ toplamını bulunuz. (*AIME*)

Örnek 47 *θ bir dar açı olmak üzere,* $\sec^2 \theta + \tan^2 \theta = 4$ *ise,* $\csc^2 \theta + \cot^2 \theta$ *değerini bulunuz.*

Örnek 48 $x \in [-5\pi/12, -\pi/3]$ *olmak üzere,*

$$y = \tan(x + \frac{2\pi}{3}) - \tan(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{6})$$

ifadesinin maksimum değerini bulunuz.(*Çin Ulusal M.O.*)

Örnek 49 $\sec x + \tan x = 22/7$, $\csc x + \cot x = m/n$ *ve m ile n aralarında asal ise $m + n =?$* (*AIME*)

Örnek 50 $f(x) = 5\cos^4(7x + 30°) + 21$ *fonksiyonunun periyodunu bulunuz.*

Örnek 51 *Periyodu 1 olan bir fonksiyon yazınız.*

2.2 Toplam ve Fark Formülleri:

Örnek 52 $a+b+c=\dfrac{\pi}{2}$ *ise,* $\tan a\cdot\tan b+\tan b\cdot\tan c+\tan c\cdot\tan a=1$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 53 $a+b+c=\dfrac{\pi}{2}$ *ise* $\tan^2 a+\tan^2 b+\tan^2 c\geq 1$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 54 $\tan x\tan 2x\tan 3x=12$ *ise,* $\tan x+\tan 2x-\tan 3x=?$

Örnek 55 $\tan x+\tan y=25$ *ve* $\cot x+\cot y=30$ *olduğuna göre* $\tan(x+y)$ *değerini bulunuz.* (*AIME*)

Örnek 56 *Bir* ABC *üçgeninde*

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 57 $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$ *ise,*

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 58 $k\in\mathbb{Z}$ *için,* $A+B+C=k\pi$ *ise* $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 59 $\tan a$ *ve* $\tan b$, $x^2+px+q=0$ *denkleminin kökleri olduğuna göre,*

$$K=\sin^2(a+b)+p\sin(a+b)\cdot\cos(a+b)+q\cos^2(a+b)$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Örnek 60 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$ *ve* $\tan\alpha=5$ *ise,* $\tan(\alpha+\beta)$ *ifadesinin değerini hesaplayınız.*

Örnek 61 *Bir* $ABCD$ *karesinin merkezi* O *olsun.* $|AB|=900$, E *ve* F, $[AB]$ *üzerinde öyle iki nokta ki,* E *noktası,* A *ile* F *arasında ve* $|AE|<|BF|$*'dir.* $m(E\widehat{O}F)=45^\circ$ *ve* $|EF|=400$ *olduğuna göre,* $p,q,r\in\mathbb{Z}^+$ *için,* r, *herhangi bir tamsayının karesine bölünmemek koşuluyla* $|BF|=p+q\sqrt{r}$ *ise* $p+q+r$ *değerini hesaplayınız.* (*AIME*)

Örnek 62 *Bir* ABC *üçgeninde,* $\tan C\widehat{A}B=22/7$*'dir.* A*'dan* $[BC]$ *doğru parçasına inilen yükseklik,* $[BC]$*'yi* 3 *ve* 17 *br'lik parçalara ayırmaktadır. Buna göre,* ABC *üçgeninin alanını bulunuz.* (*AIME*)

2.3 Yarım Açı Formülleri

Örnek 63 $x^2+ax+b=0$ *ikinci dereceden denkleminin kökleri* $\sin 15^\circ$ *ve* $\cos 15^\circ$ *ise* a^4-b^4 *ifadesinin değeri kaçtır?*

Örnek 64 $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = ?$

Örnek 65 $\tan\dfrac{\pi}{20}-\tan\dfrac{3\pi}{20}-\tan\dfrac{7\pi}{20}+\tan\dfrac{9\pi}{20}$ *ifadesi neye eşittir?*

2.4 Üç kat Formülleri

1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ veya $\sin 3\theta = -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta$ eşitlikleri vardır.
İspat :
2) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ veya $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$ eşitlikleri vardır.
İspat :
3) $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$ eşitliği sağlanır.
İspat :

Örnek 66 $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ$ *çarpımının değerini bulunuz.*

Problem : En genel halde,

$$\tan\theta\tan(\frac{\pi}{3}-\theta)\tan(\frac{\pi}{3}+\theta)=\tan 3\theta$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 67 $\sin(n\theta)$ *ve* $\cos(n\theta)$ *ifadelerinin açılımlarının,*

$$\cos(n\theta)=\binom{n}{0}\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots$$

ve

$$\sin nx=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5-\cdots$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 68 $\sin 3a\cdot\sin^3 a+\cos 3a\cdot\cos^3 a=\cos^3 2a$ *olduğunu gösteriniz.*

Problem : Siz de, $\cos^3 a\cdot\sin 3a+\sin^3 a\cdot\cos 3a=\dfrac{3}{4}\sin 4a$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 69 $\sin 3^\circ$ *nin değerini köklü sayılarla ifade ediniz.* (*BALTIK WAY M.O.*)

Örnek 70 $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ *denkleminin bir kökünün* $2\cos(\pi/7)$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 71 $\cos\theta + \dfrac{\cos(3\theta)}{\cos\theta}$ *fonksiyonunun en küçük değeri kaçtır?* (*Un. South Carolina Math. Contest*)

2.5 Dönüşüm Formülleri

Örnek 72 $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y)$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 73 $\cos\dfrac{\pi}{5} - \cos\dfrac{2\pi}{5}$ *ifadesinin değerini hesaplayınız.*

Örnek 74 A, B *ve* C *bir üçgenin iç açıları olduğuna göre,*

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4\cos A\cos B\cos C$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Örnek 75 A, B *ve* C *bir üçgenin iç açıları olduğuna göre,*

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2)$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 76 A, B *ve* C *bir üçgenin iç açıları ve* $\sin A\sin B\sin C = 5/12$ *olduğuna göre,* $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ *ifadesinin değerini bulunuz.*

Örnek 77 $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$ *ifadesinin değerini bulunuz.*

Örnek 78 A, B, C *ve* D *bir dörtgenin iç açıları olduğuna göre,*

$$\sin A + \sin B + \sin C + \sin D = 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}$$

bağıntısının doğruluğunu gösteriniz.

Örnek 79 $\tan 19x^\circ = \dfrac{\cos 96^\circ + \sin 96^\circ}{\cos 96^\circ - \sin 96^\circ}$ *denklemini sağlayan en küçük* x *pozitif tamsayısı kaçtır?* (*AIME*-1996)

2.6 Ters Dönüşüm Formülleri

Örnek 80 $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}$ *olduğunu ispatlayınız.*

2.7 Bir Üçgenin Elemanları ve Trigonometrik Bağıntılar

Sinüs Teoremi : *Köşeleri R yarıçaplı çember üzerinde olan bir üçgenin kenar ve açıları arasında,*

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}$$

bağıntısı vardır. Bu çembere üçgenin çevrel çemberi denir.

İspat :

Kosinüs Teoremi : *Herhangi bir ABC üçgeninin kenarlarıyla açıları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.*

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

İspat :

Tanjant Teoremi : Bir üçgende iki kenarın toplamının bu kenarların farkına oranı, bu kenarlar karşısındaki açıların yarılarının toplamlarının tanjantıyla, farklarının tanjantı oranına eşittir. Yani, aşağıdaki üçgen göz önüne alınırsa,

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \dfrac{B+C}{2}}{\tan \dfrac{B-C}{2}}$$

eşitliği sağlanır.

İspat :

Örnek 81 *ABC üçgeninde, $3\sin A + 4\cos B = 6$ ve $4\sin B + 3\cos A = 1$ olduğuna göre C açısının ölçüsü en fazla kaç olabilir?*

Örnek 82 *Kenarları ardışık tamsayı ve en büyük açısı, en küçük açının iki katı olan sadece bir üçgen olduğunu gösteriniz.* (*IMO*)

Örnek 83 *Bir ABC üçgeninde $\cot \frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}$ ise, bu üçgenin dik üçgen olduğunu gösteriniz.*

Örnek 84 *Bir ABC üçgeni için,*

$$\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} = 2$$

olduğuna göre, bu üçgenin bir dik üçgen olduğunu ispatlayınız.(*IMO Shortlist*)

Örnek 85 *Bir ABC üçgeninin alanı S olduğuna göre*

a) $S=\dfrac{1}{4}\left(a^{2}\sin 2B+b^{2}\sin 2A\right)$

b) $S=\dfrac{\left(a^{2}-b^{2}\right)\sin A\sin B}{2\sin\left(A-B\right)}$

eşitliklerinin sağlandığını gösteriniz.

Örnek 86 *Bir* ABC *üçgeninde,* $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{2ur}{R}$ *bağıntısının varlığını ispatlayınız.*

Örnek 87 ABC *dar açılı üçgeninin alanı* S *olmak üzere,*

$$\sqrt{a^{2}b^{2}-4S^{2}}+\sqrt{b^{2}c^{2}-4S^{2}}+\sqrt{c^{2}a^{2}-4S^{2}}=\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{2}$$

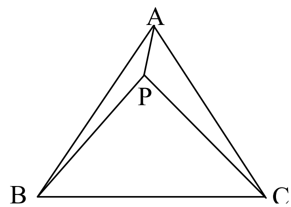
eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

Örnek 88 *Bir* ABC *üçgeninde,* r *iç teğet çemberin yarıçapı,* R *çevrel çemberin yarıçapı ve* $2u=a+b+c$ *ise,*

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{u-a},\quad \tan\frac{B}{2}=\frac{r}{u-b}\quad \textit{ve}\quad \tan\frac{C}{2}=\frac{r}{u-c}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 89 Yandaki ikizkenar ABC üçgeninde $|BC|=|AC|$, $A\widehat{C}B=106^{\circ}$, $m(P\widehat{A}C)=7^{\circ}$ ve $m(P\widehat{C}A)=23^{\circ}$ olduğuna göre, $C\widehat{P}B$ açısı kaç derecedir? (AIME)



Örnek 90 *Bir* ABC *üçgeninde* $a^{2}+b^{2}=1989c^{2}$ *ise* $\dfrac{\cot C}{\cot A+\cot B}$ *değeri kaçtır? (AIME)*

Örnek 91 *Bir* ABC *üçgeninde, eğer* $\cot A/2,$ $\cot B/2$ *ve* $\cot C/2$ *değerleri bir aritmetik dizi oluşturuyorsa, üçgenin* a, b *ve* c *kenarlarının da bir aritmetik dizi oluşturacağını gösteriniz.*

Örnek 92 *Bir* ABC *üçgeninde,* r *iç teğet çemberin yarıçapı,* R *çevrel çemberin yarıçapı ve* $2u=a+b+c$ *ise,*

a $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{u},$

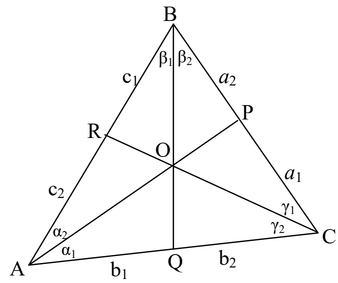
b) $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{4R+r}{u}$

olduğunu gösteriniz.

Trigonometrik Ceva Formülü : Bir ABC üçgeninde, A, B ve C köşesinden kenarlara $[AP]$, $[BQ]$ ve $[CR]$ doğru parçaları çiziliyor. Bu doğru parçaları bir noktada kesişiyorlar. Üçgenin köşelerinde oluşan açılar şekilde gibi belirtilmiştir. Buna göre,

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$$

eşitliği sağlanır.



İspat :

Örnek 93 *Bir ABC üçgeninde, $B\widehat{A}C=40^\circ$ ve $A\widehat{B}C=60^\circ$ olarak veriliyor. D ve E sırasıyla, AC ve AB kenarları üzerinde, $C\widehat{B}D=40^\circ$ ve $B\widehat{C}E=70^\circ$ olacak şekildeki noktalar olsun. F noktası BD ve CE'nin kesişim noktası olduğuna göre, AF'nin BC'ye dik olduğunu ispatlayınız.* (*KANADA*)

Örnek 94 *Herhangi bir ABC üçgeninde,*

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$$

eşitliğinin sağlanacağını gösteriniz.

Örnek 95 *Herhangi bir ABC üçgeninde,*

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{c^2+b^2-a^2}=\frac{\tan A}{\tan B}$$

eşitliğini sağlanacağını gösteriniz.

Örnek 96 *Kenarları a, b, c ve d olan bir $ABCD$ kirişler dörtgeninin alanının, $2u=a+b+c+d$ olmak üzere,*

$$A(ABCD)=\sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 97 *Kenarları a, b, c, d olarak verilen bir kirişler dörtgeninin çevrel çemberinin yarıçapını hesaplayınız.*

Örnek 98 *Bir ABC üçgenin de, dış teğet çemberlerin yarıçapları r_a, r_b, r_c ve iç teğet çemberin yarıçapı r olmak üzere, $r_a-r_b-r_c=r$ ise, bu üçgenin dik üçgen olduğunu gösteriniz.*

Örnek 99 *Bir konveks $ABCD$ dörtgeninde, $\widehat{A}\cong\widehat{C}$, $|AB|=|CD|=180$ ve $|AD|\neq|BC|$ olarak veriliyor. Dörtgenin çevresi 640 ise, $[\![1000\cos A]\!]$ değerini bulunuz.* (*AIME*)

Örnek 100 *Kenar uzunlukları* $|AB| = 13,\ |BC| = 15$ *ve* $|CA| = 14$ *olan bir* ABC *üçgeninde,* $[BC]$ *üzerinde,* $|CD| = 6$ *ve* $B\widehat{A}E = C\widehat{A}D$ *olacak şekilde bir* D *noktası alınıyor.* $(m,n) = 1$ *olmak üzere,* $|BE| = m/n$ *ise* $n = ?$ (*AIME*)

Örnek 101 *Kenar uzunlukları* a, b, c *olan bir* ABC *üçgeninde,* r *iç teğet çemberin yarıçapı,* R *çevrel çemberin yarıçapı ve* $2u = a + b + c$ *ise*
$i)\ abc = 4Rru$
$ii)\ ab + ac + bc = u^2 + r^2 + 4rR$
$iii)\ a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(u^2 - r^2 - 4rR\right)$
$iv)\ a^3 + b^3 + c^3 = 2\left(u^3 - 3r^2u - 6urR\right)$
eşitliklerinin sağlandığını gösteriniz.

Örnek 102 *Bir* ABC *üçgeninde,*

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r}{R} + 1$$

olduğunu ispatlayınız.

2.8 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Örnek 103 $2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$ *eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.*

Örnek 104 $\sin(\arccos x) = x - 1$ *ise,* $x = ?$

Örnek 105 $\sin\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ *değerini hesaplayınız.*

Örnek 106 $\arcsin\left(\cos\frac{29}{5}\pi\right)$ *değerini hesaplayınız.*

Örnek 107 $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{8}$ *değerini hesaplayınız.*

Örnek 108 $\arcsin(\cos\arcsin x)$ *ve* $\arccos(\sin\arccos x)$ *arasında bir bağıntı bulunuz.*

Örnek 109 $10\cot(\operatorname{arccot} 3 + \operatorname{arccot} 7 + \operatorname{arccot} 13 + \operatorname{arccot} 21)$ *değerini hesaplayınız.* (*AIME*)

Örnek 110 $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$ *eşitliğini sağlayan* n *pozitif tamsayısını bulunuz.* (*AIME*)

2.9 Trigonometrik Denklemler

Örnek 111 $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 112 $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 113 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 114 $2 (\sin x + \cos x) = \sec x$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 115 $\cos x + m \sin x - 1 - m = 0$ *ve* $m \cos x - \sin x + 1 + m = 0$ *denklemleri veriliyor. Bu denklemlerin ortak bir kökünün olması için* m *ne olmalıdır. Bu ortak kökü bulunuz.*

Örnek 116 $8 \sin^6 x + 3 \cos 2x + 2 \cos 4x + 1 = 0$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 117 $\tan 2x + \cot x = 8 \cos^2 x$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 118 $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 119 $\cot x - \tan x = \sin x + \cos x$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 120 $\tan (\cot x) = \cot (\tan x)$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 121 $(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 4x = 2$ *denkleminin* $[0, 2\pi]$ *aralığında kaç çözümü vardır?*

Örnek 122 $100^\circ < x^\circ < 200^\circ$ *olmak üzere,* $\cos^3 3x^\circ + \cos^3 5x^\circ = 8 \cos^3 4x^\circ \cos^3 x^\circ$ *eşitliğini sağlayan tüm* x *değerlerinin toplamını bulunuz.* (*AIME*)

Örnek 123 x *ve* y *reel sayıları*

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos x + \sin y = -1 \end{cases}$$

denklem sistemini sağladığına göre $\cos 2x = \cos 2y$ *olduğunu ispatlayınız.* (*ESTONYA M.O.*)

Örnek 124 $a \sin x + b \cos x = c$ *denklemini çözünüz*

Örnek 125 $m \sin x + m \cos x = 4$ *denkleminin çözümü olacak şekilde kaç* m *tamsayısı vardır?*

Örnek 126 $\sin x+\cos x=2$ *denkleminin çözümlerini bulunuz.*

Örnek 127 $a\tan x+b\cot x=c$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 128 $\tan x+2\cot x=3$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 129 $2\sin 11x+\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x=0$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 130 $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 131 $\sin^2 x+\sin x\cos x+k\cos^2 x=2$ *denkleminin çözümünün olabilmesi için k sayısı nasıl seçilmelidir? $k=8$ için denklemi çözünüz.*

Örnek 132 $a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x=c$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 133 $\sin^3 x+\cos^3 x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *denklemini çözünüz.*

2.10 Trigonometrik Denklemlerin Bilinmeyenlere Göre İncelenmesi

Örnek 134 $\cos mx+\cos 2nx-\cos(m+2n)x=1$ *denklemini çözünüz ve m ve n değerlerine göre inceleyiniz.*

Örnek 135 $\sin^2 x+\sin^2(n-x)=m$ *denklemini çözünüz ve m ile n'ye göre inceleyiniz.*

b) $n=60°$ *alınırsa, m sayısı hangi aralıktan alınmalıdır?*

c) $m=6/5$ *alınırsa, n sayısının $0°$, $60°$, $90°$ ve $120°$ değerlerinden hangisi için denklemin çözümü yoktur?*

2.11 Yardımcı Bilinmeyen Yardımıyla Çözülebilen Denklemler

Örnek 136 *Her $a\in\mathbb{R}-\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ için*

$$\frac{1}{\sin a}=x\cot\frac{a}{2}+y\cot a$$

eşitliğini sağlayan kaç (x,y) reel sayı ikilisi vardır?

Örnek 137 $m\cos x-(m+1)\sin x=m$ *denkleminin x_1 ve x_2 köklerinin farkının $\pi/2$ olması için m ne olmalıdır?*

Örnek 138 $(\sin^4 x + \cos^4 x)/2 = \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos x$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 139 $\sin^8 x + \cos^8 x = 1/8$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 140 $\sin^5 x - \cos^5 x = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x}$ *denklemini çözünüz.*

2.12 Trignometri Yardımıyla Denklem Çözümü

Örnek 141 $x \geq 0$ *için,* $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} + \sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} = 2x$ *denklemini çözünüz.* (*Kanada M. Soc. MOCP*)

Örnek 142 $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Örnek 143 $xy + x^2\sqrt{1-y^2} + y^2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ *ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.* (*BALTIK WAY M.O.*)

2.13 Trigonometrik Toplamlar

Örnek 144 $S = \sin a + \sin(a+\theta) + \sin(a+2\theta) + \cdots + \sin[a+(n-1)\theta]$ *toplamını hesaplayınız.*

Problem : $\sin 1 + \sin 3 + \sin 5 + \cdots + \sin 101$ toplamını, yukarıdaki formülü uygulamadan, aynı yöntemle çözünüz.

Örnek 145 $S = \cos a + \cos(a+\theta) + \cos(a+2\theta) + \cdots + \cos[a+(n-1)\theta]$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 146 $S = \cos 1 + \cos 3 + \cos 5 + \cdots + \cos 1001$ *toplamını hesaplayınız.*

Problem : $S = \cos 3 + \cos 7 + \cos 11 + \cdots + \cos 99$ toplamını hesaplayınız.

Örnek 147 ***a)*** $S = \cos^2 a + \cos^2(a+r) + \cdots + \cos^2[a+(n-1)r]$ *ve*
b) $T = \sin^2 a + \sin^2(a+r) + \cdots + \sin^2[a+(n-1)r]$ *toplamlarını hesaplayınız.*

Örnek 148 $S = \sin a \sin 2a + \sin 2a \sin 3a + \cdots + \sin na \sin(n+1)a$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 149 $2\sin 2^\circ, 4\sin 4^\circ, 6\sin 6^\circ, ..., 180\sin 180^\circ$ *sayılarının ortalamasının* $\cot 1^\circ$ *olduğunu ispatlayınız.* (*USAMO*)

2.13.1 Toplamdaki her bir ifadeyi iki trigonometrik fonksiyonun farkı olarak yazma

Örnek 150 *$n\in\mathbb{Z}^+$ ve $m\in\mathbb{N}$ için $x\neq k\pi/2^m$ olmak üzere,*

$$S=\frac{1}{\sin 2a}+\frac{1}{\sin 4a}+\frac{1}{\sin 8a}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n a}=\cot a-\cot 2^n a$$

olduğunu gösteriniz. (*IMO* - 1966)

Örnek 151 $S=\dfrac{1}{\sin 30^\circ \sin 31^\circ}+\dfrac{1}{\sin 32^\circ \sin 33^\circ}+\cdots+\dfrac{1}{\sin 148^\circ \sin 149^\circ}$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 152 $S=\dfrac{1}{\cos a\cos 2a}+\dfrac{1}{\cos 2a\cos 3a}+\cdots+\dfrac{1}{\cos na\cos(n+1)a}$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 153 $\dfrac{1}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ}+\dfrac{1}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ}+\cdots+\dfrac{1}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ}=\dfrac{1}{\sin n^\circ}$ *eşitliğini sağlayan en küçük n pozitif tamsayısını bulunuz.* (*AIME*)

Örnek 154 $S=\tan a+\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{a}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{a}{2^n}$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 155 $a=\pi/2008$ *olmak üzere,*

$$2\left[\cos a\sin a+\cos 4a\sin 2a+\cos 9a\sin 3a+\cdots+\cos n^2a\sin n^2a\right]$$

ifadesi tamsayı olacak şekilde en küçük n pozitif tamsayısını bulunuz. (*AIME*)

Örnek 156 $\dfrac{\tan 2010}{\tan 1}-\sum\limits_{n=1}^{2010}\tan n\tan(n+1)$ *ifadesinin değerini bulunuz.*

Örnek 157 *m ve n aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere, $m/n<0$ ve*

$$T=\sin 5+\sin 10+\sin 15+\cdots+\sin 175=\tan\frac{m}{n}$$

iii) Toplamdaki terimleri gruplayarak toplamı hesaplama

Örnek 158 $\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cdots+\cos 180^\circ$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 159 $x=\dfrac{\cos 1+\cos 2+\cdots+\cos 44}{\sin 1+\sin 2+\cdots+\sin 44}$ *olduğuna göre, $[\![100x]\!]$ kaçtır?* (*AIME*)

2.14 Trigonometrik Çarpımlar

Örnek 160 $P = \cos a \cos 2a \cos 2^2 a \cdots \cos 2^{100} a$ *çarpımının değerini hesaplayınız.*

Örnek 161 $a = \dfrac{2\pi}{1999}$ *olmak üzere*

$$A = \cos a \cos 2a \cos 3a \cdots \cos 999a$$

çarpımının değerini hesaplayınız. (103 *Trig. Prob. - Andrescu - Feng.*)

Örnek 162 $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \cdots (1 + \tan 45^\circ) = 2^n$ *olduğuna göre,* n *değerini bulunuz.* (*AMC* 12.)

