AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

BİTİRME ÖDEVİ 1
FİNAL SORULARI

2015 - 2016 GÜZ DÖNEMİ

ADI SOYADI : ....

NO : ....

A	A	A	A	A	A	A

SINAV TARİHİ VE SAATİ :

Bu sınav 40 sorudan oluşmaktadır ve sınav süresi 90 dakikadır.

SINAVLA İLGİLİ UYULACAK KURALLAR

1. Cevap kağıdınıza soru kitapçığınızın türünü işaretlemeyi unutmayınız.

2. Her soru eşit değerde olup, puanlama yapılırken doğru cevaplarınızın sayısından yanlış cevaplarınızın sayısının dörtte biri düşülecektir.

3. Sınavda pergel, cetvel, hesap makinesi gibi yardımcı araçlar ve müsvedde kağıdı kullanılması yasaktır. Tüm işlemlerinizi soru kitapçığı üzerinde yapınız.

4. Sınav süresince görevlilerle konuşulmayacak ve onlara soru sorulmayacaktır. Yanlış olduğunu düşündüğünüz sorularla ilgili, görevlilere soru sormayınız. Bu çok küçük bir olasılık olsa da, jüri bu tür durumları daha sonra değerlendirecektir.

5. Öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.

6. Dışarıya çıkan bir aday tekrar sınava alınmayacaktır.

7. Cep telefonuyla sınava girmek yasaktır. Cep telefonunuzu görevliye teslim ediniz.

8. Soru kitapçıkları toplanacaktır.

Sınav soruları dönemin ders içeriklerine göre sorulmaktadır. Verilen döneme ait kapsam dışı soru yüzdesi maksimum %20'dir.

GÜZ DÖNEMİ BİTİRME ÇALIŞMASI DERS İÇERİĞİ

1. Limit - Süreklilik

2. Türev, Geometrik Anlamı ve Teoremleri

3. Türevin Uygulamaları

4. İntegral, Belirli İntegral, Temel Belirsiz İntegraller

5. Kısmi İntegrasyon, İntegralin Alan ve Hacim Uygulamaları

6. Seriler ve Yakınsaklık Testleri

7. Kuvvet Serileri, Yakınsaklık Yarıçapı, Aralığı

8. Taylor Açılımı ve Serilerle İlgili Problemler

9. Vektörler, İç Çarpım, Vektörel Çarpım, Karma Çarpım ve Uygulamaları

10. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması, Ayrılabilir Dif. Denklemler. Lineer Diferansiyel Denklemler

11. Olasılık, Olasılık Fonksiyonu

12. Grup, Devirli Grup, Alt Grup, Normal Alt Grup

13. Lineer Bağımsızlık, Alt Uzay, Boyut, Rank, Taban

BAHAR DÖNEMİ BİTİRME ÇALIŞMASI DERS İÇERİĞİ

1. Fonksiyonlar, Fonksiyonların Örten, 1-1, Periyodik, Çift, Tek olması. Tersinin varlığı, Grafikler üzerinde 1. 2. türevin yorumlanması.

2. İki ve üç katlı integral, sınır değişimi, kutupsal ve silindirik koordinatlara geçişler

3. Eğrisel İntegral ve Uygulamaları

4. 2 ve 3 katlı integrallerin alan ve hacim hesaplamalarına uygulanması

5. Temel Diferensiyel Denklemler (Lineer, Homojen, Bernoulli-Tam)

6. Temel Diferensiyel Denklemler 2 (Yüksek Mertebeden Diferensiyel Denklemler)

7. Uzayda Doğru ve Düzlem Denklemi

8. Matrisler, Elemanter Satır Operasyonları, Matrisin Tersi, Simetrik, Ters simetrik, Ortogonal matris, Lineer denklem sistemleri, Homojen Denklem Sistemi, Determinant

9. Lineer Dönüşüm, Lineer Dönüşüme Karşılık Gelen Matris, Özdeğer, Özvektör, Karakteristik Polinom, Cayley-hamilton teoremi ve uygulamaları