2.15 Karışık Örnekler

Örnek 163 60° *lik bir açı arasında öyle bir ışın çiziliyor ki, yeni oluşan açıların sinüsleri oranı* $\sqrt{3} + 1$ *oluyor. Bu açılar kaçar derecedir?*

Örnek 164 30° *lik bir açı öyle iki parçaya ayrılıyor ki, bu açıların tanjantları oranı* n *oluyor. Buna göre,* n *sayısı hangi aralıkta olabilir?*

Örnek 165 A, B *ve* C *bir üçgenin iç açıları ve* $\cos A \cos B \cos C = 3/8$ *olduğuna göre,* $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ *ifadesinin değerini bulunuz.*

Örnek 166 $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$ *eşitliği sağlanıyorsa,* α, β *ve* γ *açıları arasında nasıl bir bağıntı vardır?*

Örnek 167 $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}\sin(\alpha + \beta)$ *ve* $\sin\beta = 3/5$ *ise,* $\tan(\alpha + \beta) = ?$

Örnek 168 $\cot x - 2\sin 2x = 1$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 169 $A+B+C = \pi$ *ise,* $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 170 $\sin^{100} x + \cos^{100} x = 1$ *denkleminin* $[0, 2\pi)$ *aralığında sadece dört kökünün bulunduğunu gösteriniz.*

Örnek 171 $\tan 10^\circ \tan 50^\circ \tan 70^\circ$ *çarpımının değerini hesaplayınız.*

Örnek 172 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\dfrac{1}{n^2 - n + 1}\right)$ *değerini hesaplayınız.*

Örnek 173 $A_k = \dfrac{k(k-1)}{2} \cos \dfrac{k(k-1)\pi}{2}$ *olduğuna göre,*

$$S = |A_{19} + A_{20} + \cdots + A_{98}|$$

değerini hesaplayınız. (*AIME*)

Örnek 174 $a, b,$ *c, d pozitif terimli bir aritmetik dizi oluşturduğuna göre,*

$$\sin ax \sin bx = \sin cx \sin dx$$

denklemini çözünüz.

Örnek 175 $\cos 3^\circ$ *'ün irrasyonel sayı olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 176 $\cos^{-1}(1/3)/\pi$ *sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.* (*Putnam M.O.*)

Örnek 177 $x \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $\sin(\cos x)$ *ve cos*$(\sin x)$ *ifadelerinden hangisi daha büyüktür?.*

Örnek 178 $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} a + 1 = 0$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 179 $\begin{cases} x = \cot\theta + \tan\theta \\ y = \sec\theta - \cos\theta \end{cases}$ *denklem sistemindeki θ'yı yok ederek ederek denklemi x ve y tarafından sağlanan bir polinom denklemi yapınız.* (*Kanada M. Soc. MOCP*)

Örnek 180 $\cos x + \sin x = m$ *denkleminin* $x_2 - x_1 = \pi/2$ *bağıntısını gerçekleyen* x_1 *ve* x_2 *gibi iki kökünün olması için* m *ne olmalıdır. Bu durumda* x_1 *ve* x_2 *köklerini bulunuz.*

Örnek 181 $(\sin x + \cos x)\sqrt{2} = \tan x + \cot x$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Örnek 182 A, B *ve* C *bir üçgenin iç açıları olduğuna göre,*

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 183 $\sin x - \sin 3x + \sin 5x = \cos x - \cos 3x + \cos 5x$ *trigonometrik denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.* (*Kanada M. Soc. MOCP*)

Örnek 184 a, b, c *reel sayılar olsun.*

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \le \left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)$$

olduğunu ispatlayınız. (*Andreescu - Feng* 103 *Trig. Problems*)

Örnek 185 $\sec(x+a)+\sec(x-a)=2\sec x$ *denkleminin,* $a=60°$, $a=90°$, $a=180°$, $a=250°$ *ve* $a=120°$ *değerlerinden hangileri için çözümü vardır.*

Örnek 186 *Bir* ABC *üçgeninde* $\sin A+\sin C=2\sin B$ *bağıntısı varsa,*

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$$

ifadesinin değerini bulunuz.

Örnek 187 *Bir* ABC *üçgeninde,* a, b, c *kenarları,* A, B, C *ise açıları gösteriyor. Elemanları arasında*

$$a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$$

bağıntısı olan ve tüm açıları tamsayı olan kaç ABC *üçgeni vardır?*

Örnek 188 *Bir ikizkenar üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı* R *ve iç çemberin yarıçapı da* r *olsun. Bu iki çemberin merkezler uzaklığı* d *ise,*

$$d=\sqrt{R(R-2r)}$$

olduğunu gösteriniz. (*IMO*)

Örnek 189 $m\sin x+\cos x=m$ *denkleminin her* m *reel sayısı için çözümünün bulunacağını gösteriniz.*

Örnek 190 $x+y=m$ *ve* $\sin x\sin y=n$ *denkleminin çözümünün olması için,* m *ile* n *arasında nasıl bir bağıntı olmalıdır?*

Örnek 191 *Verilen bir* ABC *dik üçgeninde, uzunluğu* a *olan* $[BC]$ *hipotenüsü,* n *bir tek sayı olmak üzere,* n *eşit parçaya bölünüyor. Bölünmüş doğru parçaları arasındaki, hipotenüsün orta noktasını içeren doğru parçasını gören, köşesi* A *olan dar açı* α *olsun. Hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğu da* h *ise*

$$\tan a=\frac{4nh}{(n^2-1)\,a}$$

olduğunu ispatlayınız. (*IMO*)

Örnek 192 n *bir pozitif tamsayı olmak üzere* $\cos^n x-\sin^n x=1$ *denklemini çözünüz.* (*IMO*)

Örnek 193 $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$ *denklemini çözünüz.* (*IMO*)

Örnek 194 *Bir* ABC *üçgeninin kenar uzunlukları* a, b, c *olsun. Eğer*

$$a+b=\tan\frac{C}{2}(a\tan A+b\tan B)$$

ise üçgenin ikizkenar üçgen olduğunu ispatlayınız. (*IMO*)

BU ÖRNEKLERİN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 5 (Analiz - Cebir 2) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

2.16 Alıştırmalar

1. $\theta \in (0, \pi/2)$ ise, $\arctan 1 + \arctan \sqrt{3}$ değerinin $7\pi/12$ olduğunu gösteriniz.

2. $\sin 36° \sin 72° \sin 108° \sin 144°$ çarpımının değerinin $5/16$ olduğunu gösteriniz.

3. $\cos 72° + 2\cos 144° + 3\cos 216° + 4\cos 288°$ toplamının $-5/2$ olduğunu gösteriniz.

4. $x, y, z \in (0, \pi/2)$ ise, $\sin(x+y+z) < \sin x + \sin y + \sin z$ olduğunu gösteriniz.

5. $\theta \in (0, \pi/2)$ ise, $\arcsin(4/5) + \arcsin(5/13) + \arcsin(16/65)$ değerinin $\pi/2$ olduğunu gösteriniz.

6. $\dfrac{\sin kx}{\sin x} = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x$ eşitliğinin sağlanması için k kaç olmalıdır?

7. $2\sin^2 3x + \sin^2 6x = 2$ denklemini çözünüz.

8. $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$ denklemini çözünüz.

9. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x \cos y = 3/4 \end{cases}$ denklem sistemini çözünüz.

10. $\begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \tan x/2 + \tan y/2 = 2 \end{cases}$ denklem sistemini çözünüz.

11. $x + y + a + b = \pi$ olmak üzere, $\dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{\sin a}{\sin b}$ denklemini sağlayan x ve y değerleri için, $\cot x - \cot y = \cot a - \cot b$ olduğunu ispatlayınız.

12. ABC ve DEF üçgenlerinde, $m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = \pi$ ve $m(\widehat{B}) + m(\widehat{E})$ ise, üçgenlerin kenarları arasında $ad = be + cf$ bağıntısı olduğunu ispatlayınız.

13. Bir ABC üçgeninde, $b - a = \lambda c$ ise, $\cot(\dfrac{B-A}{2}) = \dfrac{1+\lambda\cos B}{\lambda \sin B}$ olduğunu gösteriniz.

14. Bir ABC üçgeninde, $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$ olduğunu gösteriniz.

15. Bir ABC üçgeninde, $\cot A$, $\cot B$ ve $\cot C$ değerleri bir aritmetik dizi oluşturuyorsa, bu üçgenin kenarlarının karelerinin de bir aritmetik dizi oluşturacağını gösteriniz.

16. $\theta \in (0°, 45°)$ olmak üzere,

$$a = (\tan\theta)^{\tan\theta}\ ,\ b = (\tan\theta)^{\cot\theta}\ ,\ c = (\cot\theta)^{\tan\theta}\ ,\ \ d = (\cot\theta)^{\cot\theta}$$

sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

17. $0 \le a < b \le \pi/2$ olmak üzere, $a - \sin a < b - \sin b$ olduğunu ispatlayınız. $\pi \le a < b \le 3\pi/2$ içinde bu eşitsizlik geçerli olur mu? (BREZİLYA - 1979)

18. Her $\theta \in \mathbb{R}$ için, $|\cos\theta| + |\cos 2\theta| \ge 1/2$ olduğunu gösteriniz. Bu eşitsizlikten yararlanarak,

$$|\cos\theta| + |\cos 2\theta| + \left|\cos 2^2\theta\right| + \cdots + |\cos 2^n\theta| \ge \frac{n}{4}$$

olduğunu ispatlayınız.

19. $ABCD$ bir konveks dörtgen olmak üzere, $m(B\widehat{A}C) = m(D\widehat{B}C) = 30°$, $m(C\widehat{A}D) = 20°$ ve $m(A\widehat{B}D) = 50°$ olarak veriliyor. Köşegenler P noktasında kesişiyorlarsa, $|PC| = |PD|$ olduğunu ispatlayınız. (BREZİLYA - 1993)

20. Bir ABC üçgeninin C açısının açıortayı, $[AB]$ kenarını D noktasında kesiyor. $|CD| = \dfrac{2ab\cos C/2}{a+b}$ olduğunu ispatlayınız. (KANADA - 1969)

21. $ABCD$ dörtgeninde $|AD| = |BC|$ olarak veriliyor. $(A\widehat{D}C) > (B\widehat{C}D)$ olduğuna göre, $|AC| > |BD|$ olduğunu ispatlayınız. (KANADA - 1971)

22. ABC üçgeninin bir P iç noktası için, $P\widehat{A}B = 10°$, $P\widehat{B}A = 20°$, $P\widehat{C}A = 30°$ ve $P\widehat{A}C = 40°$ açıları oluşuyorsa, ABC üçgeninin ikizkenar olduğunu ispatlayınız. (USA - 1996)

23. $n \ge 2$ bir tamsayı olmak üzere,

$$\prod_{k=1}^{n} \tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n} \cot\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$$

olduğunu ispatlayınız. (Asya - Pasifik - 1982)

24. ABC, çevrel çemberinin merkezi O olan dar açılı bir üçgen olsun. A noktasından BC'ye indirilen dikmenin ayağı P olmak üzere, $B\widehat{C}A \geq A\widehat{B}C + 30^\circ$ eşitsizliği varsa, $C\widehat{A}B + C\widehat{O}P < 90^\circ$ olduğunu ispatlayınız. (IMO - 2001)

25. $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $a, b \in (0, 1]$ veya $ab \geq 3$ ise,

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (103 Trigo. Problem)

26. $(x_n)_1^\infty$ ve $(y_n)_1^\infty$ reel sayı dizileri olsunlar. $n \geq 1$ için,

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}$$

olduğuna göre, $n > 1$ için $2 < x_n y_n < 3$ eşitsizliğinin sağlandığını ispatlayınız. (BEYAZ RUSYA - 1999) (İpucu : $x_n = \tan a_n$)

27. ABC üçgeninin çevrel ve iç teğet çemberinin yarıçapları R ve r, DEF üçgeninin çevrel ve iç teğet çemberinin yarıçapları da R' ve r' olsunlar. $\widehat{C} = \widehat{F}$ ve $Rr' = R'r$ ise, üçgenlerin benzer olduğunu ispatlayınız. (KORE - 1999)

28. Bir ABC üçgeninde, $|AC|^2$ sayısı, $|BC|^2$ ve $|AB|^2$ değerlerinin aritmetik ortalaması olduğuna göre, $\cot^2 B \geq \cot A \cot C$ olduğunu ispatlayınız. (BALTIK WAY - 1999)

29. Bir ABC üçgeninde,

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot A/2 + \cot B/2}{2\sin C}$$

olduğunu ispatlayınız. (ESTONYA - 1994)

30. Konveks bir ABCD dörtgeninin açılarından hiçbirisi dik açı değilse,

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan C + \tan D}{\tan A \tan B \tan C \tan D} = \cot A + \cot B + \cot C + \cot D$$

olduğunu ispatlayınız.

31. Bir ABC üçgeninde, B ve C köşelerinden çizilen kenarortaylar birbirine dik ise, $\cot B + \cot C \geq 2/3$ olduğunu ispatlayınız. (İSVEÇ - 1994)

32. $ABCD$ bir dikdörtgen ve E, BD köşegeni üzerinde $D\widehat{A}E = 15°$ olacak şekilde bir nokta olsun. AB üzerinde $EF \perp AB$ olacak şekilde F noktasını alalım. $|EF| = |AB|/2$ ve $|AD| = a$ olduğu biliniyor. Buna göre, $E\widehat{A}C$ açısını ve $|EC|$ uzunluğunu bulunuz. (KANADA MOCP - 2001)

33. Her bir kenarının uzunluğu a olan n kenarlı regüler bir poligon veriliyor. Bu poligonun bir iç noktasının köşelere uzaklıklarını $a_1, a_2, ..., a_n$ ile gösterelim

$$a \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} > 2\pi$$

olduğunu ispatlayınız. (KANADA MOCP - 2002)

34. $x, y, z \in \mathbb{R}$ için,

$$\sin x \sin y,\ \sin y \sin z \text{ ve } \sin z \sin x$$

sayılarından en az birinin $1/2$'den büyük olmadığını gösteriniz.

35. ABC ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{A}) = 100°$ ve $|AB| = |AC|$ olsun. B köşesinden çizilen açıortayın AC'yi kestiği nokta D ise, $|BD| + |AD| = |BC|$ olduğunu ispatlayınız. (KANADA MOCP - 1998)

36. PQR bir üçgen, A, B ve C üçgenin dışındaki noktalar olmak üzere,.

$$m(A\widehat{Q}R) = m(A\widehat{R}Q) = 15°,$$
$$m(O\widehat{P}C) = m(R\widehat{P}B) = 30°,$$
$$m(P\widehat{Q}C) = m(P\widehat{R}B) = 45°$$

ise, i) $|AC| = |AB|$ ii) $m(B\widehat{A}C) = 90°$ olduğunu ispatlayınız. (KANADA MOCP - 1998)

37. $x \in (0, \pi/2)$ olmak üzere, $\sec^6 x + \csc^6 x + \sec^6 x \csc^6 x \geq 80$ olduğunu ispatlayınız. (USA M. TALENT SEARCH - 1999)

38. Bir ABC üçgeninde, $|AC| > |BC|$ ve, CM kenarortay ve CH yüksekliktir. $m(A\widehat{C}M) = m(B\widehat{C}H) = 17°$ ise, $m(M\widehat{C}H) = ?$ (USA M. TALENT SEARCH - 2001)

39. $x \in [0, \pi/2]$ olmak üzere, $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{1}{3}$ olacak şekildeki x için, $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$ değerini bulunuz. (USA M. TALENT SEARCH - 2002)

40. $\cos^2 \pi (a-x) - 2\cos \pi (a-x) + \cos \dfrac{3\pi x}{2a} \cos \left(\dfrac{\pi x}{2a} + \dfrac{\pi}{3} \right) + 2 = 0$ denkleminin sadece bir reel kökü olacak şekildeki en küçük a doğal sayısını bulunuz. (BULGARİSTAN - 1997)

41. G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olmak üzere, AB doğrusu, AGC üçgeninin çevrel çemberinin teğetiyse, $\sin C\widehat{A}G + \sin C\widehat{B}G \leq 2/\sqrt{3}$ olduğunu ispatlayınız. (BULGARİSTAN - 1997)

42. Bir ABC üçgeninde, $A = 3B$ ise, $\left(a^2 - b^2\right)(a-b) = bc^2$ olduğunu ispatlayınız. (ÇEK ve SLOVAK - 1997)

43. Bir ABC üçgeninde, $|AB| = |AC|$ ve B'den AC'ye çizilen açırotayın AC'yi kestiği nokta D'dir. $|BC| = |BD| + |AD|$ ise, A açısını bulunuz. (KANADA - 1996)

44. Alanı, kenar uzunlukları ve açı ölçüleri (derece cinsinden) rasyonel olacak şekilde tüm üçgenleri bulunuz. (Türkiye - 2006)

Kompleks Sayılar ve De Moivre formülü

Örnek 195 $z = 1 + \cos 32 + 2\cos 16 + i \sin 32$ *karmaşık sayısının esas argümentini bulunuz.*

Örnek 196 $z = 1 + i\sqrt{3}$ *ise* z^{10} *karmaşık sayısının bulunuz.*

Örnek 197 $z = 1 + i\sqrt{3}$ *sayısının küpkökünü bulunuz.*

Örnek 198 $x^4 - 1 = 0$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Örnek 199 $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ *denkleminin köklerini bulunuz.*

Örnek 200 a *bir reel sayı ve* n *bir pozitif tamsayı olmak üzere,* $\dfrac{a + 164i}{a + 164i + n} = 4i$ *ise* n *kaçtır?* (*AIME*)

Örnek 201 b *bir pozitif bir reel sayı olmak üzere,* $z = 9 + bi$ *karmaşık sayısı veriliyor.* z^2 *ve* z^3 *sayılarının sanal kısımları aynı olduğuna göre,* b *kaçtır?* (*AIME*)

Örnek 202 a, b, c *pozitif tamsayılar olmak üzere,* $c = (a + ib)^3 - 107i$ *ise* c *kaçtır?* (*AIME*)

Örnek 203 $\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right)\cdots\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right)$ *çarpımını hesaplayınız.*

Örnek 204 1000*'den küçük veya eşit kaç pozitif* n *tamsayısı için,*

$$(\sin\theta + i\cos\theta)^n = \sin n\theta + i\cos n\theta$$

eşitliği her $\theta \in \mathbb{R}$ *için sağlanır.* (*AIME*)

Örnek 205 $z^6 + z^3 + 1 = 0$ *denkleminin argümenti* 90° *ile* 180° *arasında olan kökünün argümentini bulunuz.* (*AIME*)

Örnek 206 $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos 3^\circ$ *eşitliğini sağlayan* z *karmaşık sayısı için,* $z^{2000} + \dfrac{1}{z^{2000}}$ *sayısından büyük olan en küçük tamsayı kaçtır?* (*AIME*)

Örnek 207 P, $z^6 + z^4 + z^3 + z^2 + 1 = 0$ *denkleminin pozitif sanal kısımlı köklerinin çarpımı olsun.* $0 < r$ *ve* $0 \le \theta < 360$ *olmak üzere,* $P = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *ise* θ *kaçtır?* (*AIME*-1996)

Örnek 208 $F : \mathbb{C} - \{i\} \to \mathbb{C},\ F(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$ *fonksiyonu ve* $1 \leq n \in \mathbb{N}$ *için* $z_n = F(z_{n-1})$ *dizisi göz önüne alınıyor.* $z_0 = \dfrac{1}{137} + i$ *ve* $z_{2002} = a + ib$ *ise,* $a + b =?$ (*AIME*)

Örnek 209 $\left| z + \dfrac{1}{z} \right| = 1$ *eşitliğini sağlayan* z *karmaşık sayısının uzunluğu maksimum kaçtır?*

Örnek 210 m *ve* n *aralarında asal positif tamsayılar olmak üzere,* $m/n < 0$ *ve*

$$T = \sin 5 + \sin 10 + \sin 15 + \cdots + \sin 175 = \tan \frac{m}{n}$$

ise, $m + n$ *değerini hesaplayınız.* (*AIME*)

Örnek 211 z *karmaşık sayısı* $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos(\dfrac{\pi}{1001})$ *denkleminin bir çözümü ise*

$$z^{2002} + \frac{1}{z^{2002}}$$

ifadesinin değeri kaçtır? (*Un. South Carolina Math. Contest*)

Örnek 212 $\sin(n\theta)$ *ve* $\cos(n\theta)$ *ifadelerinin açılımlarının,*

$$\cos(n\theta) = \binom{n}{0}\cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \cdots$$

ve

$$\sin nx = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5 - \cdots$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 213 n *bir pozitif tamsayı ve* $\theta = \pi/(2n+1)$ *olsun.*

$$\binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \binom{2n+1}{5}x^{n-2} - \cdots = 0$$

denkleminin köklerinin $\cot^2\theta, \cot^2 2\theta, ..., \cot^2 n\theta$ *olduğunu ispatlayınız.* (*Kanada M. Soc. MOCP*)

Örnek 214 *Karmaşık sayıları kullanarak* $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$ *değerini hesaplayınız.* (*Kanada M. Soc. MOCP*)

Örnek 215 $\cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$ *olduğunu ispatlayınız.* (*IMO*

Soru : İmajiner kısımlarının toplamının da sıfır olduğunu kullanarak, bu açıların sinüsleri arasında bir bağıntı bulunuz.

Örnek 216 $(\sin\frac{\pi}{5})(\sin\frac{2\pi}{5})(\sin\frac{3\pi}{5})(\sin\frac{4\pi}{5})$ *çarpımının değeri kaçtır?* (*Un. South Carolina Math. Contest*)

Örnek 217 $S = \cos 5° + \cos 77° + \cos 149° + \cos 221° + \cos 293°$ *toplamını hesaplayınız.* (*Kanada M. Soc. MOCP*)

Örnek 218 $S = \binom{n}{1}\sin a + \binom{n}{2}\sin 2a + \cdots + \binom{n}{n}\sin na$ *ve*
$T = \binom{n}{1}\cos a + \binom{n}{2}\cos 2a + \cdots + \binom{n}{n}\cos na$ *toplamlarını hesaplayınız.*

Örnek 219 $\tan^2 1° + \tan^2 3° + \tan^2 5° + \cdots + \tan^2 89°$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 220 $\sin 1° \sin 2° \cdots \sin 89° \sin 90°$ *çarpımını hesaplayınız.*

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 5 (Analiz - Cebir 2) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

Fonksiyonların Limiti, Sürekliliği ve Türevi

Örnek 221 *$f(x) = \cos^2 x + \cos^2(x+\theta) - \cos x \cos(x+\theta)$ fonksiyonu x'in bir sabit fonksiyonu olacak şekilde bir θ değeri bulunuz.*(*KANADA MOCP*)

Örnek 222 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.*

Alıştırma : 1. $f : (-1,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$ fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.

2. $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{(2^x+1)\,x}{2^x-1}$ fonksiyonunun çift fonksiyon olduğunu gösteriniz.

3. $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin x + \cos x}$ fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Örnek 223 *$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ fonksiyonunun periyodik olup olmadığını inceleyiniz.*

Örnek 224 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir tek fonksiyon ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir periyodik fonksiyon olmak üzere, $h(x) = x^2$ fonksiyonunun $f(x) + g(x)$ şeklinde yazılamayacağını gösteriniz.*

Alıştırma 1. : $f(x) = x - [\![x]\!]$ fonksiyonunun esas periyodunu bulunuz.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$f(x+\pi) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

eşitliğini sağlıyorsa, f'nin periyodik olduğunu gösteriniz

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere, her $x \in \mathbb{R}$ için, $g(x) = f(x) + \sin f(x)$ olmak üzere, $g(x)$ fonksiyonu periyodik ise f fonksiyonunun da periyodik olacağını gösteriniz.

4.1 Fonksiyonların Limiti

Örnek 225 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \le 1 \text{ ise} \\ 4x-1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında limitinin olmadığını gösteriniz.*

Örnek 226 $f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x>1 \text{ ise,} \\ 4, & x=1 \\ x+5, & x<1 \text{ ise,} \end{cases}$ *parçalı fonksiyonun* $x=1$ *noktasında limitini bulunuz?*

Örnek 227 $\lim\limits_{x\to 0} 2^{1/x}$ *limitinin olmadığını gösteriniz.*

Örnek 228 $\lim\limits_{x\to 1} \sin\dfrac{1}{x-1}$ *limitinin olmadığını gösteriniz.*

Örnek 229 $f(x)=x^2+2$ *fonksiyonu için,* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ *olduğunu, limit tanımını kullanarak gösteriniz.*

Örnek 230 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1/2$ *olacak şekilde bir* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ *fonksiyonu bulunuz.*

Örnek 231 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\sqrt{2}+1$ *olacak şekilde bir* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ *fonksiyonun var olduğunu gösteriniz.*

Örnek 232 $\{x\}$ *ifadesi, x'in kesir kısmını göstermek üzere,*

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)\}=\lim_{x\to\infty}\{g(x)\}=0$$

olacak şekilde, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *ve* $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonları göz önüne alınıyor.*

$a)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\{f+g\}=0$ *eşitliği doğru mudur?*

$a)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\{f-g\}=0$ *eşitliği doğru mudur??* (*İSVEÇ M.O.*)

4.2 Belirsizlikler ve Limitlerinin Hesaplanması

1) $\mathbf{\dfrac{0}{0}}$ **belirsizliği**

Örnek 233 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}=?$

Örnek 234 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}=?$

Örnek 235 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{2^x-1}=\dfrac{1}{\ln 2}$ *olduğunu türevi kullanmadan hesaplayınız.*

Alıştırma 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}=\ln\dfrac{a}{b}$ olduğunu türevi kullanmadan hesaplayınız.