10. Önermeler, Kümeler, Sayılabilirlik, Kardinalite, Sayı çeşitleri

11. Cisim-Halka-İdeal-Tamlık Bölgesi

12. Olasılık - İstatistik, Standart Sapma, Medyan, Rastgele Değişken Fonksiyonu

13. Elips, Hiperbol, Parabol, Parametrik ve Kutupsal Denklemleri, Teğet Denklemleri, Temel Yüzeyler ve Grafikleri

14. İki değişkenli fonksiyonlarda limit süreklilik, yöne göre Türev, Gradiyent, Yüzeyin Normali

15. Dönme, Öteleme, Yansıma, Simetri, İzdüşüm Dönüşümleri ile bunların uygulamaları

1. $\boldsymbol{y = \frac{2}{x}}$ **eğrisi üzerindeki hangi nokta orijine en yakındır?**

A) $(\mathbf{2,1})$ **B)** $(\mathbf{1,2})$ **C)** $(\sqrt{\mathbf{2}},\sqrt{\mathbf{2}})$ **D)** $\left(\sqrt{\mathbf{6}},\sqrt{\mathbf{6}}/\mathbf{3}\right)$ **E)** $(\mathbf{1,1})$

Çözüm : Bu noktaya $P(x,y)$ dersek, $f(x)=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$ fonksiyonunun en küçük değerini bulmamız gerekir.

$$f'(x)=\frac{2x+\frac{-8}{x^3}}{2\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}}=0$$

eşitliğinden $2x-\frac{8}{x^3}=0 \Rightarrow\ x^4=4\Rightarrow x^2=2, x=\sqrt{2}$ bulunur ve buradan da $y=\sqrt{2}$ elde edilir. cevap C

---

2. $\boldsymbol{y=f(x)}$ **fonksiyonu** $(-\infty,\mathbf{0})$ **aralığında artan bir fonksiyon olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta artandır?**

A) $\boldsymbol{x^2f(x)}$ **B)** $\boldsymbol{\frac{f(x)}{x}}$ **C)** $\boldsymbol{f(x^3)}$ **D)** $\boldsymbol{x^2+f(x)}$ **E)** $\boldsymbol{f^2(x)}$

Çözüm : $(-\infty,0)$ aralığında $f'(x)>0$ dır. $f(x)$ pozitif veya negatif olduğunu iddia edemeyiz. Bundan dolayı sadece

$$(f(x^3))'=f'(x^3)3x^2\geq 0$$

seçeneği doğrudur. Cevap C .

---

3. Yarıçap uzunluğu 4 cm olan bir küre içine yerleştirilen maksimum hacimli dik silindirin yüksekliğini bulunuz?

A) $\frac{\mathbf{8}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$ **B)** $\frac{\mathbf{8}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$ **C)** $\frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$ **D)** $\frac{\mathbf{8}}{\sqrt{\mathbf{7}}}$ **E)** $\frac{\mathbf{7}}{\sqrt{\mathbf{7}}}$

Çözüm : Silindirin yüksekliği $2x$,taban yarıçapı y olsun. Buna göre,

$$x^2+y^2=16\Rightarrow y^2=16-x^2$$

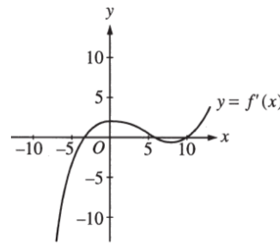
eşitliğinden, silindirin hacmi

$$V=\pi y^2 2x=\pi\left(16-x^2\right)2x=2\pi\left(16x-x^3\right)$$

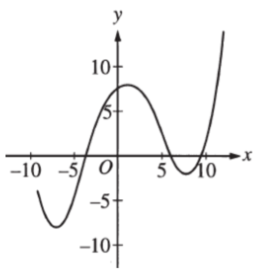
olacaktır. Maksimum hacim için, $V'=0$ dan $x=\frac{4}{\sqrt{3}}$ ve yükseklik $\frac{8}{\sqrt{3}}$ bulunur. Yanıt B.