Alıştırma 2. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln(\tan x)}{1-\cot x}=1$ olduğunu türevi kullanmadan hesaplayınız.

2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ **belirsizliği**

Örnek 236 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$ *limitini hesaplayınız.*

3) $\infty-\infty$ **belirsizliği**

Örnek 237 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}+x)$ *limitini hesaplayalım.*

.

Örnek 238 $\lim\limits_{x\to0}(\csc x-\cot x)$ *limitini hesaplayınız.*

4) $0\cdot\infty$ **belirsizliği**

Örnek 239 $\lim\limits_{x\to\pi/4}(1-\tan x)(\tan 2x)=?$

Alıştırma : $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin 2x\cdot\sec x$ değerini hesaplayınız.

4.2.1 Trigonometrik Fonksiyonların Limiti

Örnek 240 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ *olduğunu kanıtlayınız.*

Örnek 241 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ *limitini hesaplayınız.*

Alıştırma : $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}-2\cos x}=1$ olduğunu gösteriniz.

4.3 Fonksiyonların Sürekliliği

Örnek 242 *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere, her $a>1$ sayısı için, $f(x)+f(ax)$ fonksiyonu sürekli ise, $f(x)$ fonksiyonunun da sürekli olduğunu gösteriniz.* (*RUSYA M.O.*)

Örnek 243 *Tüm irrasyonel sayılarda sürekli, fakat rasyonel sayılarda sürekli olmayan bir fonksiyon örneği veriniz.*

Örnek 244 $f(x) = \dfrac{(x+1)^n - 1}{x}$ *fonksiyonu veriliyor. f'nin bütün reel sayılar kümesinde sürekli olması için,* $f(0)$ *kaç olmalıdır?*

4.3.1 Sürekli Fonksiyonların Özellikleri

Örnek 245 $\{x\}$, *x reel sayısının kesir kısmını göstermek üzere,* $f(x) = \{ax + \sin x\}$ *fonksiyonu periyodik olacak şekilde, tüm* $a \in \mathbb{R}$ *sayılarını bulunuz.* (*BEYAZ RUSYA* - 1999)

Örnek 246 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olmak üzere,* $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ *ise,* $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ *olduğunu gösteriniz.*

4.4 Türev

Örnek 247 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = |x|$ *fonksiyonun* $x_0 = 0$ *noktasındaki türevini inceleyelim.*

Teorem : $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu $x_0 \in A$ için türevlenebilirse, $x = x_0$ noktasında süreklidir.
İspat :

Örnek 248 $\dot{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ *için,* $f(x) = x^n$ *ise,* $f'(x) = nx^{n-1}$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 249 $f(x) = 3x^3$ *ve* $g(x) = x^2 + 2$ *eğrileri arasındaki açıyı bulunuz.*

Örnek 250 $g(x)$ *ve* $h(x)$ *türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere, bu fonksiyonların çarpımının türevi, yani,* $f(x) = g(x)h(x)$ *fonksiyonunun türevinin,*
$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$
olduğunu gösteriniz.

Örnek 251 $g(x)$ *ve* $h(x)$ *fonksiyonları* $x \in A$ *noktasında türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere,* $h(x) \neq 0$ *ise,* $f(x) = g(x)/h(x)$ *bölüm fonksiyonunun türevinin*
$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$
olduğunu gösteriniz.

Örnek 252 *$A \subset B$ ve $B \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin, f fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında, g fonksiyonu da $f(x_0) \in B$ noktasında türevlenebiliyorsa, $g \circ f$ fonksiyonu da $x = x_0$ noktasında türevlenebilir. $g \circ f$ fonksiyonunun a noktasındaki türevi,*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$$

ile bulunur.

Örnek 253 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ denklemini sağlasın. $f'(0) = 5$ olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.*

4.4.1 Ters Fonksiyonun Türevi

Kural : $A \subset B$, $B \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to B$ fonksiyonu bire-bir ve örten bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında türevlenebiliyorsa ve $f'(x_0) \neq 0$ ise, f^{-1} fonksiyonu da $y_0 = f(x_0)$ noktasında türevlenebilir ve

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ile bulunur.

İspat :

Örnek 254 *a_k sayıları reel sayılar olmak üzere*

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$$

olsun. $f(x)$ fonksiyonu tüm x reel sayıları için $|f(x)| \leq |\sin x|$ şartını sağlıyorsa,

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$$

olduğunu gösteriniz..

Örnek 255 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|x^2 - x\right|$ fonksiyonunun $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında türevi var mıdır?*

4.4.2 Kapalı Fonksiyonların Türevi

Örnek 256 *$x^2 + 2xy + 3y^2 - 1 = 0$ kapalı fonksiyonun türevini bulunuz.*

4.4.3 Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

Kural : $f(x) = \arcsin u(x)$ ise $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$ ile bulunur.

İspat :

4.4.4 Logaritma Fonksiyonunun Türevi

Kural : $a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ ise, $f'(x) = \dfrac{1}{x} \log_a e$ olur.

İspat :

4.4.5 Üstel Fonksiyonun Türevi

Kural :

Alıştırmalar

1. $f(x) = \sin^2(\ln x)$ ise $f'(x) = ?$

2. $f(x) = \left(x^7 + 5x^4 - x - 4\right)^{11}$ ise $f'(1) = ?$

3. $f(x) = \ln^2 x^2 \cdot \sin^2 x^2$ ise $f'(x) = ?$

4. $f(x) = \arctan \ln \sin x$ ise $f'(x) = ?$

5. $f(x) = 3^x \ln 3x$ ise $f'(x) = ?$

6. $f(x) = \left(x^2 \sin x^2\right) / e^{x^2}$ ise $f'(x) = ?$

7. $f(x) = \cos x$ ise, $f^{(11)}(x) = ?$

8. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ ise, $f^{(11)}(x) = ?$

9. $f(x) = \ln x$ ise, $f^{(11)}(x) = ?$

4.5 Fonksiyonun Artan ve Azalan Olduğu Aralıkların Belirlenmesi

Örnek 257 $\dfrac{e^2 - e^{-2}}{e^2 + e^{-2}}$ *ve* $\dfrac{e^3 - e^{-3}}{e^3 + e^{-3}}$ *sayılarından hangisi daha büyüktür?*

Örnek 258 $0 < a < b < \pi/2$ *olmak üzere,* $\dfrac{\tan b}{\tan a} > \dfrac{a}{b}$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 259 *Her* $x \in (0, \pi/2)$ *için,* $\dfrac{3x}{\sin x} > 4 - \cos x$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 260 *Toplamları* 60 *olan iki sayının birincisinin küpü ile ikincisinin çarpımının maksimum olabilmesi için, sayılar kaç olmalıdır?*

Örnek 261 r *yarıçaplı çember içine çizilebilecek maksimum alanlı dikdörtgenin boyutlarını* r *cinsinden bulunuz.*

Örnek 262 *Toplamları* 6 *olan iki pozitif tamsayıdan birinin karesi ile diğerinin küpünün çarpımı maksimum kaç olabilir?*

Örnek 263 *Düzlemde,* $P = (2,0)$ *noktasının* $x^2 - y^2 = 1$ *hiperbolüne en yakın olan noktasının koordinatlarını bulunuz.*

Örnek 264 $a \in [-2,2)$ *olmak üzere,* $(a+2)^2 (a-1)^4$ *ifadesinin alabileceği maksimum değeri bulunuz.*

Örnek 265 $x \in [2,\infty]$ *olmak üzere,* $P(x) = x^3 - \dfrac{11}{2}x^2 + 6x + 1$ *polinomunun alabileceği minimum değer kaçtır?*

Örnek 266 $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ *kesin artan fonksiyonu her* $x \in (0,\infty)$ *için,*
$i)$ *Her* x *için,* $f(x) > -1/x$
$ii)$ *Her* x *için,* $f(x) f(f(x) + 1/x) = 1$
koşullarını sağladığına göre, $f(1)$ *değerini bulunuz.* (*Yunanistan M.O.*)

Örnek 267 $f:(0,\pi/6) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 + \dfrac{1}{\sin 3x}$ *fonksiyonunun tersinin olduğunu gösteriniz.*

Örnek 268 $c \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $f(c)$ *sayısı,*

$$g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \left| \sin x + \frac{2}{3+\sin x} + c \right|$$

fonksiyonunun maksimum değerini gösteriyorsa, $f(c)$*'nin alabileceği minimum değer kaç olur?* (*Bulgaristan M.O.*)

Alıştırmalar

1. Her $x \in (0,\pi/2)$ için, $0 < x\sin x - \left(\sin^2 x\right)/2 < (\pi - 1)/2$ olduğunu ispatlayınız.

2. $x \in \mathbb{R}$ için, $(a - 1/a - x)\left(4 - 3x^2\right)$ ifadesinin alabileceği en küçük ve en büyük değer arasındaki farkı bulunuz. Bu farkın en küçük olması için a kaç olmalıdır?

3. $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ denklemiyle verilen eğrinin, orjine en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

4. $f(x) = 2\sin 2x + \sin 4x$ fonksiyonunun extremum noktalarını bulunuz.

5. $x \in \mathbb{R}^+$ için, $(5\sin x)/(4+\cos x) < x$ olduğunu gösteriniz.

4.6 Türevi Kullanarak Bir Denklemin Köklerinin Yorumlanması

Örnek 269 $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ *polinomu fonksiyonunun kaç reel kökü vardır?*

Örnek 270 $x^3 - 6x^2 + 15 = 0$ *denkleminin kaç tane reel kökü vardır?*

Örnek 271 $x^3 + 4x - 5 = 0$ *denkleminin kaç reel kökü vardır?*

Örnek 272 $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$ *denkleminin tam iki reel kökü olduğunu ispatlayınız.* (*KANADA MOCP*)

Örnek 273 *Bir* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *fonksiyonu için* $b < 0$ *ve* $ab = 9c$ *ise, f 'nin tam üç farklı köke sahip olduğunu ispatlayınız.* (*Baltık Way*)

Örnek 274 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ *denkleminin üç reel kökü varsa,* $p^2 \geq 3q$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 275 $x^5 + ax^3 + b$ *polinomunun iki katlı kökü varsa* a *ile* b *arasındaki bağıntı nedir?*

Örnek 276 $P(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$ *polinomunun katlı kökünün bulunmadığını gösteriniz.*

Örnek 277 a, b, c, d, e *farklı reel sayılar olsun.*

$$\begin{aligned} 0 &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + (x-a)(x-b)(x-c)(x-e) \\ &\quad + (x-a)(x-b)(x-d)(x-e) + (x-a)(x-c)(x-d)(x-e) \\ &\quad + (x-b)(x-c)(x-d)(x-e) \end{aligned}$$

denkleminin 4 *farklı reel çözüme sahip olduğunu ispatlayınız.* (*Baltık Way*)

Örnek 278 *Bir c sabiti için,* $f'(x)^2 = cf(x)f''(x)$ *eşitliğini sağlayan tüm* $f(x)$ *polinom fonksiyonlarını bulunuz.* (*İSVEÇ M.O.*)

Örnek 279 $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$ *olsun. a reel sayısı* $P(x) = 1$ *denkleminin ve b reel sayısı* $P(x) = 5$ *denkleminin bir kökü olduğuna göre,* $a + b$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?* (*SSCB* 1991)

Örnek 280 $2a^2 < 5b$ *ise,* $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ *denkleminin tüm köklerinin reel olamayacağını gösteriniz.*

Örnek 281 $x^2+2x^4+3x^8+\cdots+10x^{1024}=55$ *denkleminin çözümlerini bulunuz.*

Örnek 282 $x^e-e^x=1$ *denkleminin kökünün bulunmadığını gösteriniz.*

Örnek 283 $P(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ *polinomunun reel kökünün bulunmadığını gösteriniz.*

4.7 Bir Fonksiyonun Konveksliği ve Konkavlığı

Örnek 284 $f(x)=x^2\ln x$ *fonksiyonunun konveks olduğu aralığı bulunuz.*

Örnek 285 *Her* $a,b\in\mathbb{R}^+$ *olmak üzere,* $\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 286 $x,y,z\in(0,\pi)$ *olmak üzere,* $\dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{3}\leq\sin\dfrac{x+y+z}{3}$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 287 $x,y\in[0,1]$ *olmak üzere,*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\leq\frac{2}{\sqrt{1+xy}}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*RUSYA M.O.*)

4.8 Üslü Değişkenli Fonksiyonların Türevi

Örnek 288 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{1/x}$ *fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.*

Örnek 289 $\sqrt{2010}^{\sqrt{2009}}$ *ve* $\sqrt{2009}^{\sqrt{2010}}$ *sayılarından hangisi daha büyüktür?*

Örnek 290 π^e *ve* e^π *sayılarından hangisi daha büyüktür?*

★ İkinci Türev Testiyle Maksimum ve Minimumun Belirlenmesi

Örnek 291 $x\in\mathbb{R}^+$ *olmak üzere,* x^x *ifadesinin minimum değerini bulunuz.*

4.8.1 Türevle İlgili Önemli Teoremler

Örnek 292 $\arctan x$ *reel sayısının* $x/\left(1+x^2\right)$ *ile* x *arasında olduğunu gösteriniz.*

Örnek 293 $x>0$ *için* $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 294 $\left(1+\dfrac{1}{\pi}\right)^{\pi}$ *ve* $\left(1+\dfrac{1}{e}\right)^{e}$ *sayılarından hangisi büyüktür?*

Örnek 295 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ *için,* $\tan x>x$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 296 $\dfrac{3}{25}+\dfrac{\pi}{4}<\arctan\dfrac{4}{3}<\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{6}$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 297 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ *için* $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{\pi}{2}$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 298 $0<a<b$ *ise* $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$ *olduğunu gösteriniz.*

Alıştırmalar : Aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu ispatlayınız.

a) $x\in(0,1)$ için, $x<\ln\dfrac{1}{1-x}<\dfrac{x}{1-x}$

b) $x\in(-\infty,1)$ için, $x<e^x-1<\dfrac{x}{1-x}$

c) $x\in(-\infty,1)\setminus\{0\}$ için, $\dfrac{x}{1-x}>1-e^{-x}$

d) $x\in(0,\infty)$ için, $\ln(1+x)>\dfrac{Arctgx}{1+x}$

e) $x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ için, $\ln x<x-1$

f) $x\in(0,\infty)$ için, $\dfrac{5\sin x}{4+\cos x}<x$

Örnek 299 $n\in\mathbb{R}^+$ *için,* $f(n)=\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^n$ *fonksiyonunun artan olduğunu gösteriniz.*

Örnek 300 $(n+3)^n=\sum\limits_{k=3}^{n+2}k^n$ *denklemini sağlayan tüm pozitif tamsayı çözümlerini bulunuz.* (*FRANSA M.O.*)

4.8.2 L'Hospital Kuralı

Örnek 301 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\,(x+1)}-\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)=?$

4.8.3 $1^{\infty},\ \infty^{0}$ ve 0^{0} belirsizlikleri

Örnek 302 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ *limitini hesaplayınız.*

Örnek 303 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$ *limitini hesaplayınız.*

Alıştırma : $\lim\limits_{x\to 0} x^{\ln(\cos x)}$ limitinin 1 olduğunu gösteriniz.

Örnek 304 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\cos\left(x2^{-k}\right)$ *sonsuz çarpımını hesaplayınız.*

4.8.4 Asimptotlar

Örnek 305 $f\,(x)=x\ln(1+\dfrac{1}{x})$ *fonksiyonunun yatay asimptotunu bulunuz.*

4.9 Fonksiyonların Grafiklerinin Çizilmesi

Örnek 306 $\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\sin x$ *denkleminin köklerinin olmadığını grafik çizerek gösteriniz.*

4.10 Taylor Formülü

Örnek 307 $f\,(x)=\ln(x+1)$*'in seri açılımını bulunuz.* $\ln 2$ *için bir seri yazınız.*

Örnek 308 $f\,(x)=\dfrac{1}{1+x}$ *fonksiyonunun* $x=0$ *noktasındaki Taylor açılımını bulunuz.*

Alıştırma : $f\,(x)=\dfrac{1}{1-x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımının

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \cdots + x^n + \cdots$$

olduğunu gösteriniz.

Alıştırma : $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Taylor açılımının

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

olduğunu gösteriniz.

Alıştırma : $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Taylor açılımının

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + \cdots$$

olduğunu gösteriniz.

Alıştırma : $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Taylor açılımının

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

olduğunu gösteriniz. Bu açılımdan yararlanarak e sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

Örnek 309 *$f(x) = \arctan x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Taylor açılımını bulunuz. π sayısı için bir seri açılımı elde ediniz.*

Örnek 310 $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 311 *$n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$ değerini hesaplayınız.*

4.11 İntegral

Örnek 312 *$f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ ve*

$$(f(x) + 1) f''(x) = x + 1$$

olduğuna göre, f fonksiyonunun artan olduğunu ve $f(1) \leq 4/3$ olduğunu ispatlayınız. (İSVEÇ M.O.)

Örnek 313 *$a_n = \arctan n$ olsun. $n = 1, 2, ...$ için $a_{n+1} - a_n < \frac{1}{n^2 + n}$ olduğunu ispatlayınız.*

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 5 (Analiz - Cebir 2) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

Fonksiyonel Denklemler

Örnek 314 *Her* $x, y \in \mathbb{R}$ *için,* $f(x+y) = \lambda y + f(x)$ *eşitliğini sağlayan tüm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.*

Örnek 315 $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = 3x$ *denklemini sağlayan tüm fonksiyonları bulunuz.*

Örnek 316 $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ *fonksiyonu* $f(1/x) + (1/x) f(-x) = x/3$ *koşulunu sağlıyorsa,* $f(x) = ?$

Örnek 317 $2f(x) + 3f(1-x) = x^2$ *ise,* $f(x) = ?$

Örnek 318 $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 2x$ *denklemini sağlayan tüm fonksiyonları bulunuz.*

Örnek 319 $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olmak üzere,*
$i)$ $f(x,y) + z = f(y+z, x+z)$
$ii)$ $f(0, x+y) = f(0,x) + f(0,y)$
koşulları sağlanıyorsa, $f(x,y) = ?$

Örnek 320 *Her* $x, y \in \mathbb{R}$ *için,* $f(x-y) = f(y) f(x)$ *eşitliğini sağlayan tüm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları bulunuz.*

Örnek 321 *p ve q pozitif tamsayılar olmak üzere,* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu*

$$f(xf(y)) = x^p y^q$$

eşitliğini sağladığına göre, $q = p^2$ *olduğunu gösteriniz.* (*İsrail*)

Örnek 322 *Her* $x, y \in \mathbb{R}$ *için,* $f(x - f(y)) = 1 - x - y$ *fonksiyonel denklemini sağlayan tüm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.* (*Slovenya*)

Örnek 323 *Aşağıdaki koşulları sağlayan bir* $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu bulunuz.*
$i)$ $f(4) = 4$
$ii)$ $\frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \frac{1}{f(3)f(4)} + \cdots + \frac{1}{f(n)f(n+1)} = \frac{f(n)}{f(n+1)}.$
(*Kanada MOCP.*)

Örnek 324 100 *tane f olmak üzere,* $f(f(f(\cdots f(x)))) = 3^{100}x + 1$ *olacak şekilde bir* $f(x)$ *fonksiyonu bulunuz.*

5.1 Tamsayılar ve Rasyonel Kümesinde Fonksiyonel Denklem Çözümü

Örnek 325 *$f:\mathbb{Z}^{+}\rightarrow\mathbb{Z}^{+}$ fonksiyonu için, $f(1)=1$ ve $f(x)=f(x-1)+a^{x}$ biçiminde tanımlanıyor. $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.*

Örnek 326 *$f:\mathbb{Z}^{+}\times\mathbb{Z}^{+}\rightarrow\mathbb{Z}^{+}$ fonksiyonu için,*

$$f(x,y+z)=f(x,y)\,f(x,z)$$
$$f(x+y,1)=f(x,1)+f(y,1)$$
$$f(x+y,2)=f(x,2)+4f(xy,1)+f(y,2)$$

olduğuna göre, $f(x,y)$ fonksiyonunu bulunuz.

Örnek 327 *$f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ fonksiyonu,*

$i)$ $f(2x,x)=2f(x,x)$

$ii)$ $f(x+1,y)=f(x,y)+f\left(y^{2}+1,0\right)$

$iii)$ $f(1,0)=1$

koşullarını sağladığına göre, $f(x,y)=?$

Örnek 328 *$f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ olmak üzere,*

$a)$ *Her $n\in\mathbb{N}$ için $f(n+f(n))=f(n)$,*

$b)$ *Bir $n_0\in\mathbb{N}$ için, $f(n_0)=1$*

koşulları sağlanıyorsa, her $n\in\mathbb{N}$ için $f(n)=1$ olmalıdır, gösteriniz. (Kore)

Örnek 329 *Pozitif tamsayı ikililerinden tanımlanan $f(x,y):\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu*

$i)$ $f(1,1)=2,$

$ii)$ $f(x+1,y)=2(x+y)+f(x,y)$

$iii)$ $f(x,y+1)=2(x+y-1)+f(x,y)$

özelliklerini sağladığına göre $f(m,n)=402$ olacak şekilde m ve n tamsayılarını bulunuz.

Örnek 330 *Negatif olmayan tamsayılarda tanımlı, f fonksiyonu, her x,y için,*

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)\,f\left(x^{2}+y^{2}\right)$$

eşitliğini sağlıyorsa, f'nin sabit fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Örnek 331 *Her $m,n\in\mathbb{Z}$ için, $f(m+f(n))=f(m)+n$ denklemini sağlayan tüm $f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Güney Afrika C.)*

Örnek 332 *Her $x \in \mathbb{Q}^+$ için, aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.* (*Ukrayna*)
$a)$ $f(x+1) = f(x) + 1$
$b)$ $f(x^2) = f(x)^2$.

Örnek 333 $f(n) : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *olsun. Eğer her n pozitif tamsayısı için*

$$f(n+1) > f[f(n)]$$

ise, her n için $f(n) = n$ olduğunu gösteriniz. (*IMO*)

Örnek 334 *Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için,*

$$f(x+y) + f(xy) = f(x) f(y) + 1$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

5.2 Rasyonel Sayılar Kümesinden Reel Sayılar Kümesine Geçiş

Örnek 335 $f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)$ *denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.*

Örnek 336 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için, $f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)]$ denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.*

Örnek 337 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$ denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.*

Örnek 338 $f^2(x) = f(x+y) f(x-y)$ *denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.*

5.3 Fonksiyonel Denklemlerin Polinom Fonksiyon Çözümleri

Örnek 339 *n bir pozitif tamsayı olmak üzere, $(P(x))^n = P(P(x))$ eşitliğini sağlayan tüm reel sayı katsayılı polinomları bulunuz.* (*KANADA M.O.*)

Örnek 340 *$P(x)$ ve $Q(x)$ reel sayılarda tanımlı polinomlar olsunlar.*

$$P(Q(x)) = Q(P(x)) \text{ ve } P(x) = Q(x)$$

eşitliklerini sağlayan bir x değeri yoksa, $P(P(x)) = Q(Q(x))$ eşitliğinin çözümü olmadığını gösteriniz. (*KANADA M.O.*)

Örnek 341 *$P(x)$ polinomunun tüm katsayıları $0,\ -1$ veya 1 ve $Q(x)$ polinomunun katsayılarından biri 100 olmak üzere, $P(x) = Q(x)\,R(x)$ eşitliğini sağlayan tamsayı katsayılı $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomları bulunabilir mi?*

Örnek 342 *$P(2x) = P'(x)\,P''(x)$ eşitliğini sağlayan tüm $P(x)$ polinomlarını bulunuz.* (İsveç)

Örnek 343 *Her n pozitif tamsayısı için,*

$$(P(x))^2 - 1 = \left(x^2 - 1\right)(Q(x))^2$$

eşitliğini sağlayan, n'inci dereceden bir $P(x)$ polinomu ve $(n-1)$'inci dereceden bir $Q(x)$ polinomunun bulunabileceğini gösteriniz. (M. Excalibur)

Örnek 344 *Tamsayı katsayılı $P(x)$ polinomu $n \in \mathbb{Z}$ için $p(-n) < p(n) < n$ eşitsizliğini sağlıyorsa, $p(-n) < -n$ olduğunu ispatlayınız.* (Baltık Way)

5.4 Fonksiyonel Denklemin Çözümünün Varlığı

Örnek 345 *Her $x \in \mathbb{R}$ için,*

$i)$ $f(1 + f(x)) = 1 - x$

$ii)$ $f(f(x)) = x$

özelliklerini sağlayan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu olmadığını gösteriniz. (Municipal M.O.)

Örnek 346 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*

$$|f(x+y) + \sin x + \sin y| < 2$$

eşitsizliğini sağlayan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var mıdır?

Örnek 347 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*

$$2f(x+y) + 6y^3 = f(x+2y) + x^3$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonunun olmadığını gösteriniz.

Örnek 348 *Her x tamsayısı için*

$$f(f(x)) = x + 1$$

eşitliğini sağlayan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu olmadığını gösteriniz.

Örnek 349 *$f([\![x]\!]) + g(\{x\}) = x^2$ eşitliğini sağlayacak şekilde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının olmadığını ispatlayınız.*

Örnek 350 *Her* $x, y \in \mathbb{Z}$ *için,* $f(x + f(y)) = f(x) - y$ *olacak şekilde* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *fonksiyonunun bulunmadığını ispatlayınız.* (*Avusturya - Polonya -*)

Örnek 351 $x = f(\llbracket x \rrbracket) + g(x)$ *ve* $g(x) = g(-x)$ *eşitliklerini sağlayan* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ve* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları var mıdır?*

5.5 Fonksiyonel Denklemlerin Sürekli Fonksiyon Çözümleri

Örnek 352 $f(f(x))$ *fonksiyonu kesin azalan olacak şekilde* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bir sürekli fonksiyon var mıdır?*

Örnek 353 *Reel sayılar kümesinde sürekli olan ve* $f(f(x)) = e^{-x}$ *eşitliğini sağlayan bir* f *fonksiyonu bulunmadığını gösteriniz.*

Örnek 354 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sürekli olmak üzere, her* $x \in \mathbb{R}$ *için,* $f(f(f(x))) = x$ *ise,* $f(x) = x$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 355 $f(x)$ *sürekli fonksiyonu her* $x \in \mathbb{R}$ *için,* $f(f(x)) = -x^2$ *eşitliğini sağlıyorsa, her* $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$f(x) \leq 0$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 356 *Her* x *reel sayısı için* $f(f(x)) = x^2 - \frac{1}{2}$ *olacak şekilde* $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sürekli bir fonksiyon var mıdır?*

Örnek 357 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyonu* $f(100) = 99$ *ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için,*

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1$$

eşitliğini sağladığına göre, $f(50) = ?$

Örnek 358 $\lambda \in (-1, 1)$ *olmak üzere, her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $f(\lambda x) = f(x)$ *koşulunu sağlayan ve* $x = 0$ *noktasında sürekli olan tüm fonksiyonları bulunuz.*

Örnek 359 *Her* $x, y \in \mathbb{R}$ *için,* $f(f(x) + y) = f(x + y) + f(0)$ *eşitliğini sağlayan tüm monoton artan reel değerli fonksiyonları bulunuz.* (*Avusturya Polonya M.O.*)

Örnek 360 *Her* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *için, azalan ve sürekli* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu göz önüne alınıyor.*

$$f(x + y) + f(f(x) + f(y)) = f(f(x + f(y)) + f(y + f(x)))$$

eşitliği sağlanıyorsa $f(f(x)) = x$ *olduğunu ispatlayınız.* (*IRAN* - 1997)

5.6 Fonksiyonel Denklemlerin Diferensiyellenebilir Fonksiyon Çözümleri

Örnek 361 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm türevlenebilir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Örnek 362 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için*

$$x \cdot f(x) - y \cdot f(y) = (x-y) f(x+y)$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonlarını bulunuz.

Örnek 363 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonlarını bulunuz.

Örnek 364 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*

$$f(x + yf(x)) = f(x) f(y)$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm diferensiyellenebilir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

5.7 Özel Fonksiyonel Denklemler

5.7.1 Birinci Cauchy Fonksiyonel Denklemi

Örnek 365 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>sürekli</u> fonksiyonlarını bulunuz.

Örnek 366 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve a sabit pozitif tamsayısı için,*

$$f(x+y) = a^y f(x) + a^x f(y)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.

Örnek 367 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için, $f(x+y) = \dfrac{f(x) f(y)}{f(x) + f(y)}$ denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.*

Örnek 368 *$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, her $x, y \in \mathbb{R}$ için*

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = 3xy^2 + 3x^2y + 2$$

denklemini sağlayan tüm sürekli fonksiyonları bulunuz.

Örnek 369 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için*

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = x^2y + xy^2 - 2xy$$

denklemini sağlayan tüm sürekli fonksiyonları bulunuz.

Örnek 370 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için*

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = 2(1-3^x)(1-3^y)$$

denklemini sağlayan tüm sürekli fonksiyonları bulunuz.

Örnek 371 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x+y+\cos 3°) = f(x) + f(y)$ denklemini sağlayan tüm sürekli fonksiyonları bulunuz.*

Örnek 372 *$a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, her $x, y \in \mathbb{Q}$ için,*

$$f(x + f(y)) = f(x+a) + y + b$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonlarını bulunuz. (*Romanya* - 2006)

5.7.2 İkinci Cauchy Fonksiyonel Denklemi

Örnek 373 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*

$$f(x+y) = f(x) f(y)$$

*fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz. Bu fonksiyonel denkleme **ikinci Cauchy denklemi** denir.*

Örnek 374 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*

$$f(x+y) = a^{xy} f(x) f(y)$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.

Örnek 375 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x) f(y)$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.

Örnek 376 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*

$$4f(x+y) - 4f(x) f(y) = 3(2f(x) + 2f(y) + 1)$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.

Örnek 377 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*
$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=f(x)\,f(y)$$
fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz. (*Putnam M.O.* 1947)

Örnek 378 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*
$$f\left(x^2+y^2\right)=f\left(x^2-y^2\right)+f(2xy)$$
fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz. (*Romanya M.O.* 1997)

5.7.3 Üçüncü Cauchy Fonksiyonel Denklemi

Örnek 379 *Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için,*
$$f(xy)=f(x)+f(y)$$
*fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz. (Bu fonksiyonel denkleme **üçüncü Cauchy denklemi** denir.)*

Örnek 380 *Her $x \in \mathbb{R}^+$ için, $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ eşitliğini sağlayan bir f fonksiyonu bulunuz.*

5.7.4 Dördüncü Cauchy Fonksiyonel Denklemi

Örnek 381 *Her $x, y \in \mathbb{R}^+\cup\{0\}$ için,*
$$f(xy)=f(x)\,f(y)$$
*fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz. (Bu fonksiyonel denkleme **dördüncü Cauchy denklemi** denir.)*

5.7.5 Jensen Fonksiyonel Denklemi

Örnek 382 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,*
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$
eşitliğini sağlayan tüm sürekli fonksiyonları bulunuz. (Bu fonksiyonel denklem Jensen fonksiyonel denklemi olarak bilinir.)

Örnek 383 *Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve sabit bir c reel sayısı için,*
$$2f\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y\right)=f\left(\frac{x+c}{2}\right)+f\left(\frac{y+c}{2}\right)$$

eşitliğini sağlayan tüm sürekli $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.*

Örnek 384 *Her* $x,y\in\mathbb{R}$ *için,*

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)=\sqrt{\frac{f\left(x\right)^2+f\left(y\right)^2}{2}}$$

eşitliğini sağlayan tüm sürekli fonksiyonları bulunuz.

5.7.6 Birinci Pexider Fonksiyonel Denklemi

Örnek 385 *Her* $x,y\in\mathbb{R}$ *için,*

$$f\left(x+y\right)=g\left(x\right)+h\left(y\right)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sürekli fonksiyonlarını bulunuz. (Bu denkleme* ***Birinci Pexider Fonksiyonel*** *denklemi de denir.)*

Örnek 386 *Her* $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}$ *için,*

$$f\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)=f_1\left(x_1\right)+f_2\left(x_2\right)+\cdots+f_n\left(x_n\right)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sürekli fonksiyonlarını bulunuz.*

5.7.7 İkinci Pexider Fonksiyonel Denklemi

Örnek 387 *Her* $x,y\in\mathbb{R}$ *için,*

$$f\left(x+y\right)=g\left(x\right)h\left(y\right)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sürekli fonksiyonlarını bulunuz. (Bu denkleme* ***İkinci Pexider Fonksiyonel*** *denklemi de denir.)*

Örnek 388 *Her* $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}$ *için,*

$$f\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)=f_1\left(x_1\right)f_2\left(x_2\right)\cdots f_n\left(x_n\right)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sürekli fonksiyonlarını bulunuz.*

5.7.8 Üçüncü Pexider Fonksiyonel Denklemi

Örnek 389 *Her* $x,y\in\mathbb{R}^+$ *için,*

$$f\left(xy\right)=g\left(x\right)+h\left(y\right)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f,g,h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ *sürekli fonksiyonlarını bulunuz. (Bu denkleme* ***Üçüncü Pexider Fonksiyonel*** *denklemi de denir.)*

Örnek 390 *Her* $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ *için,*

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyonlarını bulunuz.*

5.7.9 Dördüncü Pexider Fonksiyonel Denklemi

Örnek 391 *Her* $x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *için,*

$$f(xy) = g(x)\, h(y)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f, g, h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyonlarını bulunuz. (Bu denkleme* ***Dördüncü Pexider Fonksiyonel*** *denklemi de denir.)*

Örnek 392 *Her* $x_1, x_2, ..., x_n \in x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *için,*

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f_i : x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyonlarını bulunuz.*

Örnek 393 *Her* $x, y \in \mathbb{R}$ *için,*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + h(y)}{2}$$

eşitliğini sağlayan tüm $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyonlarını bulunuz.*

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 5 (Analiz - Cebir 2) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

5.8 Problemler

1. $f(...f(f(x_1,x_2),x_3)...,x_{100}) = x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{100}$ *fonksiyonel denklemini sağlayan tüm* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.*

2. *Her* $x,y\in\mathbb{R}$ *için,*

$$f\left(xf\left(y\right)+x\right)=xy+f\left(x\right)$$

koşulunu sağlayan tüm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.*

3. *Her* $x\in\mathbb{R}$ *için,* $f\left(2002x-f\left(0\right)\right)=2002x^2$ *eşitliğini sağlayan tüm reel değerli fonksiyonları bulunuz.* (Avusturya - Polonya - 2002)

4. $x,y\in\mathbb{R}$ *için*

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)+xy\left(x+y\right)$$

bağıntılarını sağlayan 0 *noktasındaki tüm sürekli fonksiyonları bulunuz.*

5. a *ve* b *sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere, her* $x\in\mathbb{R}$ *için*

$$f\left(x-\frac{b}{a}\right)+2x\leq\frac{a}{b}x^2+\frac{2b}{a}\leq f\left(x+\frac{b}{a}\right)-2x$$

eşitsizliğini sağlayan tüm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonları bulunuz.*

6. $x\neq 0$ *ve* $x\neq\pm1$ *olmak üzere,*

$$f\left(x\right)^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=64x$$

olduğuna göre, $f\left(x\right)=?$ (Iberoamerikan M.O. 1987)

7. *Her* $x,y\in\mathbb{R}$ *için,* $f\left(x^2+y^2\right)=\left(x-y\right)\left(f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)$ *fonksiyonel denklemini sağlayan tüm* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.* (KORE - 2000)

8. *Aşağıdaki koşulları sağlayan* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.*

$i)$ $f\left(1\right)=1$

$ii)$ $f\left(-1\right)=-1,$

$iii)$ $0<x<1$ *ise* $f\left(x\right)\leq f\left(0\right),$

$iv)$ *Her* $x,y\in\mathbb{R}$ *için,* $f\left(x+y\right)\geq f\left(x\right)+f\left(y\right),$

$v)$ *Her* $x,y\in\mathbb{R}$ *için,* $f\left(x+y\right)\leq f\left(x\right)+f\left(y\right)+1.$ (APMO - 1994)

9. *Her* $x, y \in \mathbb{R}$ *için*

$$[f(x+y) - f(x) \cdot f(y)]^2 = \left[1 - f^2(x)\right]\left[1 - f^2(y)\right]$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarının çift fonksiyon olacağını gösteriniz.*

10. $f(x-y) = f(x) f(y) + g(x) g(y)$ *denklemini sağlayan tüm sürekli çözümleri bulunuz.*

11. *Her* $x, y \in \mathbb{R}$ *için,* $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$ *eşitliğini sağlayan tüm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.*

12. $f(x+y) = f(x) f(y) f(xy)$ *eşitliğini sağlayan tüm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.*

13. $f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x) f(y) - xy$ *koşulunu sağlayan tüm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.* (Beyaz Rusya - 1995)

14. *Her* $x, y \in \mathbb{R}$ *için,*

$$f\left((x-y)^2\right) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2$$

eşitliğini sağlayan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.*

15. $f(0) = 1$, $f\left(x^2\right) = \dfrac{f(x)}{1+x}$ $(x < |x|)$ *eşitliklerini sağlayan,* $x = 0$ *noktasında sürekli tüm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.* (UIUC Math. Contest - 2004)

16. $x, y \in \mathbb{R}$ *ve* n *sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere* $n > 1$ *olsun.*

$$f(x+y) = f^n(x) + f^n(y)$$

fonksiyonel denklemini çözünüz.

17. *Her* $x \in \mathbb{R}$ *için,* $f(x+19) \leq f(x) + 19$ *ve* $f(x+94) \geq f(x) + 94$ *eşitsizliklerini sağlayan reel değerli* f *fonksiyonunun her* $x \in \mathbb{R}$ *için,* $f(x+1) = f(x) + 1$ *eşitliğini sağladığını gösteriniz.* (Avusturya Polonya M.O. 1994)

18. *Her* x, y *için,* $f\left(x^4 + y\right) = x^3 f(x) + f(f(y))$ *eşitliğini sağlayan ve sonlu sayıda* 0 *değeri alan tüm* f *fonksiyonlarını bulunuz.* (Asya Pasifik 2002)

19. *Her* $x, y \in \mathbb{R}$ *için,* $f(f(x) + y) = f\left(x^2 - y\right) + 4f(x)\, y$ *fonksiyonel denklemini sağlayan tüm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.* (Çek&Slovak - 1997) (İran - 1999)

20. *Her* $x, y > 1$ *reel sayıları için,* $f(x) - f(y) = (y - x) f(xy)$ *fonksiyonel denklemini sağlayan tüm* $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.* (Çek&Slovak - 1999)

21. *Her* $x, y \in \mathbb{R}$ *için,* $f(f(y) + x) = f(x) + y$ *fonksiyonel denklemini sağlayan tüm kesin monoton* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.*

$b)$ *Her* $n > 1$ *tamsayısı için,* $f(f(y) + x) = f(x) + y^n$ *denklemini her* $x, y \in \mathbb{R}$ *için sağlayan* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kesin monoton fonksiyonunun bulunmadığını gösteriniz.* (İtalya - 1999)

22. $f(f(x) + y) = 2x + f(f(f(y)) - x)$ *koşulunu sağlayan tüm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını bulunuz.*

23. $f(x + y) f(x - y) = [f(x) f(y)]^2$ *denklemini sağlayan tüm sürekli fonksiyonları bulunuz.*

24. $f\left((x - y)^2\right) = x^2 - 2y f(x) + (f(y))^2$ *eşitliğini sağlayan tüm reel değerli fonksiyonları bulunuz.* (Avusturya - Polonya M.O. - 2001)

25. *Her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu*

$a)$ $f(10 + x) = f(10 - x)$

$b)$ $f(20 - x) = -f(20 + x)$

koşullarını sağlıyorsa, f *fonksiyonunun tek ve periyodik bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.* (İtalya - 1997)

26. *Her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu,*

$$|f(x)| \leq 1 \text{ ve } f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7})$$

koşullarını sağlıyorsa, $f(x)$*'in bir periyodik fonksiyon olduğunu ispatlayınız.* (IMO Shortlist - 1996)

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 5 (Analiz - Cebir 2) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

5.9 Alıştırmalar

1. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ olmak üzere, her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için
$$f(x\, f(y)) - f(xy) = x$$
bağıntısını sağlayan $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz. (Antalya M.O.2003)

2. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için
$$f(x+y) - f(y) = g(y)f(x)$$
eşitliğini sağlayan ve kesin artan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun varlığını garanti eden $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının hepsini bulunuz. (Antalya M.O.2004)

3. Her $x, y \in R \backslash \{0\}$ için
$$x \cdot f\left(x + \frac{1}{y}\right) - y \cdot f\left(y + \frac{1}{x}\right) = x \cdot f(x) - y \cdot f(y)$$
eşitliğini sağlayan f fonksiyonlarının hepsini bulunuz. (Antalya M.O.2005)

4. $f(0) = 2$ ve $h(0) = 1$ olmak üzere, her reel x ve y için
$$(x-y)f(x) - xy + y^2 \leq h(y) - h(x) \leq (x-y)g(x) - xy + y^2$$
eşitsizliklerini sağlayan tüm $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Antalya M.O. 2006)

5. A ile, 1'den küçük olmayan rasyonel sayılar kümesini gösterelim. $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y \in A$ için
$$f(x+y) - 1 \leq f(x) + f(y) \leq f(x+y) + 1$$
eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, her $x \in A$ için
$$(a-2)x < f(x) < (a+2)x$$
sağlanacak biçimde bir reel a sayısının varlığını gösteriniz. (Antalya M.O.2007)

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f(1) = 0$ olmak üzere, $f(x+1) + x^3 = f(x)$ eşitliğini sağlayan

a) bir fonksiyon örneği gösteriniz;

b) sonsuz çoklukta fonksiyon bulunduğunu kanıtlayınız. (Antalya M.O.2008)

7. $a \neq 0$ olmak üzere, $(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden fonksiyonu,
$$f(f(1)) = f(f(2)) = f(f(3))$$
eşitliklerini sağlıyorsa, a, b ve c'yi bulunuz. (Kanada MOCP. - 2003)

8. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$f(x + 2f(y)) = f(x) + y + f(y)$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Kanada MOCP. - 2003)

9. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$f(xy + 1) = f(x) f(y) - f(y) - x + 2 \text{ ve } f(0) = 1$$

koşullarını sağlayan $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

10. Her $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için, $f(f(n)) = n^2$ fonksiyonel denklemini sağlayan bir $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu bulunduğunu gösteriniz. (Singapur M.O.. - 1996)

11. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$f(n + 1) > f(f(n))$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz. (IMO - 1977)

12. Her $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$f(f(x) + f(y)) = x + y$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

13. Her $x \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$f(f(x)) + f(x) = 2x + 2001 \text{ veya } f(f(x)) + f(x) = 2n + 2002$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz. (Balkan M.O. - 2002)

14. Her $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$f(f(x) + f(x)) = 2x + 6$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz. (Avusturya - 1989)

15. Her $x, y \in \mathbb{N}$ için,

$$f(x + f(y)) = f(f(x)) + f(y)$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulunuz. (IMO - 1996)

16. Her $x \in \mathbb{Z}$ için, $f(f(m)) = m+1$ fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Slovenya - 1996)

17. Her $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için,

1. $f(2) = 2,$
2. $f(mn) = f(m) f(n),$
3. $f(n+1) > f(n)$

koşullarını sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz. (Kanada- 1969)

18. Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için,

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Asya Pasifik - 1997)

19. Her $x, y \in \mathbb{Q}$ için,

$$f(xy) = f(x) f(y) - f(x+y) + 1$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Asya Pasifik.- 1984)

20. Her $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$f(f(x) + f(y)) = x + y$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz. (Short-list - 1988)

21. Her $x \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$f(f(x)) = 3x$$

fonksiyonel denklemini sağlayan kesin artan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz. (Asya Pasifik - 1997)

22. Her $x \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\begin{aligned} i)\ f(xy) &= f(x) + f(y) \\ ii)\ f(30) &= 0 \\ iii)\ \text{Her } x &\equiv 7 \pmod{10} \text{ için } f(x) = 0 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Brezilya - 1988)

23. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ kesin artan fonksiyonu, her $x\in\mathbb{R}$ için
$$f\left(\frac{2xy}{x-y}\right)\geq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$
koşulunu sağlıyorsa, $f(x)$'in negatif değer alabileceğini gösteriniz. (Brezilya - 2003)

24. Her $x\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ için,
$$f(2x+1)=3f(x)+5 \quad \text{ve} \quad f(0)=0$$
koşullarını sağlayan tüm $f:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Brezilya - 1993)

25. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x,y\in\mathbb{R}$ için
$$f(a)-f(b)\leq|a-b| \quad \text{ve} \quad f(f(f(0)))=0$$
koşullarını sağlıyorsa, $f(0)=0$ olduğunu ispatlayınız. (Moğolistan - 2000)

26. $f:\mathbb{Q}\to\{0,1\}$ fonksiyonu
$$f(x)=f(y) \text{ ise, } f(x)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(y)$$
koşulunu sağlamak üzere, $f(0)=0$ ve $f(1)=1$ ise her $x\geq1$ için $f(x)=1$ olduğunu ispatlayınız. (Hindistan - 2000)

27. Her $x\geq2$ tamsayısı için,
$$f(f(x-1))=f(x+1)-f(x)$$
fonksiyonel denklemini sağlayan $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ fonksiyonu var mıdır? (Beyaz Rusya - 2000)

28. Sıfırdan farklı her $x,y\in\mathbb{R}$ için, $f(xy)=f(x)f(-y)-f(x)+f(y)$ ve her $x\in\{0,1\}$ için,
$$f(f(x))=\frac{1}{f(1/x)}$$
eşitliklerini sağlayan tüm $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}\backslash\{1\}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Baltık Way M.O. - 2007)

29. Her $x\in\mathbb{Q}^+$ için,
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)=f(x+1) \quad \text{ve} \quad f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$$
eşitliklerini sağlayan tüm $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ fonksiyonlarını bulunuz. (Baltık Way M.O. - 2003)

30. $f:\mathbb{Z}^{+}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu, 1'den büyük herhangi a,b tamsayıları için, OBEB$(a,b)=d$ olmak üzere,
$$f\left(ab\right)=f\left(d\right)\left(f\left(\frac{a}{d}\right)+f\left(\frac{b}{d}\right)\right)$$
eşitliğini sağlıyorsa, $f\left(2001\right)$'in alabileceği değerleri bulunuz. (Baltık Way M.O. - $2001)$

31. Her $x\in\mathbb{Q}^{+}$ için,
$$f\left(x\right)+f\left(y\right)=f\left(f\left(x\right)f\left(y\right)\right)$$
eşitliğini sağlayan tüm $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Baltık Way M.O. -1998)

32. Her $x,y\in\mathbb{Z}^{+}$ için,
(1) $f\left(x,x\right)=x,$ (2) $f\left(x,y\right)=f\left(y,x\right)$ ve (3) $\left(x+y\right)f\left(x,y\right)=yf\left(x,x+y\right)$
eşitliklerini sağlayan tüm $f:\mathbb{Z}^{+}\rightarrow\mathbb{Z}^{+}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Baltık Way M.O. - $1998)$

33. Her $x,y\in\mathbb{R}$ için,
$$f\left(x\right)f\left(y\right)=f\left(x-y\right)$$
eşitliğini sağlayan, $f\left(x\right)=0$ haricindeki, tüm $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Baltık Way M.O. -1997)

34. Her $x,y\in\mathbb{R}$ için,
$$f\left(xf\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=y+f^{2}\left(x\right)$$
eşitliğini sağlayan, tüm $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Balkan M.O. - 2000)

36. Her $x,y\in\mathbb{Q}$ için,

i) $f\left(x+y\right)-xf\left(y\right)-yf\left(x\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)-x-y-xy$

ii) $f\left(x\right)=2f\left(x+1\right)+x+2$

ii) $f\left(1\right)+1>0xf\left(x\right)+f\left(y\right)=y+f^{2}\left(x\right)$

koşullarını sağlayan, tüm $f:\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

37. Her $x\in\mathbb{R}$ için,
$$f\left(x\right)=f\left(x^{2}+\frac{1}{4}\right)$$
eşitliğini sağlayan, tüm $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.