---

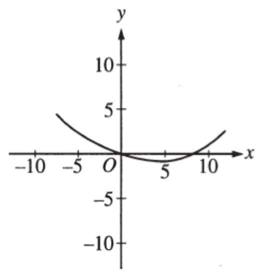
4. Yanda, bir f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki grafiklerden hangisi f fonksiyonunun grafiği olabilir?



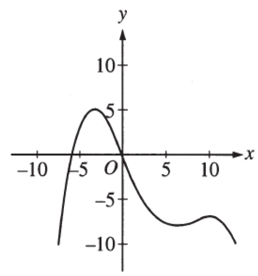
A)



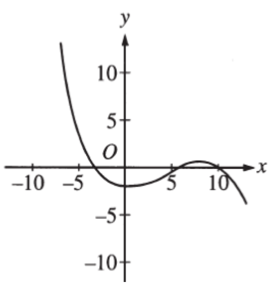
B)



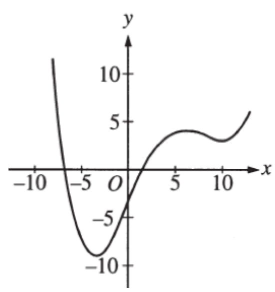
C)



D)



E)



Çözüm : $f'(x) < 0$ olduğu aralıkta f azalan, $f'(x) > 0$ olduğu aralıkta f artandır. $f'(x)$ in işaretine (pozitif, negatif) uygun grafik **E)** de verilmiştir.

---

5. $\displaystyle A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^n}$ **olmak üzere,** $\cos\left(\dfrac{1}{A} - 1\right)$**'in değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 **B)** 1 **C)** -1 **D)** $\dfrac{1}{2}$ **E)** $\dfrac{-1}{2}$

Çözüm :

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^n} = (-1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\pi^n} = (-1)\left[-1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{\pi}\right)^n\right] = 1 - \frac{1}{1+\dfrac{1}{\pi}} = \frac{1}{\pi+1}$$

olduğundan, $\dfrac{1}{A} - 1 = \pi$ ve $\cos\left(\dfrac{1}{A} - 1\right) = \cos\pi = -1$ olur.

---

6. $\displaystyle \int_{-4}^{4} x\sqrt{16 - x^2}\,dx = ?$

A) 8π **B)** 16π **C)** 0 **D)** 4π **E)** 8

Çözüm : İntegrali alınacak fonksiyon tek fonksiyondur, fonksiyonun grafiği orjine göre simetriktir. Bu nedenle intgralin sonucu sıfırdır. Doğru yanıt **C** şıkkıdır.

---

7. $\boldsymbol{f(x) = \int \ln x^2 dx}$ **ve** $\boldsymbol{f(1) = 0}$ **ise** $\boldsymbol{f(e)}$ **kaçtır?**

A) $\mathbf{1}$ **B)** $\boldsymbol{4e^3}$ **C)** $\boldsymbol{e}$ **D)** $\mathbf{2}$ **E)** $\mathbf{4}$

Çözüm : $f(x) = 2\int \ln x dx$ integrali kısmi integrasyonla çözülür.

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \text{ ve } dx = dv \Rightarrow x = v$$

için, $f(x) = 2\int \ln x dx = 2\left(x \ln x - \int x \frac{dx}{x}\right) = 2(x \ln x - x) + c$ olur. $f(x) = 2(x \ln x - x) + c$ ve $f(1) = c - 2 = 0 \Rightarrow c = 2$ olduğundan, $f(e) = c = 2$ olur.