38. Sıfırdan farklı her x reel sayısı için,

$$f\left(\frac{x+1}{x^2}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad \text{ve} \quad f(1) = 1$$

eşitliklerini sağlayan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonu var mıdır? (Shortlist. - 1995)

39. Her $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için, $f(x + f(y)) = y + f(x + 95)$ eşitliğini sağlayan bir tek $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu olduğunu gösteriniz. $f(1) + f(2) + \cdots + f(19)$ değerini hesaplayınız. (Shortlist - 1995)

40. $a \in \mathbb{Q}$, $b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ olmak üzere, her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$f(x + a + b) - f(x + b) = c\,[\![x + 2a + [\![x]\!] - 2\,[\![x + a]\!] - [\![b]\!]]\!] + d$$

eşitliği sağlanıyorsa, f fonksiyonunun periyodik olduğunu ispatlayınız. (Tayvan - 1997)

41. Her k pozitif tamsayısı için,

i) $f(1997) = 1998$

ii) her $a, b \in \mathbb{N}$ için $f(ab) = f(a) + f(b) + kf(\text{OBEB}(a, b))$

şartlarını sağlayan bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunun bulunabileceğiniz gösteriniz. (Tayvan - 1997)

42. $P(x)$, 6.dereceden bir polinom a, b'de $0 < a < b$ olacak şekilde reel sayılar olsun.

$$P(a) = P(-a)\,,\ P(b) = P(-b)\,,\ P'(0) = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, tüm x reel sayıları için $P(x) = P(-x)$ olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way - 1998)

43. $P_k(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P_k(x) = 2^{n-1} P_n\left(\tfrac{1+x}{2}\right)$$

olduğunu gösteriniz. (Baltık Way - 1998)

44. $u_0, u_1, \ldots$ pozitif tamsayı dizisinde, u_0 keyfi bir sayı ve a sabitlenmiş bir tek sayı pozitif sayı olmak üzere, her negatif olmayan n tamsayısı için

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}u_n, & u_n \text{ çift ise} \\ a + u_n, & u_n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğuna göre, dizinin periyodik olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way - 1997)

45. $(2,4)$ aralığında tanımlanan $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları veriliyor. Her $x \in (0,2)$ için,

i) $2 < f(x) < 4$ ii) $2 < g(x) < 4$

iii) $(g(x)) = g(f(x)) = x$ iv) $f(x)g(x) = x^2$

ifadeleri sağlandığına göre, $f(3) = g(3)$ olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way - 1993)

46. Aşağıdaki dört şartı sağlayan 4'üncü dereceden tüm $p(x)$ polinomlarını bulunuz:

i) Her x için $p(x) = p(-x)$ **ii)** Her x için $p(x) \geq 0$ **iii)** $p(0) = 1$

iv) $p(x)$ polinomu $|x_1 - x_2| = 2$ olacak şekilde x_1 ve x_2 gibi iki yerel minimum noktaya sahiptir. (Baltık Way - 1992)

47. Her $m,n \in \mathbb{Z}$ için, $f(n) - f(n + f(m)) = m$ eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Türkiye - 2004)

48.$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlamaktadır.

i) $f(0,0) = 1,\ f(0,1) = 1,$ ii) Her $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0,1\}$ için, $f(0,k) = 0,$

iii) Her $n \geq 1$ ve her $k \in \mathbb{Z}$ için, $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-1,k-2n).$

Buna göre, $\binom{2009}{2} = s$ olmak üzere, $\sum\limits_{k=0}^{s} f(2008,k)$ toplamını hesplayınız. (Türkiye - 2007)

49. Her x,y pozitif reel sayıları için, $f(x+y) > f(x)(1 + yf(x))$ eşitsizliğini sağlayan $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunun olmadığını gösteriniz. (Türkiye - 1996)

50. Her x negatif olmayan reel sayısı için, $4f(x) \geq 3x$ ve $f(4f(x) - 3x) = x$ koşullarını sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonları bulunuz. (Türkiye - 2005)

51. Her $x > 1$ rasyonel sayısı için, $f(1/x) = f(x)$ ve $(x+1)f(x-1) = xf(x)$ eşitliklerini sağlayan tüm $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Türkiye - 2009)

52. Her $x,y \in \mathbb{Q}^+$ için,

$$f\left(x + \frac{y}{x}\right) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ fonksiyonlarını bulunuz. (Türkiye - 1993)

Eşitsizlikler

Örnek 394 31^{11} *ve* 17^{14} *sayılarından hangisi daha büyüktür?* $($*Wisconsin M. Talent Search* - $1995)$

Örnek 395 $999!$ *ve* 500^{999} *sayılarından hangisi daha büyüktür?*

Örnek 396 $a, b \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $\left(a^2+b^2\right)^2 \geq ab\,(a+b)^2$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 397 $a, b, c \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $0 \leq b \leq a \leq c$ *ise,*

$$\sqrt{c+b}-\sqrt{c-a} \geq \sqrt{c+a}-\sqrt{c-b}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 398 $x \in \mathbb{R}$ *için* $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2} < \sqrt{x+\dfrac{1}{2}}$ *eşitsizliğini ispatlayınız.*

Örnek 399 a, b, c, d *negatif olmayan sayılar olmak üzere,*

$$a+b=1 \ \text{ ve } \ c+d=9$$

olduğuna göre, $b\,(c-9a)^2 + a\,(d-9b)^2$ *toplamının alabileceği maksimum değer kaçtır?*

Örnek 400 $x, y, z \in \mathbb{R}$ *için,* $x^x y^y z^z \geq (xyz)^{(x+y+z)/3}$ *eşitsizliğini ispatlayınız.* $($*Kanada M.O.* $1995)$

Örnek 401 *Üç tane pozitif tamsayının çarpımı* 1 *ve toplamı ise çarpmaya göre terslerinin toplamıdır. O halde bu sayılardan sadece birinin* 1*'den büyük olabileceğini gösteriniz.*

Örnek 402 *Her* m *pozitif tamsayısı için,* $\left(\sqrt{2010}+\sqrt{2009}\right)^{2m}$ *sayısı ile aralarındaki fark* $1/\left(4 \cdot 2009\right)^m$*'den büyük olmayan bir tamsayının bulunabileceğini ispatlayınız.*

Örnek 403 $a, b, c, d \in (0,1)$ *olmak üzere,*

$$b\,(1-a)+c\,(1-b)+d\,(1-c)+a\,(1-d)<2$$

olduğunu gösteriniz.

6.1 Üçgen Eşitsizliği

Üçgen Eşitsizliği : $x, y \in \mathbb{R}$ için, $|x+y| \leq |x|+|y|$ *eşitsizliği sağlanır.*
İspat :

Örnek 404 x, y, z *reel sayılar olmak üzere,*

$$|x|+|y|+|z| \leq |x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 405 a *ve* b *reel sayılar olmak üzere,*

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

olduğunu ispatlayınız.

6.2 Toplam ve Çarpımlarda Basit Eşitsizliklerin Kullanımı

Örnek 406 $\frac{1}{1999} < \prod\limits_{k=1}^{999} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{44}$ *eşitsizliğini ispatlayınız.*

Örnek 407 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{n^3}$ *toplamının her* $n \geq 2$ *için,* $5/4$*'ten küçük olacağını ispatlayınız.*

Örnek 408 n *sayısı* 1*'den büyük bir tamsayıyı gösterdiğine göre,*

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}}{n+1} > \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}}{n}$$

olduğunu kanıtlayınız. $($*Kanada M.O.* $1998)$

Örnek 409 $\frac{n-1}{2(n+1)} < \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{n-1}{n}$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 410 $n \geq 1$ *olmak üzere,*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

olduğunu ispatlayınız.

Alıştırma : $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\prod_{k=0}^{99} (k+1)^k \geq 2^{50 \cdot 99}$$

olduğunu gösteriniz. (İpucu : $n \in \mathbb{N}$ için, $(n+1)^n \geq 2^n$ olduğunu tümevarımı kullanarak ispatlayınız ve bu eşitsizliği kullanınız.)

6.3 $a^2 \geq 0$ Eşitsizliği

Örnek 411 *$x^2 + y^2 \geq 2xy$ olduğunu gösteriniz.*

Örnek 412 *$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ olduğunu gösteriniz.*

Örnek 413 *$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere,*

$$6bacd \leq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 414 *$x, y, z \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,*

$$(x+y)(x+z)(y+z) \geq 8xyz$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 415 *x ve y pozitif tamsayılar olmak üzere, $xy = 1$ ise $\dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{4y^4}$ ifadesinin minimum değerini bulunuz.*

Örnek 416 *Üç reel sayının karelerinin ortalamasını, ortalamalarının karesinden küçük olamayacağını ispatlayınız.*

Örnek 417 *x, y ve z negatif olmayan reel sayıları için, $x + y + z = 6$ olduğuna göre, $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$ olduğunu gösteriniz.* (*Municipal M.O.* 1999)

Örnek 418 *a, b ve c negatif olmayan sayılar ve $abc = 2$ olduğuna göre,*

$$(a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)$$

ifadesinin alabileceği minimum değeri bulunuz.

Örnek 419 *x, y ve z pozitif reel sayıları için,*

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 3(x+y+z)$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 420 *x, y pozitif reel sayılar olmak üzere, $x+y=1$ ise,*

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$$

olduğunu gösteriniz. (*KANADA M.O.* -1971)

Örnek 421 *$x_1, x_2, ..., x_{2010}$ ve $y_1, y_2, ..., y_{2010}$ pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$x_1+x_2+\cdots+x_{2010}=y_1+y_2+\cdots+y_{2010}=1$$

ise, $\sum_{k=1}^{2010} \frac{x_k y_k}{x_k+y_k} \leq \frac{1}{2}$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 422 *$x, y, z \in \mathbb{R}^+$ olduğuna göre,*

$$8\left(x^3+y^3+z^3\right) \geq (x+y)^3+(x+z)^3+(y+z)^2$$

olduğunu gösteriniz. (*Wisconsin M. Talent Search* - 1999)

Örnek 423 *x, y, z reel sayıları için,*

$$\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 424 *n bir pozitif tamsayı olmak üzere, 1 ile $4n-1$ dahil olmak üzere, 1'den $4n-1$'e kadar olan tüm tek sayıların çarpımlarının $\left(4n^2-1\right)^n$ sayısından büyük olamayacağını gösteriniz.* (*Wisconsin M. Talent Search* - 2000)

Örnek 425 *Her a, b, c pozitif reel sayısı için*

$$\left(a^2+b^2\right)^2 \geq (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

olduğunu gösteriniz. (*İngiltere* - 2007)

Örnek 426 *x, y, z pozitif sayılar olsun.*

$$\textbf{i)} \quad \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz} \quad \textit{ve} \quad \textbf{ii)} \quad \frac{x^2+y^2+2z^2}{xy+yz}$$

ifadelerinin minimum değerini bulunuz. (*Hırvatistan* - 2008)

6.4 $2\left(x^{n+m}+y^{n+m}\right) \geq \left(x^n+y^n\right)\left(x^m+y^m\right)$ Eşitsizliği

Kural 1 : *x ve y negatif olmayan sayılar olmak üzere, $n, m \in \mathbb{Z}^+$ için,*

$$2\left(x^{n+m}+y^{n+m}\right) \geq \left(x^n+y^n\right)\left(x^m+y^m\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat :

Örnek 427 *x ve y negatif olmayan sayılar olduğuna göre,*
$$4\left(x^9+y^9\right) \geq \left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right)\left(x^4+y^4\right)$$
olduğunu gösteriniz.

Örnek 428 *x ve y negatif olmayan sayılar olduğuna göre,*
$$8\left(x^8+y^8\right) \geq (x+y)^2\left(x^3+y^3\right)^2$$
olduğunu gösteriniz.

Örnek 429 *a, b ve c pozitif sayıları için,*
$$3\left(a^8+b^8+c^8\right) \geq \left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^5+b^5+c^5\right)$$
olduğunu ispatlayınız.

6.5 $\frac{m}{n}+\frac{n}{m} \geq 2$ Eşitsizliği

Kural 2 : $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitif reel sayıları için,
$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$
eşitsizliği sağlanır.
İspat :

Örnek 430 *$x_1, x_2, ..., x_{11} \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,*
$$A=x_1+x_2+\cdots+x_{11} \text{ ve } B=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{11}}$$
ise, $A \cdot B$ çarpımının alabileceği en küçük değer kaç olur?

Örnek 431 *x, y ve z pozitif reel sayılar olmak üzere, $x+y+z \leq 1$ ise,*
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 9$$
olduğunu gösteriniz.

Örnek 432 *$x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ise, $\frac{(x+y+z)(xy+xz+yz)}{xyz} \geq 9$ olduğunu gösteriniz.*

Örnek 433 *x, y, z pozitif reel sayılar olmak üzere, $1/x+1/y+1/z=1$ ise,*
$$(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 434 a, b, c *reel sayılar olmak üzere,* $a+b+c=1$ *ise,*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)}{\sqrt{abc}} \geq 3$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 435 x, y *ve* z *pozitif reel sayılar olduğuna göre,*

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

olduğunu gösteriniz. (Bu eşitsizlik ***Nesbitt Eşitsizliği*** *olarak bilinir.)*

Örnek 436 *Her* $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}^+$ *için*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \geq \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2}$$

eşitsizliğinin sağlandığını ispat ediniz. (*Baltık Way* - 1992)

6.6 Aritmetik - Geometrik - Harmonik Ortalama Eşitsizliği

Örnek 437 *Her* a, b *pozitif tamsayıları için,* $2(a+b)+1 \geq 2\sqrt{2a+2b}$ *eşitsizliğini ispatlayınız.*

Örnek 438 $x, y > 0$ *olmak üzere,* $xy+x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy} \geq 6$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 439 $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ *ve* $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=2^n$ *ise*

$$a_1 a_2 \cdots a_n \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 440 x, y *pozitif reel sayılar ve* n *bir tamsayı olmak üzere,*

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^n+\left(1+\frac{y}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 441 *Her* a, b *pozitif tamsayıları için,* $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2a+2b}$ *eşitsizliğini ispatlayınız.*

Örnek 442 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ *olduğuna göre,*

$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \geq \sqrt[6]{ac}+\sqrt[6]{bc}+\sqrt[6]{ab}-1$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 443 $x, y, z \in \mathbb{R}$ *ve* $xyz = 1$ *olduğuna göre,*

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \geq 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*Avusturya - Polonya M.O.* 1991)

Örnek 444 $x, y, z \geq 0$ *için,* $15x^6+3y^4+8z^4 \geq 24x^3yz$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 445 a, b, c *pozitif reel sayıları için,*

$$\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right) \geq 9a^2b^2c^2$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 446 a, b, c, d *pozitif reel sayıları için,*

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}=1$$

olduğuna göre, $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \geq 256$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 447 $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{u^2}+\dfrac{u^2}{x^2}=2$ *denklemini sağlayan kaç* (x, y, z, u) *reel sayı dörtlüsü vardır?*

Örnek 448 a, *b, c ve d pozitif sayıları için,* $abcd = 4$ *olduğuna göre,*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{2}{3c}+\frac{3}{4d}$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Örnek 449 n *bir pozitif tamsayı ve* a *bir reel sayı olmak üzere,* $nx+\dfrac{1}{x^n}$ *ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?* (*UİMO* - 2002)

Örnek 450 x *pozitif bir reel sayı olmak üzere,* $x^2+\dfrac{1}{4x}$ *ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?* (*UMO* - 2002)

A) $\sqrt{3}-1$ *B*) $\sqrt{5}-1$ *C*) 1 *D*) $2\sqrt{2}-2$ *E*) *Hiçbiri*

Örnek 451 $x^4+y^4+z^4+1 = 4xyz$ *eşitliğini sağlayan kaç* (x, y, z) *reel sayı üçlüsü vardır?* (*UMO* - 2006)

Örnek 452 *a ve b reel sayılar ve $ab(a-b)=1$ ise, a^2+b^2 aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?* (UMO - 2001)

$A)$ $\sqrt{11}$ $B)$ 1 $C)$ 2 $D)$ $2\sqrt{2}$ $E)$ *Hiçbiri*

Örnek 453 *x,y,z pozitif reel sayıları için, $x^4+y^4+z^2 \geq xyz\sqrt{8}$ eşitsizliğini ispatlayınız.* (*SSCB. M.O.* 1988)

Örnek 454 *a,b,c pozitif reel sayıları için, $abc=1$ ise,*

$$a+b+c \leq a^2+b^2+c^2$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 455 *$a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ için $a^5+b^5 \leq 1$ ve $c^5+d^5 \leq 1$ olduğuna göre,*

$$a^3c^2+b^3d^2 \leq 1$$

olduğunu ispatlayınız. (*Avusturya - Polonya* 1983)

Örnek 456 $0 < a,b,c \leq 1$ *olduğuna göre,*

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geq a+b+c$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 457 $x^3 3^{1/x^3}+\dfrac{3^{x^3}}{x^3}=6$ *denkleminin kaç farklı reel çözümü vardır?* (*UMO* - 1988)

Örnek 458 *x,y,z pozitif reel sayılar ve $xyz=1$ olmak üzere,*

$$\frac{x+y+z+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{z}} \geq 2$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 459 *a,b,c pozitif reel sayıları için, $abc=1$ ise,*

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{b+a}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

olduğuna gösteriniz.

Örnek 460 *a,b pozitif reel sayıları için,*

$$a^a b^b \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Örnek 461 *$a^2+b^2+c^2=3$ olduğuna göre,*

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$$

olduğunu gösteriniz. (*Beyaz Rusya.* - 1999)

Örnek 462 *Beş pozitif sayının toplamı 2, kareleri toplamı S_2, küpleri toplamı S_3 ve dördüncü kuvvetleri toplamı S_4 olsun. $2, S_2, S_3, S_4$ sayılarından hangisi ya da hangileri en büyük olabilir?*

Örnek 463 *a,b,c pozitif reel sayıları için,*

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 464 *x ve y, 1'den büyük gerçel sayılar olduğuna göre,*

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 8$$

olduğunu gösteriniz. (*SSCB* - 1992)

Örnek 465 *x,y,z pozitif reel sayıları için,*

$$\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}\geq x+y+z$$

eşitsizliğini gösteriniz. (*Kanada M.O.* 2002)

Örnek 466 *Her pozitif a, b, c sayıları için*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\geq\frac{9}{a+b+c}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*Baltık Way* - 1991)

Örnek 467 $0<a,b,c<1$ *ve* $a+b+c=2$ *için* $8(1-a)(1-b)(1-c)\leq abc$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 468 *$abc\geq 1$ olacak şekilde $a,b,c>0$ olsun.*

$$\begin{aligned} K &= 27\left(a^3+a^2+a+1\right)\left(b^3+b^2+b+1\right)\left(c^3+c^2+c+1\right) \\ T &= 64\left(a^2+a+1\right)\left(b^2+b+1\right)\left(c^2+c+1\right)\end{aligned}$$

$K\geq T$ olduğunu gösteriniz. (*Ukrayna* - 2007)

Örnek 469 *a,b,c,d pozitif reel sayıları için,*

$$a^4b+b^4c+c^4d+d^4a\geq abcd(a+b+c+d)$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 470 $a, b, c \in \mathbb{R}$ *için,*

$$\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+(a+b+c)^2 \geq 4\sqrt{3abc\,(a+b+c)}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 471 x, y *ve* z*,* 1*'den büyük reel sayıları olduğuna göre,*

$$\begin{aligned} A &= x+y+z+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{y-1}+\frac{3}{z-1} \\ B &= 2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}+\sqrt{z+2}\right) \end{aligned}$$

ise, $A = B$ *eşitliğini sağlayan,*1*'den büyük kaç tane reel sayı vardır?* (*Nordic Math. Contest* 1992)

Örnek 472 $x, y, z \in \mathbb{R}$ *ve* $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ *şartını sağlayacak şekilde* $x^2 + y^2 + z^2$ *ifadesinin minimum değerini bulunuz.* (*İngiltere* - 2008)

Örnek 473 x, y, z *negatif olmayan gerçel sayıları için*

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*SSCB. M.O.* 1991)

Örnek 474 $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ *için* $x+y+z+w=0$ *ve* $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ *ise,*

$$-1 \leq wx+xy+yz+zw \leq 0$$

olduğunu ispatlayınız. (*Avusturya - Polonya M.O.* 1996)

Örnek 475 $abc \geq 1$ *olacak şekilde* $a, b, c > 0$ *olsun.*

$$(a+\frac{1}{a+1})(b+\frac{1}{b+1})(c+\frac{1}{c+1}) \geq \frac{27}{8}$$

olduğunu gösteriniz. (*Ukrayna* - 2007)

Örnek 476 a, b, c *bir üçgenin kenar uzunlukları ise,*

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

olduğunu ispatlayınız. (*IMO* - 1964)

Örnek 477 *Toplamları* 1 *olacak şekilde* a, b, c *pozitif reel sayılar olsun.*

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ac+2b^2+2b} \geq \frac{1}{ab+bc+ac}$$

olduğunu ispatlayınız. (*Türkiye* - 2007)

Örnek 478 $(a+b)(b+c)(c+a)=8$ *olacak şekilde* a,b,c *pozitif sayılar olsun.*

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*Makedonya* - 2008)

Örnek 479 $abc=1$ *olacak şekilde* a,b,c *pozitif reel sayıları verilsin.*

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2} \leq 1$$

olduğunu ispatlayınız. (*Baltık Way* - 2005)

Örnek 480 $a+b+c+d=1$ *olacak şekilde* a,b,c,d *pozitif reel sayılar olsun.*

$$6\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right) \geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$$

olduğunu ispatlayınız. (*Fransa* - 2007)

Örnek 481 *Her* $\alpha,\beta \neq \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ *için* $\frac{\sec^4\alpha}{\tan^2\beta}+\frac{\sec^4\beta}{\tan^2\alpha}$ *ifadesinin miniumum değerini belirleyiniz.* (103 *Trig. Prob. - Andrescu - Feng*)

Örnek 482 $0 \leq \alpha,\beta,\gamma < 90°$ *ve* $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=1$ *olacak şekilde* α,β *ve* γ *açıları verilsin.*

$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma \geq \frac{3}{8}$$

olduğunu gösteriniz. (*Baltık Way* - 2005)

6.7 Cauchy - Schwarz Eşitsizliği

$a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ *reel sayılar olmak üzere,*

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe ***Cauchy - Schwarz Eşitsizliği*** *denir.*

İspat :

Örnek 483 x,y,z *sayıları için* $x^2+y^2+z^2=12$ *ise,* $x+y+z$ *ifadesi en büyük kaç olabilir?*

Örnek 484 $x+y+z+t=1$ *eşitliğini sağlayan, reel sayılar için,* $x^2+y^2+z^2+t^2$ *ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?*

Örnek 485 *$x+y+z=1$ eşitliğini sağlayan, reel sayılar için, $2x^2+3y^2+6z^2$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?*

Örnek 486 *$x^2+y^2 \leq 16$ ise, $3x+4y$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?*

Örnek 487 *$x, y, z \in R$ olsun. $3x+4y=5z^2$ ve $x^2+y^2=64z$ olmak üzere, z'nin alabileceği en büyük değer nedir?*

Örnek 488 *$a+b+c+d+e=15$ ve $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=45$ eşitliklerini sağlayan a, b, c, d, e reel sayıları için $|a-b+c-d+e|$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?*

Örnek 489 *$\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}$ ve $\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}$ sayılarından hangisi daha büyüktür?*

Örnek 490 *a, b pozitif reel sayılar olmak üzere,*

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a}+b\right)$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Örnek 491 *x, y, z pozitif reel sayılar olmak üzere,*

$$\left(5a+\frac{4}{b}+\frac{1}{3c}\right)\left(\frac{20}{a}+100b+12c\right)$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Örnek 492 *$a\cos\theta+b\sin\theta$ ifadesinin $0 \leq \theta < 2\pi$ aralığı için maksimum ve minimum değerini bulunuz.*

Örnek 493 *a, b, c pozitif reel sayıları için,*

$$\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right) \geq 9a^2b^2c^2$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 494 *a, b, c, d pozitif reel sayıları için,*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 495 *$x, y, z > 1$ reel sayıları için, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ ise,*

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

olduğunu ispatlayınız. (*İran* - 1998)

Örnek 496 *Reel sayılar* a, b, c, d, e *için*

$$a+b+c+d+e=8 \text{ ve } a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$$

eşitlikleri sağlanıyor. e*'nin maksimum değerini bulunuz.* (*USAMO* - 1978)

Örnek 497 $0<a_1<a_2<a_3<a_4$ *olmak üzere, kaç tane* k *sayısı için,*

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=k \\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+a_3^2x_3+a_4^2x_4=k^2 \end{cases}$$

denklem sisteminin bir çözümü vardır? (*Avusturya - Polonya M.O.* 1983)

Örnek 498 $x, y, z \in \mathbb{R}$ *için,* $x^2+y^2+z^2=2$ *olduğuna göre,*

$$x+y+z \leq xyz+2$$

olduğunu gösteriniz. (*IMO Shortlist* 1987)

Örnek 499 $a, b, c, d > 0$ *ve* $c^2+d^2=\left(a^2+b^2\right)^3$ *ise* $\dfrac{a^3}{c}+\dfrac{b^3}{d} \geq 1$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 500 x_i *ve* y_i *sayıları pozitif reel sayılar olmak üzere,* $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ *ise,*

$$\frac{x_1^2}{x_1+y_1}+\frac{x_2^2}{x_2+y_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_n+y_n} \geq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{2}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*Asya Pasifik M.O.* 1991)

Örnek 501 x, y, z *reel sayıları için,* $x^2+y^2+z^2=9$ *ise,*

$$2(x+y+z)-xyz \leq 10$$

olduğunu gösteriniz. (*Vietnam M.O.* 2002)

Örnek 502 $a_1, a_2, \ldots, a_n>0$ *ve* $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$ *için*

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2$$

ifadesinin minimum değerini bulunuz.

Örnek 503 a, b, c *pozitif reel sayılar olmak üzere,* $abc=1$ *ise,*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

olduğunu gösteriniz. $($*IMO* - $1995)$

Örnek 504 *Farz edelim ki* $a,\ b,\ c$ *üç farklı pozitif reel sayı olsun.*

$$\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right|>1$$

olduğunu ispatlayınız. $($*İran* - $2007)$

Örnek 505 $\dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{b+c+1}+\dfrac{1}{c+a+1}\geq 1$ *olacak şekilde* a,b,c *pozitif üç reel sayı olsun.*

$$a+b+c\geq ab+bc+ca$$

olduğunu ispatlayınız. $($*Romanya* - $2007)$

Örnek 506 $a+b+c=1$ *olacak şekilde* $a,b,c>0$ *olsun.*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

olduğunu ispatlayınız.

6.8 $\sum\limits_{cyc}$ notasyonu (Dairesel Toplam)

Örnek 507 a,b,c *pozitif reel sayılar olmak üzere,*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 508 $ab+bc+ca=3$ *olacak şekilde* $a,\ b,\ c$ *pozitif reel sayılar olsun.*

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(a+c)}+\frac{1}{1+c^2(b+a)}\leq\frac{1}{abc}$$

olduğunu ispatlayınız. $($*Romonya* - $2008)$

Örnek 509 ABC *bir dar açılı üçgen olmak üzere,* a,b,c *üçgenin kenarları ise,*

$$\sum_{cyc}\sqrt{a^2+b^2-c^2}\sqrt{a^2-b^2+c^2}\leq ab+bc+ca$$

olduğunu ispatlayınız.

6.9 Kuvvet Ortalamaları Eşitsizliği

Örnek 510 *x, y, z pozitif reel sayılar olmak üzere,*

$$\frac{\left(x^3+y^3+1\right)^2\left(x^3+z^3+1\right)^2\left(z^3+y^3+1\right)^2}{\left(x^2+y^2+1\right)^3\left(x^2+z^2+1\right)^3\left(z^2+y^2+1\right)^3}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Örnek 511 *x, y ve z negatif olmayan reel sayıları için, $x+y+z=6$ olduğuna göre, $x^2+y^2+z^2 \geq 12$ olduğunu gösteriniz.* (*Municipal M.O.* 1999)

Örnek 512 *a, b, c pozitif reel sayılar olmak üzere,*

a) $4\left(a^3+b^3\right) \geq (a+b)^3$ *olduğunu ispatlayınız.*

b) $9\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq (a+b+c)^3$ *olduğunu ispatlayınız.* (*United Kingdom* - 1996)

Örnek 513 *$x, y.z$ pozitif reel sayıları için,*

$$x^5+y^5+z^5 \leq x^5\sqrt{\frac{x^2}{yz}}+y^5\sqrt{\frac{y^2}{zx}}+z^5\sqrt{\frac{z^2}{xy}}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 514 *$a, b, c, d>0$ ve $S=a^2+b^2+c^2+d^2$ ise*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c+d+a}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d+a+b} \geq S$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 515 *$x_1, \ldots, x_{10} \in [0, \pi/2]$ olmak üzere, $\sin^2 x_1+\sin^2 x_2+\cdots+\sin^2 x_{10}=1$ olsun. Buna göre,*

$$3\left(\sin x_1+\cdots+\sin x_{10}\right) \leq \cos x_1+\cdots+\cos x_{10}$$

olduğunu ispat ediniz. (*St. Petersburg* - 2001)

6.10 Simetrik Ortalamalar Eşitsizliği

Örnek 516 *$a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif reel sayıları için,*

$$\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\cdots\left(1+a_n\right)=2^n$$

ise $a_1 a_2 \cdots a_n \leq 1$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 517 *a, b, c pozitif reel sayılar olmak üzere,*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$$

olduğunu gösteriniz.

6.11 Bernoulli Eşitsizliği

Örnek 518 *Her $n \in \mathbb{N}$ ve -1'den büyük x reel sayısı için,*

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

olduğunu gösteriniz. (*Bernoulli Eşitsizliği* 1)

Örnek 519 *Her $n \in (0,1)$ ve her x pozitif reel sayısı için,*

$$(1+x)^n < 1+nx$$

eşitsizliği sağlanır. (*Bernoulli Eşitsizliği* 2)

Örnek 520 *$x, y \in (0,1)$ olmak üzere, $x^y+y^x>1$ olduğunu ispatlayınız.*

6.12 Yeniden Düzenleme veya Permütasyon Eşitsizliği

Örnek 521 *$a, b, c \in \mathbb{R}$ için, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 522 *n pozitif bir tamsayı ve $a_1, a_2, .., a_k$ pozitif reel sayılar olmak üzere,*

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n \geq a_1^{n-1}a_2+a_2^{n-1}a_3+\cdots+a_{k-1}^{n-1}a_k+a_k^{n-1}a_1$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 523 *a, b, c pozitif reel sayıları için,*

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 524 *a, b, c pozitif reel sayıları için,*

$$\left(\frac{a+b}{a+c}\right)^2+\left(\frac{b+c}{a+b}\right)^2+\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^2 \geq \frac{a+b}{b+c}+\frac{c+b}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 525 *a, b, c pozitif reel sayıları için,*

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq a^2+b^2+c^2$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 526 *$a_1, a_2, ..., a_n$ birbirinden farklı tamsayılar olduğuna göre,*

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

olduğunu gösteriniz. (*IMO* -1978)

Örnek 527 *$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ ve $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ sayı dizileri göz önüne alınıyor. $(z_1, z_2, ..., z_n)$ sayı n'lisi $(y_1, y_2, ..., y_n)$ sayı n'lisinin herhangi bir permütasyonu ise,*

$$(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2 \leq (x_1-z_1)^2+\cdots+(x_n-z_n)^2$$

olduğunu ispatlayınız. (*IMO* - 1975)

Örnek 528 *a, b, c bir üçgenin kenar uzunlukları ise,*

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

olduğunu ispatlayınız. (*IMO* - 1964)

Örnek 529 *a, b, c bir üçgenin kenarları olsunlar. Buna göre,*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geq 0$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*IMO* - 1983)

Örnek 530 *a, b, c pozitif reel sayılar olmak üzere, $abc=1$ ise*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*IMO* - 1995)

Örnek 531 *a, b, c pozitif reel sayılar ise,*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

olduğunu ispatlayınız. (*APMO* - 1998)

Örnek 532 *$a+b+c+d=4$ olacak şekilde a, b, c, d negatif olmayan sayılar ise,*

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab \leq 4$$

olduğunu ispatlayınız. (*Orta Avrupa M.O.* - 2007)

Örnek 533 *$a,b,c\in\mathbb{R}$ için,*

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

6.13 Chebysev Eşitsizliği

$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ ve $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$ olmak üzere, $(a_1,a_2,...,a_n)$ ve $(b_1,b_2,...,b_n)$ sıralı n-lilerini göz önüne alalım. Yani, **artan sırada** dizilmiş n elemandan oluşan iki tane sıralı n-lisi verildiğinde,

$$A=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \text{ ve } B=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$$

toplamlarına sırasıyla **sıralı toplam** ve **ters toplam** demiştik. Chebysev eşitsizliği,

$$A\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{n}\geq B$$

olarak ifade edilir.

İspat :

Örnek 534 *Chebysev eşitsizliğini kullanarak, a,b,c pozitif reel sayıları için,*

$$a^ab^bc^c\geq(abc)^{(a+b+c)/3}$$

olduğunu gösteriniz. (*USAMO* - 1974)

Örnek 535 *a,b,c pozitif reel sayıları için,*

$$\frac{\sqrt{b+c}}{a}+\frac{\sqrt{c+a}}{b}+\frac{\sqrt{a+b}}{c}\geq\frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

olduğunu gösteriniz. (D. Grinberg)

Örnek 536 *k bir doğal sayı olmak üzere, toplamları 1 olacak şekilde her pozitif x, y, z sayısı için,*

$$A=\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k}\geq\frac{1}{7}$$

olduğunu ispatlayınız. Eşitlik ne zaman mümkündür? (*Yugoslavya* - 2007)

6.14 Jensen Eşitsizliği

Örnek 537 *Aritmetik - Geometrik ortalamalar eşitsizliğini, Jensen eşitsizliği yardımıyla ispatlayınız.*

Örnek 538 *Bir dar açılı ABC üçgeninde* $\cos A + \cos B + \cos C \leq 3/2$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 539 $x, y, z \in \mathbb{R}$ *için* $e^{(x+2y+3z)/6} \leq \dfrac{e^x + 2e^y + 3e^z}{6}$ *eşitsizliğini ispatlayınız.*

Örnek 540 a, b, c *pozitif reel sayılar olmak üzere,* $a + b + c = 6$ *ise,*

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^5 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^5 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^5$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Örnek 541 x *pozitif reel sayısı için,* $x^x \geq \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{x+1}$ *eşitsizliğini ispatlayınız.*

Örnek 542 x, y *ve* z *pozitif reel sayılar olmak üzere* $x + y + z = 3 \cdot 2^7$ *ise,*

$$\left(1 + \sqrt[7]{x}\right)^7 + \left(1 + \sqrt[7]{y}\right)^7 + \left(1 + \sqrt[7]{z}\right)^7 \leq 3^8$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 543 a, b, c *pozitif reel sayıları için,*

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 544 a, b *ve* c *pozitif reel sayıları için,*

$$\frac{a}{a+3b+3c} + \frac{b}{3a+b+3c} + \frac{c}{3a+3b+c} \geq \frac{3}{7}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Örnek 545 a, b, c *pozitif reel sayılar olmak üzere,* $abc = 1$ *ise,*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

olduğunu gösteriniz. (*IMO* - 1995)

Örnek 546 1*'den küçük olmayan* $a_1, a_2, ..., a_n$ *reel sayıları için,*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$$

olduğunu kanıtlayınız. (*Shortlist* - 1998)

6.15 Genelleştirilmiş Aritmetik - Geometrik Ortalama Eşitsizliği

Genelleştirilmiş Aritmetik - Geometrik ortalama eşitsizliği

$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$ ve $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ ve $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = k$ olsun. Buna göre,

$$\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{k} \geq \sqrt[k]{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe **Genelleştirilmiş Aritmetik - Geometrik ortalama eşitsizliği** denir.

İspat :

Örnek 547 *$x, y, z \geq 0$ için, $8x^3 + 5y^4 + 3z^2 \geq 16xy \sqrt[16]{x^8 z^6 y^4}$ olduğunu gösteriniz.*

Örnek 548 *$x_1, x_2, ..., x_n$ pozitif reel sayılar ve n bir pozitif tamsayı olmak üzere,*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = n$$

eşitliği sağlanıyorsa,

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \cdots + \frac{x_n^n}{n}$$

ifadesinin minimum değerini bulunuz. (*Polonya* - 1995)

6.16 Schur Eşitsizliği

Schur Eşitsizliği : x, y, z negatif olmayan reel sayılar ve $n > 0$ olmak üzere,

$$x^n (x-y)(x-z) + y^n (y-x)(y-z) + z^n (z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik, $x = y = z = 0$ durumunda mümkündür.

İspat :

Örnek 549 *x, y, z negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,*

$$3xyz + x^3 + y^3 + z^3 \geq 2\left((xy)^{3/2} + (yz)^{3/2} + (zx)^{3/2}\right)$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 550 *a, b pozitif reel sayılar $\sqrt{2}$'den büyük olduklarına göre,*

$$\frac{a^2\left(a-\sqrt{2}\right)(a-b) + b^2\left(b-\sqrt{2}\right)(b-a)}{b\sqrt{2} + a\sqrt{2} - ab - 2} \leq 2$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 551 a, b, c *pozitif reel sayıları için,* $abc = 1$ *ise,*

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$$

olduğunu gösteriniz. (*IMO*-2000)

Örnek 552 a, b, c *negatif olmayan reel sayıları için,* $a+b+c=1$ *olduğuna göre,*

$$a^3+b^3+c^3+6abc \geq \frac{1}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 553 *Dar açılı bir* ABC *üçgeninde,*

$$\cot^3 A+\cot^3 B+\cot^3 C+6\cot A\cot B\cot C \geq \cot A+\cot B+\cot C$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 554 x, y, z *pozitif reel sayılar olmak üzere,* $xyz = x+y+z+2$ *ise*

$$xy+xz+yz \geq 2(x+y+z)$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 555 a, b, c *pozitif reel sayılar olmak üzere,* $a+b+c=1$ *ise*

$$5\left(a^2+b^2+c^2\right) \leq 6\left(a^3+b^3+c^3\right)+1$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 556 *Eğer* a, b *ve* c *pozitif reel sayılar ise*

$$(1+\frac{4a}{b+c})(1+\frac{4b}{a+c})(1+\frac{4c}{a+b}) > 25$$

olduğunu ispat ediniz. (*Bosna Hersek* - 2008)

6.17 Hölder Eşitsizliği

Örnek 557 $a, b, c, x, y, z,$ *pozitif reel sayılar olmak üzere,*

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Örnek 558 *a, b, c pozitif reel sayıları için,*

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 27$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 559 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^3 = 3$ *ve* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^5 = 5$ *olacak şekilde* $a_1, a_2, ..., a_n$ *pozitif reel sayıları verilsin.*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \frac{3}{2}$$

olduğunu ispatlayınız. (*Baltık Way* - 2001)

6.18 Muirhead Eşitsizliği

Örnek 560 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ *için,* $x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 561 $x, y \in \mathbb{R}^+$ *için,* $x^2+y^2 \geq 2xy$ *olduğunu Muirhead teoremini kullanarak gösteriniz.*

Örnek 562 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ *için,* $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 563 $x, y \in \mathbb{R}^+$ *için,* $x^7+y^7 \geq x^4y^3+x^3y^4$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 564 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ *ve* $xyz=1$ *için,*

$$x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3 \geq \frac{xy^2+x^2y+xz^2+x^2z+yz^2+y^2z}{2}$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 565 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ *için*

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{3} \geq \frac{1}{6}\left(a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b\right)$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 566 $a, b, c \geq 0$ *olmak üzere,*

$$a^3+b^3+c^3 \geq a^3\sqrt{bc}+b^2\sqrt{bc}+c^3\sqrt{ab}$$

olduğunu ispatlayınız. (*Moldova* - 2004)

Alıştırma 1. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için,

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq x^2yz+y^2xz+z^2xy$$

eşitsizliğini gösteriniz. $([2,2,0] \geq [2,1,1])$

2. $x, y, z \in \mathbb{R}^{+}$ için,

$$\left(x^{3}y^{2}+x^{3}z^{2}+y^{3}z^{2}+y^{3}x^{2}+z^{3}x^{2}+z^{3}y^{2}\right) \geq 2\left(x^{3}yz+y^{3}xz+z^{3}xy\right)$$

eşitsizliğini gösteriniz. $([3,2,0] \geq [3,1,1])$

3. $a, b, c \in \mathbb{R}^{+}$ için,

$$a^{4}+b^{4}+c^{4} \geq a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+c^{2}a^{2}$$

olduğunu gösteriniz. $([4,0,0] \geq [2,2,0])$

Örnek 567 *$a, b \in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere,*

$$\sqrt{\frac{a^{2}}{b}}+\sqrt{\frac{b^{2}}{a}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 568 *$a, b, c \in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere,*

$$\frac{a^{3}}{bc}+\frac{b^{3}}{ca}+\frac{c^{3}}{ab} \geq a+b+c$$

olduğunu ispatlayınız. (*Kanada* - 2002)

Örnek 569 *$a, b, c \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ olmak üzere,*

$$a^{3}+b^{3}+c^{3}+abc \geq \frac{1}{7}(a+b+c)^{3}$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 570 *$a, b, c \in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere,*

$$\frac{a^{3}}{b^{2}-bc+c^{2}}+\frac{b^{3}}{c^{2}-ca+a^{2}}+\frac{c^{3}}{a^{2}-ab+b^{2}} \geq a+b+c$$

olduğunu ispatlayınız. (*Ibero Amerikan (Shortlist)* - 2003)

Örnek 571 *a, b, c negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,*

$$\frac{a^{2}+b^{2}}{2c}+\frac{c^{2}+a^{2}}{2a}+\frac{c^{2}+a^{2}}{2b} \leq \frac{a^{3}}{bc}+\frac{b^{3}}{ca}+\frac{c^{3}}{ab}$$

eşitsizliğini gösteriniz.

Örnek 572 *a, b, c pozitif reel sayılar olmak üzere,*

$$\frac{a^{2}}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^{2}}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^{2}}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$$

olduğunu ispatlayınız. (*Hırvatistan* - 2004)

6.18.1 Homojenleştirme

Örnek 573 *$a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $a+b=1$ ise,*
$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$
olduğunu ispatlayınız. $($*Macaristan* - $1996)$

Örnek 574 *a, b, c pozitif reel sayılar olmak üzere, $a+b+c=1$ ise*
$$a^2+b^2+c^2+3abc \geq \frac{4}{9}$$
olduğunu ispatlayınız. $($*Sırbistan* - $2008)$

6.19 Geometrik Eşitsizlikler

★ Bir üçgende, R çevrel çemberin, r de iç teğet çemberin yarıçapı olmak üzere,
$$R \geq 2r$$
eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu eşkenar üçgenlerde mümkündür.
İspat :

Örnek 575 *α, β ve γ bir üçgenin açıları olmak üzere,*
$$2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right) \leq \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\sin\alpha+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\beta+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\sin\gamma$$
olduğunu ispatlayınız.

Örnek 576 *a, b, c bir üçgenin kenarları, R de çevrel çemberin yarıçapı olmak üzere,*
$$\frac{a+b+c}{3} \leq R\sqrt{3}$$
olduğunu gösteriniz.

Örnek 577 *a, b ve c bir üçgenin kenarları ve α, β ve γ'da bir üçgenin iç açıları olsun. Eğer $2a < (b+c)$ ise, $2\alpha < (\beta+\gamma)$ olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 578 *a, b, c bir üçgenin kenarları ve h_a, h_b, h_c bu kenarlara ait yükseklikler olsun.*
$$\frac{a^2}{h_bh_c}+\frac{b^2}{h_ch_a}+\frac{c^2}{h_ah_b} \geq 4$$
olduğunu ispatlayınız.

Örnek 579 *Bir ABC üçgeninde,*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 580 *$ABCD$ bir konveks dörtgeni için $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$ ve $|DA| = d$ olmak üzere,*

$i)$ $A(ABCD) \leq \dfrac{ab+cd}{2}$

$ii)$ $A(ABCD) \leq \dfrac{a+c}{2} \cdot \dfrac{b+d}{2}$

eşitsizliklerini ispatlayınız.

Örnek 581 *Herhangi ABC üçgeninde, $\cos A + \cos B + \cos C \leq 3/2$ olduğunu gösteriniz.*

Örnek 582 *ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ise,*

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C \leq \frac{a+b+c}{2}$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 583 *A, B, C dar açılı bir üçgenin açıları olsun. O halde*

$$\sin A + \sin B > \cos A + \cos B + \cos C$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*Baltık Way* - 1991)

Örnek 584 *Kenar uzunlukları a, b, c olan bir ABC üçgeninde,*

$$A(ABC) \leq \frac{9abc}{4\sqrt{3}(a+b+c)}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 585 *a, b, c, ABC üçgeninin kenarları ve r iç teğet çemberin yarıçapı ise,*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 586 *a, b, c bir üçgenin üç kenar uzunlukları olmak üzere, $a+b+c = 3$ ise,*

$$K = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4abc}{3}$$

ifadesinin minimum değerini bulunuz.

Örnek 587 *a, b, c bir üçgenin kenarları olmak üzere,*

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 588 *a, b, c bir üçgenin kenarları ve α, β, γ bir üçgenin iç açıları ise,*

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 589 *a, b, c bir üçgenin kenarları ise,*

$$3(bc+ca+ab) \leq (a+b+c)^2 < 4(bc+ca+ab)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Örnek 590 *a, b, c bir üçgenin kenarları olduğuna göre,*

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Örnek 591 *a, b, c bir üçgenin kenarlarını göstermek üzere, $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$ olduğunu gösteriniz.* (*Tourn. of the Towns* - 2002)

Örnek 592 *a, b, c bir üçgenin kenarları olmak üzere,*

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{a+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

olduğunu ispatlayınız. (*APMO* - 1996)

Örnek 593 *a, b, c bir üçgenin kenar uzunlukları ise,*

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

olduğunu ispatlayınız. (*IMO* - 1975)

Örnek 594 *ABC bir dar açılı üçgen olmak üzere, a, b, c üçgenin kenarları ise,*

$$\sum_{cyc} \sqrt{a^2+b^2-c^2}\sqrt{a^2-b^2+c^2} \leq a^2+b^2+c^2$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 595 *a, b, c bir üçgenin kenarları ve $2u = a+b+c$ olduğuna göre,*

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{36}{35}(u^2 + \frac{abc}{u})$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Örnek 596 *a, b, c bir üçgenin kenarları ve $2u = a + b + c$ olsun. O halde*

$$\frac{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)}{(u-a)(u-b)(u-c)} \geq 48$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Örnek 597 *Bir ABC üçgeninde, AD, BE ve CF üçgenin yükseklikleri, O ise bu yüksekliklerin kesişme noktası olsun.*

$i)\ \dfrac{|AD|}{|HD|} + \dfrac{|BE|}{|OE|} + \dfrac{|CF|}{|OF|} \geq 9$

$ii)\ \dfrac{|OD|}{|OA|} + \dfrac{|OE|}{|OB|} + \dfrac{|OF|}{|OC|} \geq \dfrac{3}{2}$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 598 *a, b, c bir üçgenin kenarları ve $2u = a + b + c$ olduğuna göre,*

$$\frac{2u}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Örnek 599 *a, b, c bir üçgenin kenarları olsun.*

$$\frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(a+b-c)^4}{a(c+a-b)} \geq ab + bc + ca$$

olduğunu ispatlayınız. (*Yunanistan* - 2007)

Örnek 600 *a, b, c, ABC üçgeninin kenarları olmak üzere, kenar uzunlukları*

$$a + b/2, \quad b + c/2 \quad ve \quad c + a/2$$

olan bir DEF üçgeni oluşturalım. $4A(DEF) \geq 9A(ABC)$ olduğunu gösteriniz. (*Hindistan* -2003)

Örnek 601 *a, b, c bir üçgenin kenarları, h_a, h_b, h_c bu kenarlara ait yükseklikler ise,*

$$2(h_a + h_b + h_c) \leq \sqrt{3}(a + b + c)$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 602 *a, b, c bir üçgenin kenarları ve h_a, h_b, h_c bu kenarlara ait yükseklikler olsun. r de iç çemberin yarıçapı olsun. O halde*

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 603 *ABC üçgeni için, $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{9}$ olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 604 *α, β, γ bir üçgenin açıları olsun. O halde*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Örnek 605 *α, β, γ bir üçgenin açıları olsun. O halde*

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} \leq 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Örnek 606 *Herhangi bir ABC üçgeninde,*

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 607 *$A + B + C = \pi$ olmak üzere, x, y, z, A, B, C reel sayıları için,*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2\left(yz\cos A + zx\cos B + xy\cos C\right)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Örnek 608 *x, y, z pozitif reel sayılar ve A, B ve C bir üçgenin iç açıları olsunlar. Buna göre,*

$$x\cos A + y\cos B + z\cos C \leq \frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{yx}{z}\right)$$

eşitsizliğinin doğrulunu ispatlayınız.

Örnek 609 *α, β, γ bir üçgenin açıları,olsun.*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$$

olduğunu ispatlayınız.

Örnek 610 *P noktası bir ABC üçgeninin içinde bir nokta olsun. P noktasından ABC üçgenine PH_1, PH_2 ve PH_3 dikmeleri çiziliyor. Bu durumda,*

$$|PA| + |PB| + |PC| \geq 2\left(|PH_1| + |PH_2| + |PH_3|\right)$$

6.20 Trigonometrik Fonksiyonları Kullanarak Eşitsizlik İspatı

Örnek 611 *$0 < a, b, c < 1$ olduğuna göre,*

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*Romanya - Junior* - 2002)

Örnek 612 a, b, c *pozitif reel sayılar olmak üzere,*

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geq 9\,(ab+bc+ca)$$

olduğunu ispatlayınız. (*APMO* 2004)

Örnek 613 a, b, c, d *pozitif reel sayılar olmak üzere,*

$$\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1$$

ise, $abcd \geq 3$ *olduğunu ispatlayınız.* (*Litvanya* - 2002)

Örnek 614 x, y, z *pozitif reel sayılar ve* $x+y+z=xyz$ *olmak üzere,*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

olduğunu gösteriniz. (*Kore* 1998)

Örnek 615 $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *olmak üzere,* $a^2+b^2+c^2+abc=4$ *ise,*

$$0 \leq ab+bc+ca-abc \leq 2$$

olduğunu gösteriniz. (*USAMO* - 2001)

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 5 (Analiz - Cebir 2) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

6.21 Problemler

1. *x, y reel sayıları için, $x > y > 0$ ve $xy = 2$ olduğuna göre,*

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

ifadesinin alabileceği minimum değer kaçtır?

2. *m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, $k = \dfrac{(m+n)^3}{n^2}$ ifadesi bir tek tamsayı ise, k sayısının alabileceği en küçük değer ne olur?* (Wisconsin M. Talent Search - 1999)

3. *a, b ve c pozitif reel sayılar olmak üzere,*

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right)$$

olduğunu ispatlayınız.

4. *a, b, c ve d dört farklı tamsayı ise,*

$$4\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) - (a + b + c + d)^2$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz. (Wisconsin M. Talent Search)

5. *$x_1, x_2, ..., x_n$ negatif olmayan sayıları için, $n \geq 4$ ve $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ ise,*

$$y = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$$

ifadesinin alabileceği maksimum değer kaçtır? (Wisconsin M. Talent Search 2008)

6. *$x^2 + y^2 \leq 16$ ise, $3x + 4y$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?*

7. *$(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3)$ sayıları $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sayılarının herhangi bir permütasyonu olsun. Buna göre,*

$$S = a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3$$

ifadesinin en küçük değeri kaçtır? (Beyaz Rusya - 2002)

8. $\begin{cases} a + b + c + d + e = 15 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 45 \end{cases}$ *eşitliklerini sağlayan a, b, c, d, e sayıları için $|a - b + c - d + e|$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?*

9. *$x, y, z \in R$ olsun. $3x + 4y = 5z^2$ ve $x^2 + y^2 = 64z$ olmak üzere, z'nin alabileceği en büyük değer nedir?*

10. $x, y, z < 2$ *ve* $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ *olacak şekilde* x, y, z *pozitif reel sayılar ise*
$$\frac{3}{2} < \frac{1+y^2}{x+2} + \frac{1+z^2}{y+2} + \frac{1+x^2}{z+2} < 3$$
olduğunu ispatlayınız. (Yunanistan - 2008)

11. $a + b + c \leq \dfrac{3}{2}$ *eşitsizliğini sağlayan* a, b, c *sayıları pozitif reel sayıları için,* $S = abc + \dfrac{1}{abc}$ *ifadesinin en küçük değerini bulunuz.* (Moldova - 2008)

12. $x+y+z+t = 1$ *eşitliğini sağlayan, reel sayılar için,* $x^2+y^2+z^2+t^2$ *ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?*

13. $x + y + z = 1$ *eşitliğini sağlayan, reel sayılar için,* $2x^2 + 3y^2 + 6z^2$ *ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?*

14. *Verilen bir* n *pozitif tamsayısı için,* x *ve* y *sayıları* $xy = nx + ny$ *eşitliğini sağlayan pozitif tamsayılar ise,* x *'in en küçük ve en büyük değerini bulunuz.*

15. 2007 *pozitif tamsayısı için,* x *ve* y *sayıları* $xy = 2007\,(x + y)$ *eşitliğini sağlayan pozitif tamsayılar ise,* x *'in en küçük ve en büyük değerinin toplamı kaçtır?.*

16. *Herhangi* x, y *ve* z *reel sayıları için,*
$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \max\left\{\frac{3\,(x-y)^2}{4}, \frac{3\,(y-z)^2}{4}, \frac{3\,(y-z)^2}{4}\right\}$$
eşitsizliğin sağlandığını gösteriniz. (Bosna H. - 2008)

17. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ *için,*
$$(1+\frac{x}{y})(1+\frac{y}{z})\left(1+\frac{z}{x}\right) \geq 2 + 2\frac{(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$
eşitsizliğini gösteriniz.

18. a, b, c *pozitif reel sayılar olsun.*
$$1 + \frac{3}{ab+bc+ca} \geq \frac{6}{a+b+c}$$
olduğunu ispatlayınız. (Makedonya - 2007)

19. $abc = 1$ *olacak şekilde* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *olsun.*

$$\begin{aligned} K &= a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \\ T &= 6+2(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}) \end{aligned}$$

ise, $K \geq T$ *olduğunu ispatlayınız.* (Brezilya - 2007)

20. $abc \geq 1$ *olacak şekilde* $a, b, c > 0$ *olsun.*

$$(a+\frac{1}{a+1})(b+\frac{1}{b+1})(c+\frac{1}{c+1}) \geq \frac{27}{8}$$

olduğunu gösteriniz. (Ukrayna - 2007)

21. *Her* x, y, z *pozitif reel sayısı için*

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x} \leq K\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük K *reel sayısını bulunuz.* (İran - 2008)

22. a, b, c *pozitif reel sayılar olmak üzere* $abc = 1$ *ise,*

$$K = \frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{2}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{2}{(c+1)^2+a^2+1} \leq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

23. x, y, z, w *birbirinden farklı reel sayılar olmak üzere,*

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{w}+\frac{w}{x} = 4 \text{ ve } xz = yw$$

eşitlikleri sağlandığına göre, $\frac{x}{z}+\frac{y}{w}+\frac{z}{x}+\frac{w}{y}$ *ifadesinin maksimum değeri kaçtır?*

24. *Eğer* $a^2+b^2+c^2 = 1$ *olacak şekilde* a, b *ve* c *pozitif reel sayıları varsa*

$$\frac{a^5+b^5}{ab(a+b)}+\frac{b^5+c^5}{bc(b+c)}+\frac{c^5+a^5}{ca(a+b)} \geq 3(ab+bc+ca)-2$$

eşitsizliğinin olduğunu ispat ediniz. (Bosna H. - 2008)

25. $(a+b)(b+c)(c+a) = 8$ *olacak şekilde* a, b, c *pozitif sayılar olsun.*

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (Makedonya - 2008)

26. $a_1, a_2, ..., a_n \in [0,1]$ *olmak üzere,* $S = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$ *ile gösterilsin.*

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3}$$

olduğunu ispatlayınız. (Moldova - 2007)

27. $x \geq 1$ *olduğuna göre,* $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ *ve* $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ *sayılarından hangisi daha büyüktür?* (Kanada M.O. 1969)

28. a, b *ve* c *pozitif reel sayıları için,* $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geq a + b + c$ *olduğunu gösteriniz.*

29. $a, b, c > 0$ *ve* $abc = 1$ *olduğuna göre,*

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ac}{a^5 + c^5 + ac} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz. (Shortlist$-$1996)

30. $a_1, a_2, ..., a_n$ *sayıları* n *tane farklı pozitif tek sayıyı göstermektedir.* $1 \leq i < j \leq n$ *içini bu sayıların herhangi ikisinin arasındaki* $|a_i - a_j|$ *farkı birbirinden farklı olduğuna göre,*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \frac{n\left(n^2+2\right)}{3}$$

olduğunu gösteriniz.

31. $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $ay - bx = 1$ *eşitliği sağlanıyorsa,*

$$a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + ax + by \geq \sqrt{3}$$

olduğunu gösteriniz.

32. $a, b \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $a \geq 0$ *ve* $a(a+1) \leq (b+1)^2$ *eşitsizlikleri sağlanıyorsa,* $a(a-1) \leq b^2$ *olduğunu gösteriniz.* (CMS-Calısma Soruları$-$2006)

33. a, b, c *pozitif reel sayıları için,* $abc = 1$ *ise,*

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

olduğunu gösteriniz. (IMO$-$2000)

34. $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ *ise,* $3(x+y+z+w)^2 \geq 8(xy + xz + xw + yz + yw + zw)$ *olduğunu gösteriniz.* (Wisconsin M. Talent Search - 1995)

35. $(2^{10})! > 2^{2^{13}}$ *olduğunu gösteriniz.* (Wisconsin M. Talent Search 1996)

36. a, b, c *pozitif reel sayıları,* $1/a + 1/b + 1/c = 1$ *eşitliğini sağlasın,*

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\geq\sqrt{abc}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

olduğunu ispatlayınız. (Asya Pasifik M.O. 2002)

37. n *pozitif tamsayısı için,* $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ *reel sayıları* $[1, 2]$ *kapalı aralığındaki sayılar olsun.*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$$

olduğuna göre,

$$\frac{a_1^3}{b_1} + \frac{a_2^3}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \leq \frac{17}{10}\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)$$

olduğunu gösteriniz. (M.Excalibur)

38. $x + y + z = 1$ *eşitliğini sağlayan* x, y, z *negatif olmayan reel sayıları için,*

$$2 \leq \left(1-x^2\right)^2 + \left(1-y^2\right)^2 + \left(1-z^2\right)^2 \leq (1+x)(1+y)(1+z)$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (Asya Pasifik M.O. 2000)

39. $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $w^2 + y^2 \leq 1$ *ise,*

$$(wx + yz - 1)^2 \geq \left(w^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + z^2 - 1\right)$$

olduğunu gösteriniz. (Avusturya - Polonya M.O. 1988)

40. $n \geq m$ *olmak üzere, pozitif* m, n *tamsayıları için,*

$$(n+1)^m n^m \geq \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \geq 2^m m!$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (Asya Pasifik M.O. 1996)

41. $x_1, x_2, x_3, ...x_n \in \mathbb{R}$ *olmak üzere, her* i, j *için,* $x_{i+j} \leq x_i + x_j$ *sağlanıyorsa,*

$$x_1 + \frac{x_1}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n} \geq x_n$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. (Asya Pasifik M.O. 1999)

42. $a_1, a_2, ..., a_n$ *reel sayıları her* $i = 1, 2, ..., n$ *için* $a_i \geq 1/i$ *şartını sağlasın.*

$$(a_1+1)\,(a_2+\frac{1}{2})\cdots(a_n+\frac{1}{n}) \geq \frac{2^n}{(n+1)!}\,(1 + a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n)$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (Moldova - 2007)

43. *x, y, z negatif olmayan farklı reel sayılar olsun.*

$$K = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}$$

ise, $K \geq \dfrac{4}{xy+yz+zx}$ *olduğunu ispatlayınız.* (Vietnam - 2008)

44. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ *için,* $abc = 1$ *ve* $a+b+c > \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ *ise* a, b *ve* c *sayılarından* <u>sadece</u> *birinin 1'den büyük olabileceğini gösteriniz.* (Sovyet M.O. - 1970)

45. $[\![x]\!]$, *x sayısından büyük olmayan en büyük tamsayıyı ve* $[\![x]\!]$ *ise, x sayısından küçük olmayan en küçük tamsayıyı göstermek üzere,*

$$[\![x+y]\!] \leq \frac{[\![x]\!] + [\![y]\!] + [\![x]\!] + [\![y]\!]}{2} \leq [\![x+y]\!]$$

olduğunu gösteriniz.

46. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ *ve* $x+y+z=3$ *olmak üzere,*

$$\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy+xz+yz)$$

olduğunu ispatlayınız. (İran - 2008)

47. *Bir ABC üçgeni için,*

$$T = \sum_{cyc} \frac{\cos^2(A/2)\cos^2(B/2)}{\cos^2(C/2)}$$

ifadesinin minimum değerini bulunuz. (Vietnam - 2007)

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 5 (Analiz - Cebir 2) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

6.22 Alıştırmalar

1. Her $x \in [-1,1]$ için $\left|2x^2+ax+b\right| \leq 1$ eşitsizliğinin sağlanmasını garanti eden reel a ve b sayıları için a^2+b^2 sayısı kaçtır? (Antalya M.O.- 2000)

2. $x>0,\ y>0,\ z>0$ ve $x+y+z=1$ olmak üzere $\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}+\dfrac{25}{z}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır? (Antalya M.O.- 2001)

3. $x>0, y>0, z>0$ olmak üzere, $\dfrac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir? (Antalya M.O.- 2002)

4. $x+y+z \leq a$ eşitsizliğini sağlayan her pozitif gerçel x,y,z sayıları için $xyz \leq a$ eşitsizliği de sağlanıyorsa, a gerçel sayısına bir "iyi sayı" diyelim. En büyük "iyi sayının" karesi aşağıdakilerden hangisidir? (Antalya M.O.- 2003)

5. $x>0, y>0, z>0$ olmak üzere, $\dfrac{xz+zy}{x^2+y^2+18z^2}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir? (Antalya M.O.- 2003)

6. $(x+6)\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 \geq x^2$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının bulunduğu en geniş aralığın uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir? (Antalya M.O.- 2005)

7. $x>0$ olmak üzere, $x^7+7\cdot\dfrac{a^{88}}{x}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri a cinsinden bulunuz. (Antalya M.O.- 2006)

8. $x+y=2\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{y+4}\right)$ eşitliğini sağlayan reel x ve y sayıları için,

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{y+4}$$

toplamının alabileceği en büyük değer nedir? (Antalya M.O.- 2007)

9. n pozitif tam sayısının kaç farklı değeri için

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=3 \text{ ve } \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=3$$

eşitliklerini sağlayan pozitif $x_1,x_2,\cdots,x_n$ gerçel sayıları bulunur? (UMO.- 2006)

10. x,y gerçel sayıları $4x^2+9y^2=8$ eşitliğini sağlıyorsa, $8x^2+9xy+18y^2+2x+3y$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir? (UMO.- 2004)

11. $xy = 1$ koşulunu sağlayan her$x$, y gerçel sayıları için
$$\left((x+y)^2+4\right)\left((x+y)^2-2\right) \geq A \cdot (x-y)^2$$
eşitsizliği sağlanıyorsa, A sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır? (UMO.- 2008)

12. x bir gerçel sayı ise $\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}$ ifadesinin alabileceği en küçük gerçel değer kaçtır? (UMO.- 2008)

13. x ve y herhangi pozitif reel sayılar olmak üzere,
$$x^2\sqrt{\frac{x}{y}}+y^2\sqrt{\frac{y}{x}} \geq x^2+y^2$$
eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. (Antalya M.O. 1997)

14. x, y, z, t reel sayılar ve $1 \leq x \leq y \leq z \leq t \leq 100$ olmak üzere, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{t}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz. (Antalya M.O. 1997)

15. x, y, z negatif olmayan reel sayılar ve $x+y+z \leq 3$ ise,
$$\frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z} \geq 3$$
olduğunu kanıtlayınız. (Antalya M.O. 1998)

16. x, y, z reel sayılar ve $x \geq y \geq z > 0$ ise
$$\frac{x^2-y^2}{z}+\frac{z^2-y^2}{x}+\frac{x^2-z^2}{y} \geq 3x-4y+z$$
olduğunu kanıtlayınız. (Antalya M.O. 1998)

17. a, b, c ve d herhangi pozitif reel sayılar olmak üzere,
$$\frac{1}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{64}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)$$
eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. (Antalya M.O. 1999)

18. Her $x > \sqrt{2},\ y > \sqrt{2}$ için
$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4 > x^2+y^2$$
eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlayınız. (Antalya M.O. 1999)

19. $abcd = 1$ eşitliğini sağlayan a, b, c, d pozitif reel sayıları için
$$\frac{1+abc}{a+1}+\frac{1+bcd}{b+1}+\frac{1+cda}{c+1}+\frac{1+dab}{d+1} \geq 4$$
olduğunu ispatlayınız. (Antalya M.O. 2001)

20. $abcd = 1$ eşitliğini sağlayan a, b, c, d pozitif reel sayıları için

$$x = a + b + c + d,\ y = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \text{ ve } z = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$$

olduğuna göre $x + y \leq 2z$ eşitsizliğini ispatlayınız. (Antalya M.O. 2001)

21. a, b ve c sayıları bir dik üçgenin kenar uzunlukları ise,

$$(3abc)^3 > (a^3 - b^3 - c^3)(b^3 - c^3 - a^3)(c^3 - a^3 - b^3)$$

eşitsizliğinin sağlanacağını gösteriniz. (Antalya M.O. 2002)

22. a, b, p, q, r, s pozitif tamsayıları

$$qr - ps = 1 \text{ ve } \frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$$

bağıntılarını sağlamaktadırlar. Bu durumda, $b \geq q + s$ eşitsizliğinin sağlanacağını gösteriniz. (Antalya M.O. 2002)

23. $xyz = 1$ eşitliğini sağlayan her pozitif x, y ve z sayıları için

$$\frac{2x^2y^2}{x+y} + \frac{2y^2z^2}{y+z} + \frac{2z^2x^2}{z+x} \geq 3$$

eşitsizliğinin sağlanacağını gösteriniz. (Antalya M.O. 2003)

24. a) $a_0, a_1, a_2, ..., a_{99}, a_{100}$ pozitif sayılar olsun. $a_0 = 1$ ve $a_{100} \leq \dfrac{1}{2^{100}}$ ise,

$$\frac{a_0^2}{a_1} + \frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{99}^2}{a_{100}} \geq 4\left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

b) $a_0 = 1$ ve $a_{100} = \dfrac{1}{2^{100}}$ olmak üzere,

$$\frac{a_0^2}{a_1} + \frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{99}^2}{a_{100}} = 4\left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right)$$

eşitliğini sağlayan pozitif $a_1, a_2, ..., a_{99}$ sayıları bulunuz. (Antalya M.O. 2004)

25. $x_1, x_2, x_3, ..., x_{15}, x_{16}$ reel sayıları için

$$|x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{15} - x_{16}| \leq \sqrt{17 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{16}^2)}$$

eşitsizliği sağlandığına göre, her $k = 1, 2, ..., 16$ için $|x_k| \leq 4$ olacağını gösteriniz. (Antalya M.O. 2005)

26. $x+y+z=1$ eşitliğini sağlayan her pozitif x, y ve z sayıları için

$$18xyz+7\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 3$$

eşitsizliğinin sağlanacağını gösteriniz. (Antalya M.O. 2005)

27. Pozitif a ve b sayıları $a^7+b^7\geq a^6+b^9$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda,

i) $\quad a^8+b^5\geq a^7+b^7;$

ii) $\quad a^9+b\geq a^6+b^7$

eşitsizliklerinin sağlandığını gösteriniz. (Antalya M.O. 2006)

28. $0<a, b, c, d<1$ koşulunu sağlayan her a, b, c, d reel sayıları için

$$a(1-b)+b(1-c)+c(1-d)+d(1-a)+((1-a)(1-b)(1-c)(1-d))^{\frac{1}{3}}+(abcd)^{\frac{1}{2}}<3$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. (Antalya M.O. 2007)

29. $x_1, x_2, ..., x_7$ pozitif sayılar olup, $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_7}=1$ sağlansın.

$$(2000+x_1)(2000+x_2)\cdots(2000+x_7)\geq 2007^7$$

eşitsizliğini kanıtlayınız. (Antalya M.O. 2007)

30. $a, b, c>0$ ve $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=5$ olsun.

$$\sqrt{5a-1}\sqrt{5b-1}+\sqrt{5b-1}\sqrt{5c-1}+\sqrt{5c-1}\sqrt{5a-1}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değerin 6 olduğunu gösteriniz. (Antalya M.O. 2008)

31. a, b, c pozitif sayıları $a+b+c=1$ eşitliğini sağlasınlar. O halde,

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq\frac{1}{ab}\sqrt[3]{1+a-b}+\frac{1}{bc}\sqrt[3]{1+b-c}+\frac{1}{ca}\sqrt[3]{1+c-a}$$

eşitsizliğinin sağlanacağını gösteriniz. (Antalya M.O. 2008)

32. $x\geq 1,\ y\geq 2,\ z\geq 3$ ve $x+y+z=10$ ise,

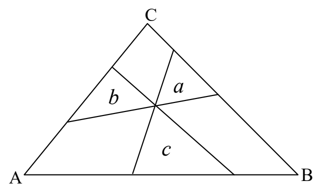
$$F(x,y,z)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-4}+\sqrt{z^2-9}$$

ifadesinin alabileceği en büyük değerin 8 olduğunu gösteriniz ve yukarıdaki koşullar altında $F(x,y,z)=8$ eşitliğini sağlayan (x,y,z) üçlüsünü bulunuz. (Antalya M.O. 2009)

33. Şekildeki ABC üçgeninin alanı 1 ve üç küçük üçgenin alanları da $a,\ b,\ c$ birim karedir. Bu durumda,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>18$$

olduğunu gösteriniz. (Antalya M.O. 2009)



34. $a>0,\ x>0,\ y>0$ ve $z>0$ olmak üzere,

$$a\left(\frac{x}{y+5z}+\frac{y}{z+5x}+\frac{z}{x+5y}\right)+\frac{6}{a}\left(\frac{x^2+y^2}{z^2+xy}+\frac{y^2+z^2}{x^2+yz}+\frac{z^2+x^2}{y^2+zx}\right)$$

ifadesinin alabileceği en küçük değerin 6 olduğunu gösteriniz. (Antalya M.O. 2009)

35. x,y ve z pozitif sayılar olup $x+y+z=3$ sağlansın. Bu durumda,

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{xy}}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{yz}}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{zx}}\geq\frac{3}{2}$$

olduğunu gösteriniz. (Antalya M.O. 2010)

36. a,b,c,x,y,z pozitif sayılar olup, $x+y+z=1$ sağlansın. Bu durumda,

$$2\cdot\sqrt{xy+yz+zx}\cdot\sqrt{ab+bc+ca}\leq x\left(b+c\right)+y\left(c+a\right)+z\left(a+b\right)$$

olduğunu kanıtlayınız. (Antalya M.O. 2010)

37.. $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

eşitsizliğini, yeniden düzenleme eşitsizliğini kullanarak ispatlayınız.

38. $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ ve $abc=1$ ise,

$$a^3+b^3+c^3+(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3>2\left(a^2b+b^2c\right)+c^2a$$

olduğunu ispatlayınız.

39. $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ için,

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

olduğunu ispatlayınız.

40. $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ için, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\geq\dfrac{a+b+c}{abc}$ olduğunu ispatlayınız.

41. a, b, c bir üçgenin kenar uzunluklarını göstermek üzere,
$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$$
olduğunu gösteriniz.

42. $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$ ve $a = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ise,
$$\frac{x_1}{a-x_1}+\frac{x_2}{a-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{a-x_n}\geq\frac{n}{n-1}$$
olduğunu ispatlayınız.

43. $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$ ve $a = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ise,
$$\frac{a}{a-x_1}+\frac{a}{a-x_2}+\cdots+\frac{a}{a-x_n}\geq\frac{n^2}{n-1}$$
olduğunu ispatlayınız.

44. $ABCD$ bir konveks dörtgen olmak üzere, $|AC|\,|BD| \leq |AB|\,|CD|+|BC|\,|DA|$ olduğunu ispatlayınız. Eşitlik durumu ne zaman mümkündür? (Ptolemy Eşitsizliği)

45. v_a, v_b, v_c, ABC üçgeninin kenarortayları ve a, b, c üçgenin kenarları olmak üzere,
$$\frac{3}{4}(a+b+c) < v_a + v_b + v_c < a+b+c$$
eşitsizliğini gösteriniz.

46. v_a, v_b, v_c, ABC üçgeninin kenarortayları, a, b, c üçgenin kenarları ve R çevrel çemberin yarıçapı olmak üzere,
$$\frac{a^2+b^2}{v_c}+\frac{b^2+c^2}{v_a}+\frac{c^2+a^2}{v_b}\leq 12R$$
olduğunu ispatlayınız.

47. v_a, v_b, v_c, ABC üçgeninin kenarortayları, a, b, c üçgenin kenarları ve R çevrel çemberin yarıçapı olmak üzere,
$$v_a\left(bc-a^2\right)+v_b\left(ac-b^2\right)+v_c\left(ab-c^2\right)\geq 0$$
olduğunu ispatlayınız.

48. $a, b, c,$ ABC üçgeninin kenarları olmak üzere, $c > b$ ise
$$\frac{1}{2}(c-b) < v_a - v_c < \frac{3}{2}(c-b)$$
olduğunu ispatlayınız.

49. $a, b, c,\ ABC$ üçgeninin kenarları olmak üzere

$$3\left(ab+bc+ca\right) \leq \left(a+b+c\right)^2 \leq 4\left(ab+bc+ca\right)$$

olduğunu gösteriniz.

50. $a, b, c,\ ABC$ üçgeninin kenarları olmak üzere,

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \leq 2\left(ab+bc+ca\right)$$

olduğunu gösteriniz.

51. $a, b, c,\ ABC$ üçgeninin kenarları olmak üzere,

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right) \leq \left(a+b+c\right)^2$$

olduğunu gösteriniz.

52. $a, b, c,\ ABC$ üçgeninin kenarları olmak üzere, $ab+bc+ca=3$ ise,

$$3 \leq a+b+c \leq 2\sqrt{3}$$

olduğunu gösteriniz.

53. $a, b, c,\ ABC$ üçgeninin kenarları olmak üzere, $a+b+c=2u$ ise,

$$\left(u-a\right)\left(u-b\right) \leq ab$$

olduğunu gösteriniz.

54. $a, b, c,\ ABC$ üçgeninin kenarları olmak üzere, $a+b+c=2u$ ise,

$$\left(u-a\right)\left(u-b\right)+\left(u-b\right)\left(u-c\right)+\left(u-c\right)\left(u-a\right) \leq \frac{ab+bc+ca}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

55. $ABCDEF$ altıgenin kenarları arasında, $|AB|=|BC|,\ |CD|=|DE|$ ve $|EF|=|FA|$ eşitlikleri vardır. Buna göre,

$$\frac{|BC|}{|BE|}+\frac{|DE|}{|DA|}+\frac{|FA|}{|FC|} \geq \frac{3}{2}$$

olduğunu ispatlayınız. (Shortlist - 1997)

56. a, b, c, ABC üçgeninin kenarları ve $A\left(ABC\right)=S$ olmak üzere,

$$4\sqrt{3}S \leq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

olduğunu ispatlayınız.

57. $a, b, c,\ ABC$ üçgeninin kenarları olmak üzere, ABC üçgeninin alanı S ise,

$$ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S$$

olduğunu gösteriniz.

58. $a, b, c,\ ABC$ üçgeninin kenarları olmak üzere, ABC üçgeninin alanı S ise,

$$\frac{3\,(a + b + c)\,abc}{ab + bc + ca} \leq 4\sqrt{3}S$$

olduğunu gösteriniz.

59.. $a, b, c,\ ABC$ üçgeninin kenarları olmak üzere, $a + b + c = 1$ ise,

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

60. a, b, c pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

61. $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$ ve $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ ise,

$$\frac{x_1}{2 - x_1} + \frac{x_2}{2 - x_2} + \cdots + \frac{x_n}{2 - x_n} \geq \frac{n}{2n - 1}$$

olduğunu ispatlayınız.

62. $x, y, z > 1$ ve $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ olduğuna göre,

$$\sqrt{x + y + z} \geq \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (İran - 1998)

63. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $abc = 2$ ise,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b + c} + b\sqrt{c + a} + c\sqrt{a + b}$$

olduğunu ispatlayınız.

64. a, b, c, x, y, z pozitif reel sayılar olmak üzere, $x + y + z = 1$ ise

$$ax + by + cz + 2\sqrt{(xy + xz + yz)\,(ab + ac + bc)} \leq a + b + c$$

olduğunu gösteriniz. (Ukrayna - 2001)

65. x, y, z negatif olmayan reel sayılar olmak üzere, $xy + xz + yz = 1$ ise
$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{5}{2}$$
olduğunu ispatlayınız.

66. a, b, c pozitif reel sayılar olmak üzere,
$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$
eşitsizliğini ispatlayınız.

67. P, ABC üçgeninin içinde bir nokta olsun. X, Y, Z ise, $B\widehat{P}C$, $C\widehat{P}A$ ve $A\widehat{P}B$ açılarının açıortaylarının BC, CA ve AB kenarlarını kestiği noktalar olsun.
$$|PA| + |PB| + |PC| \geq 2\left(|PX| + |PY| + |PZ|\right)$$
olduğunu ispatlayınız.

68. x, y, z, w, A, B, C, D pozitif reel sayılar olmak üzere, $A + B + C + D = \pi$ olsun. Buna göre,
$$a\cos A + y\cos B + z\cos C + w\cos D \leq \sqrt{\frac{(xy+zw)(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}}$$
olduğunu ispatlayınız.

69. a, b, c reel sayısı için $abc = 8$ ise,
$$\frac{a-2}{a+1} + \frac{b-2}{b+1} + \frac{c-2}{c+1} \geq 0$$
olduğunu ispatlayınız.

70. $x + y + z = 1$ olacak şekilde a, b, c pozitif reel sayıları verilsin.
$$\frac{1}{yz + x + \frac{1}{x}} + \frac{1}{xz + y + \frac{1}{y}} + \frac{1}{xy + z + \frac{1}{z}} \leq \frac{27}{31}$$
eşitsizliğini ispat ediniz. (Sırbistan - 2008)

71. $a + b + c = 1$ olacak şekilde a, b, c pozitif reel sayılar olsun.
$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$$
olduğunu ispatlayınız. (Kanada - 2008)

72. $a+b+c \geq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ olacak şekilde a, b, c pozitif reel sayılar olsun.

$$a+b+c \geq \frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}$$

olduğunu ispatlayınız. (Peru - 2007)

73. $a, b, c, d \in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=4$ ise

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leq 2(a+b+c+d)-4$$

olduğunu ispatlayınız. (Polonya - 2007)

74. Eğer x, y, z pozitif reel sayılar ise,

$$(x+y+z)^2(yz+zx+xy)^2 \leq 3\left(y^2+yz+z^2\right)\left(z^2+zx+x^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$$

olduğunu ispatlayınız.

75. a, b ve c bir üçgenin kenarları olsun.

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3$$

olduğunu ispatlayınız.

76. $a, b, c>0$ ve $ab+ac+bc=1$ olsun.

$$\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c} \geq 2\sqrt{a+b+c}$$

olduğunu ispatlayınız. (İran - 2008)

77. $a_1+\cdots+a_n=0$ şartını sağlayan tüm $a_1, a_2, ..., a_n$ reel sayıları için

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1 \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan $n \geq 3$ pozitif tamsayılarını bulunuz. (Baltık Way - 1999)

78. $a>3b>6c>12d$ ve $a^2-b^2+c^2-d^2=1749$ olacak şekilde a, b, c ve d asal sayıları verilsin. $a^2+b^2+c^2+d^2$ ifadesinin alabileceği tüm değerleri bulunuz. (Baltık Way - 1999)

79. Aritmetik ortalaması a olan, $x_1, ..., x_n$ sayıları için,

$$(x_1-a)^2+\cdots+(x_n-a)^2 \leq \frac{1}{2}\left(|x_1-a|+\cdots+|x_n-a|\right)^2$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. (Baltık Way - 1997)

80. $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ olduğuna göre, γ ve δ sayıları,

i) $0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$, ve $\tan\gamma$, $\tan\alpha$ ve $\tan\beta$'nın aritmetik ortalamasıdır.

ii) $0<\delta<\dfrac{\pi}{2}$, ve $\dfrac{1}{\cos\delta}$, $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ ve $\dfrac{1}{\cos\beta}$'nın aritmetik ortalamasıdır.

koşullarını sağladığına göre, $\gamma<\delta$ olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way - 1998)

81. Bir üçgenin iç açıları α, β ve γ olmak üzere, bu açıların karşılarındaki kenarları sırasıyla a, b ve c ile gösterelim. Buna göre,

$$a\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+b\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+c\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\geq 2\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (Baltık Way - 1994)

82. $\prod\limits_{k=2}^{100}\dfrac{k^3-1}{k^3+1}\geq\dfrac{2}{3}$ olduğunu gösteriniz. (Baltık Way- 1992)

83. $a_1,a_2,...,a_n$ pozitif reel sayılar ve $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$ olsun. O halde $(2S+n)\,(2S+a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1)\geq 9(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\cdots+\sqrt{a_na_1})^2$ olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way - 2007)

84. a_k dizisi $a_1=1$, $a_2=\dfrac{1}{2}$ ve $k\geq 1$ için $a_{k+2}=a_k+\dfrac{1}{2}a_{k+1}+\dfrac{1}{4a_ka_{k+1}}$ olarak tanımlansın.

$$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\cdots+\frac{1}{a_{98}a_{100}}<4$$

olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way - 2005)

85. $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ ve $a+b+c=1$ olduğuna göre,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\geq\frac{100}{3}$$

olduğunu gösteriniz.

86. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ ve $n\geq 3$ olduğuna göre,

$$\frac{19}{12}-\frac{1}{n+1}<S_n<\frac{7}{4}-\frac{1}{n}$$

olduğunu ispatlayınız.

87. $p, q, r \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $pqr = 1$ ise, o halde

$$\frac{1}{p^n + q^n + 1} + \frac{1}{q^n + r^n + 1} + \frac{1}{r^n + p^n + 1} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz. (Baltık Way - 2004)

88. $xyz = 1$ olacak şekilde x, y ve z pozitif reel sayıları verilsin.

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) \geq 2(1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{z}})$$

olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way - 2003)

89. a, b, c pozitif reel sayıları verilsin.

$$\frac{2a}{a^2 + bc} + \frac{2b}{b^2 + ca} + \frac{2c}{c^2 + ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$$

olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way - 2003)

90. $n \geq 2$ için (a_n) dizisi

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = 2,\ \text{ve } a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$$

olarak tanımlansın. Her $n \geq 1$ için

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) < \left(2 + \sqrt{2}\right) a_1 a_2 \cdots a_n$$

oldğunu ispatlayınız. (Baltık Way - 2003)

91. $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ olacak şekilde negatif olmayan tüm $x_1, x_2, ..., x_n$ reel sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (1 - x_i)^2 \leq (1 - \frac{1}{n})^2$$

eşitsizliğini ispatlayınız.(Baltık Way - 2002)

92. Tüm a, b, c pozitif reel sayıları için

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way - 2000)

93. $t \geq \frac{1}{2}$ bir reel sayı ve n bir pozitif tamsayı olsun.

$$t^{2n} \geq (t - 1)^{2n} + (2t - 1)^n$$

olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way - 2000)

94. Her pozitif n tamsayısı için
$$x_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(4n-1)(4n+1)}{2n(2n+2)\cdots(4n-2)4n}$$
olsun. $\dfrac{1}{4n} < x_n - \sqrt{2} < \dfrac{2}{n}$ olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way - 2000)

95. a, b, c pozitif reel sayılar olmak üzere,
$$\sum_{cyc} \frac{1}{b(a+b)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$
olduğunu gösteriniz (Junior Balkan -2002)

96. $ABCD$ bir dikdörtgen, M, N, P, Q sırasıyla, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ve $[DA]$ kenarları üzerinde noktalar olsun. Eğer, p, $MNPQ$ dörtgeninin çevresi ise aşağıdakileri ispatlayınız.
i) $p \geq |AC| + |BD|$
ii) Eğer, $p = |AC| + |BD|$ ise $Alan(MNPQ) \leq Alan(ABCD)/2$
iii) Eğer, $p = |AC| + |BD|$ ise $|MP|^2 + |NQ|^2 \geq |AC|^2$.
(J. Balkan Team Selection -1998)

97. $a, b, c \in (0, 1)$ olmak üzere,
$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$$
olduğunu gösteriniz. (J. Balkan Team Selection -2002)

98. m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,
$$m \leq 2000 \quad \text{ve} \quad k = 3 - \frac{m}{n}$$
ise k sayısının en küçük değerini bulunuz. (J. Balkan Shortlist -2000)

99. $x, y, a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,
$$x \neq y, \;\; x \neq 2y, \;\; y \neq 2x, \;\; a \neq 3b \;\; \text{ve} \;\; \frac{2x-y}{2y-x} = \frac{a+3b}{a-3b}$$
ise, $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \geq 1$ olduğunu gösteriniz. (J. Balkan Shortlist -2000)

100. $2x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{z-1} + 2z\sqrt{x-1} \geq xy + yz + zx$ eşitsizliğini sağlayan tüm (x, y, z) üçlülerini bulunuz. (J. Balkan Shortlist -2000)

101. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ve $abc = 1$ ise
$$a^3 + b^3 + c^3 > a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + x\sqrt{a+b}$$
eşitsizliğini gösteriniz. (J. Balkan Shortlist -2002)

102. $a_1 = a_2 = 1$ ve $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ biçiminde tanımlanan Fibonacci dizisi veriliyor.
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} < 2$$
olduğunu ispatlayınız.

103. Bir ABC üçgeninin kenarları a, b, c ve iç teğet çemberinin yarıçapı da r olmak üzere,
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}$$
olduğunu ispatlayınız. (Türkiye - 2005)

104. Her $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için,
$$\sqrt{a^4 + c^4} + \sqrt{a^4 + d^4} + \sqrt{b^4 + c^4} + \sqrt{b^4 + d^4} \geq 2\sqrt{2}\,(ad + bc)$$
olduğunu ispatlayınız. (Türkiye - 2005)

105. $0 \leq a \leq b \leq c$ reel sayıları için,
$$(a + 3b)\,(b + 4c)\,(c + 2a) \geq 60abc$$
olduğunu ispatlayınız. (Türkiye - 1998)

106. Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi, $[AB]$, $[AC]$ ve $[BC]$ kenarlarına sırasıyla C_1, B_1 ve A_1 noktalarında teğettir. Buna göre,
$$\sqrt{\frac{|AB_1|}{|AB|}} + \sqrt{\frac{|BC_1|}{|BC|}} + \sqrt{\frac{|CA_1|}{|CA|}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$
olduğunu ispatlayınız. (Türkiye - 2009)

107. $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ sayıları için, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ ve $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = k^2$ ise
$$\sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j} \geq \frac{(n-1)^2\, k}{k-1}$$
olduğunu ispatlayınız. (Türkiye - 2006)

108. Bir ABC dar açılı üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R olsun. A, B ve C'den kenarlara inilen dikmelerin, kenarları kestiği noktalar sırasıyla A', B' ve C' olsun. $|AA'| = h_1$, $|BB'| = h_2$ ve $|CC'| = h_3$ diyelim. Eğer, t_1, t_2 ve t_3, sırasıyla A, B ve C'den $A'B'C'$ üçgeninin çevrel çemberine çizilen teğetlerin uzunlukları ise,

$$\frac{t_1^2}{h_1} + \frac{t_2^2}{h_2} + \frac{t_3^2}{h_3} \le \frac{3}{2}R$$

olduğunu ispatlayınız. (Türkiye - 1998)

109. a, b, c pozitif reel sayılar olmak üzere, $a + b + c = 1$ ise,

$$\frac{a^2b^2}{c^3\left(a^2 - ab + b^2\right)} + \frac{c^2b^2}{a^3\left(b^2 - bc + c^2\right)} + \frac{a^2c^2}{b^3\left(a^2 - ac + c^2\right)} \ge \frac{3}{ab + bc + ca}$$

olduğunu ispatlayınız. (Türkiye - 2007)

110. x, y, z pozitif reel sayılar olmak üzere, $xy + yz + zx = 1$ ise

$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x) \ge \left(\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}\right)^2 \ge 6\sqrt{3}$$

olduğunu gösteriniz. (Türkiye - 2006)

111. $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitif reel sayılar olmak üzere, $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^5}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_k}$$

toplamının minimum değerini bulunuz. (Türkiye - 1997)

112. Bir K, kirişler dörtgeninin alanını ve çevresini sırasıyla A_K ve P_K ile gösterelim. K kirişler dörtgeninin çevrel çemberinin herhangi bir teğetler dörtgeninin alanı ve çevresi de sırasıyla A_T ve P_T olsun. Buna göre,

$$\frac{A_K}{A_T} \ge \left(\frac{P_K}{P_T}\right)^2$$

olduğunu ispatlayınız. (Türkiye - 1999)

KAYNAKLAR

1. Aliyev İ., Özdemir M., Şıhaliyeva D., *Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatları Sorular ve Çözümler*, 1996-2010, Altın Nokta Yayınları, 2011.

2. Alizade R., Ufuktepe Ü., *Sonlu Matematik*, TÜBİTAK Yayınları, 2006.

3. Andreescu T.; Feng Z., 101 *Problems in Algebra from The Training of The USA IMO Team*, Australian Mathematics Trust, 2001.

4. Andreescu T., Feng Z., 102 *Combinatorial Problems from The Training of The USA IMO Team,* Birkhäuser, 2002.

5. Andreescu T., Feng Z., 103 *Trigonometry Problems from The Training of The USA IMO Team*, Birkhäuser, 2005.

6. Andrescu T, Andrica D., Feng Z., 104 *Number Theory Problems from The Training Of The USA IMO Team*, Birkhäuser 2007.

7. Andrescu T., Enescu B., *Mathematical Olympiad Treasures,* Birkhäuser, 2006.

8. Andrescu T, Feng Z., *Mathematical Olympiads,* 1996-1997: *Problems and Solutions From Around The World*, The Math. Association of America, 1998.

9. Andrescu T, Feng Z., *Mathematical Olympiads,* 1997-1998: *Problems and Solutions from Around The World*, The Math. Association of America, 1999.

10. Andrescu T, Feng Z., *Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from Around The World* 1998-1999, The Math. Association of America, 2000.

11. Andrescu T, Feng Z., George L., *Mathematical Olympiads,* 1999-2000: *Problems and Solutions from Around The World*, The Math. Association of America, 2002.

12. Andrescu T, Feng Z., George L., *Mathematical Olympiads,* 2000-2001: *Problems and Solutions from Around The World*, The Math. Association of America, 2003.

13. Arthur E., *Problem - Solving Strategies*, 1999, Springer.

14. Balcı M., *Matematik Analiz*, Cilt 1., Balcı Yayınları, 2008.

15. Bin X., Peng Yee L., *Mathematical Olympiad in China Problems and Solutions*, East China Normal University Press and World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.

16. Don R., *Number Theory, An Introduction*, Marcel Dekker, Newyork, 1996.

17. Dickson L. E., *First Course in The Theory of Equations,* J.Wiley & Sons, 1922.

18. Doob M., *The Canadian Mathematical Olympiad* 1969–1993, University of Toronto Press, 1993.

19. Efthimiou C., *Introduction to Functional Equations and Inequalities,* 2010.

20. Felda Darjo, (by Translated), 40 *National Math. Olymp. in Slovenia,* Soc. of. Math., Phy. and Astr. of Slovenia, 1996.

21. Fomin D., Kirichenko A., *Leningrad Mathematical Olympiads* 1987–1991, MathPro Press, 1994.

22. Fomin D., Genkin S., Itenberg I., *Mathematical Circles*, American Mathematical Society, 1996.

23. Gerald L. A., Klosinski L. F., Larson L. C., *The William Lowell Putnam Mathematical Competition Problems and Solutions:* 1965-1984, 1985, The Mathematical Association of America.

24. Greitzer S. L., *Uluslararası Matematik Olimpiyatları* 1959 - 1977, TÜBİTAK Yayınları, 1984.

25. Gürlü Ö., *Meraklısına Geometri*, Zambak Yayınları, 2005.

26. Honsberger R., *From Erdos to Kiev Problems of Olympiad Caliber*, The Mathematical Association of America, 1996.

27. Honsberger R., *In Polya's Footsteps, Miscellaneous Problems And Essays*, The Mathematical Association of America, 1997.

28. Honsberger R, *Mathematical Diamonds*, The Mathematical Association of America, 2003.

29. Karakaş H. İ., Aliyev İ., *Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri,* TÜBİTAK Yayınları 1999.

30. Karakaş H. İ., Aliyev İ., *Analiz ve Cebirde ilginç olimpiyat problemleri ve Çözümleri*, TÜBİTAK Yayınları 1999.

31. Kazarinoff N. D., *Geometric Inequalities,* New Mathematical Library,Vol. 4, Random House, 1961.

32. Klamkin M, *USA Mathematical Olympiads* 1972-1986 *Problems And Solutions*, Mathematical Association of America, 1989.

33. Klamkin M., *International Mathematical Olympiads,* 1978–1985, NewMathematical Library, Vol. 31, Mathematical Association of America, 1986.

34. Kızılırmak A., Akbulut F., *Cevdet Bilsay'dan Bir Demet*, Ege Ün. Yay., Bornova, 1975.

35. Kuczma M., *144 Problems of The Austrian–Polish Mathematics Competition 1978–1993*, The Academic Distribution Center, 1994.

36. Larson L. C., *Problem - Solving Through Problems*, Springer - Verlag, 1992.

37. Lidsky V., Ovsyannikov L., Tulaikov A., and Shabunin M., *Problems in Elementary Mathematics*, Mir, Moscow: 1973

38. Manfrino, R. B., Ortega J.A.G., Delgado R.V., *Inequalities, A Mathematical Olympiad Approach*, Birkhäuser, Berlin, 2009.

39. Nesin A., *Matematiğe Giriş 1, Sezgisel Kümeler Kuramı*, Nesin Yayıncılık, 2008.

40. Salkind C. T., *The Contest Problem Book*, Random Hause, 1961.

41. Shanks D., *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, 1978, Chelsea Pub. Company, New York.

42. Shklarsky D. O., Chentzov N. N., Yaglom I. M., *The USSR Olympiad Problem Book*, Dover Pub. 1994.

43. Yücesan R., *Meraklısına Matematik*, Zambak Yayınları, 2005.

44. Terzioğlu N., İçen O., Saban G., Şahinci H., *Analiz Problemleri*, Şirketi Mürettibiye Basımevi, 1962.

45. Töngemen M., *TÜBİTAK Ulusal Matematik Olimpiyat Soru ve Çözümleri,* 1993-2006, Altın Nokta Yayınları, 2006.

46. TÜBİTAK, *Liselerarası Mat. Yarışması Soruları ve Çözümleri,* 1969-1983, TÜBİTAK Yayınları, 1983.

47. Türk Matematik Derneği, *Matematik Dünyası Dergileri,* 2000 - 2008.

48. Özdeğer A., Özdeğer N., *Çözümlü Analiz Problemleri Cilt* 1, Kuşak Ofset, 1995.

49. Öztunç M. K., *Trigonometri Problemleri*, İrem Yayınevi, 1965.

WEB KAYNAKLARI

1. The art of problem solving, http://www.artofproblemsolving.com.

2. Estonian Math Competitions,
http://www.math.olympiaadid.ut.ee/eng/html/index.php

3. Mathematical Excalibur Journal, http://www.math.ust.hk/excalibur/.

4. Crux Mathematicorum with Math. Mayhem, Canadian Math. Society,
http://journals.cms.math.ca/CRUX/.

5. Bulgarian Competitions in Mathematics and Informatics,
http://www.math.bas.bg/bcmi/index.html.

6. Problems from Olympiads,
http://www.imomath.com/index.php?options=oth|other&p=0.

7. Canadian Math. Olympiads, http://www.math.ca/Competitions/CMO/

8. Wisconsin Math. Enginering and Science Talent Saerch Problem Page,
http://www.math.wisc.edu/~talent/problems.html.

9. Kalva Math.Problems , John Scholes, http://www.kalva.demon.co.uk/.

10. William Lowell Putnam Mathematics Competition Problems,
http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml.

11. AMC USAMO/MOSP/IMO & Others Problems,
http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/problemUSAMO-IMOarchive.shtml.

12. Problems in Elemantary Number Theory, http://www.problem-solving.be/pen/.

13. Lecture Notes of Dr.David A. Santos, http://faculty.ccp.edu/faculty/dsantos/.

14. The Harvard MIT Mathematic Tournament, http://web.mit.edu/hmmt/www/.