---

8. $\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}}$ **serisi yakınsaklık aralığındaki bir** $\boldsymbol{x}$ **değeri için aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\boldsymbol{\frac{x}{1+x^2}}$ **B)** $\boldsymbol{\frac{1}{1+x^2}}$ **C)** $\boldsymbol{\frac{1}{1-x^2}}$ **D)** $\boldsymbol{\frac{x}{1-x^2}}$ **E)** $\boldsymbol{\frac{x}{x^2-1}}$

Çözüm : $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{x}{1-x^2}$ ($|x^2| < |x| < 1$ için)

---

9. $\boldsymbol{f(x) = (1+x)e^{-x}}$ **fonksiyonu** $\boldsymbol{x}$ **in kuvvetlerine göre seriye açılırsa,** $\boldsymbol{x^{10}}$**'un katsayısı aşağıdakilerden hangisi olur?**

A) $\frac{9}{10!}$ **B)** $-\frac{9}{10!}$ **C)** $-\frac{10}{11!}$ **D)** $\frac{10}{11!}$ **E)** $\frac{11}{10!}$

Çözüm : $f(x) = (1+x)e^{-x} = e^{-x} + xe^{-x}$ olduğundan,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$$

olduğundan, x^{10}'un katsayısı $\frac{(-1)^{10}}{10!} + \frac{(-1)^9}{9!} = \frac{-9}{10!}$ olur.

---

12. $\boldsymbol{y = \sqrt{x-1}}$ **eğrisi,** $\boldsymbol{y = 0}$ **ve** $\boldsymbol{x = 5}$ **doğruları ile sınırlı bölgenin** $\boldsymbol{y = 3}$ **doğrusu boyunca döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\boldsymbol{\pi}$ **B)** $\boldsymbol{12\pi}$ **C)** $\boldsymbol{2\pi}$ **D)** $\boldsymbol{10\pi}$ **E)** $\boldsymbol{3\pi}$

Çözüm : İstenilen hacim

$$V = \pi\int_1^5 \left(3 - \sqrt{x-1}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_1^5 \left(8 - 6\sqrt{x-1} + x\right)\mathrm{d}x = \pi\left(8x + \frac{x^2}{2} - 4(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5\right) = 12\pi$$

olur.

11. $x + 1 = 2(y-1)^2$ eğrisi ve $x + 6y = 7$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanı ne olur?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** 1 **D)** $\frac{4}{3}$ **E)** $\frac{5}{3}$

Çözüm : Eğrilerin kesişim noktaları

$$2\left(y-2\right)^2 - 1 = 7 - 6y \Rightarrow 2y^2 - 2y = 0 \Rightarrow 2y\left(y-1\right) = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ve} \quad y = 1$$

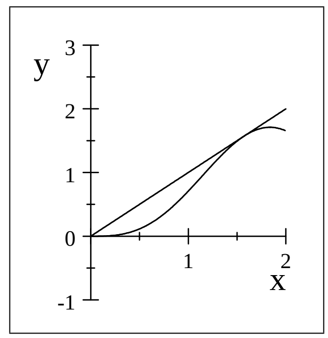
olur. $0 \leqslant y \leqslant 1$ için $x + 6y = 7$ doğrusu $x + 1 = 2\left(y-1\right)^2$ eğrisinin sağında olduğundan istenilen alan

$$A = \int_0^1 \left[(7-6y) - \left(2\left(y-1\right)^2 - 1\right)\right] \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(2y - 2y^2\right) \mathrm{d}y = y^2 - \frac{2}{3}y^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

olur.

---

12. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında, yanda grafikleri verilen $y = x\sin^2 x$ ile $y = x$ eğrileri arasındaki bölgenin alanını aşağıdakilerden hangisi verir?



A) $\int_0^{\pi}\left(u - u\sin^2 u\right)\mathrm{du}$ **B)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{x\sin^2 x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **C)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$

D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x\sin^2 x - x\right)\mathrm{d}x$ **E)** $\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(u - u\sin^2\frac{u}{2}\right)\mathrm{du}$

Çözüm : Eğrilerin kesişim noktaları

$$x\sin^2 x = x \Rightarrow x\left(-1 + \sin^2 x\right) = 0 \Rightarrow -x\cos^2 x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ve} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

olur. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ için $y = x$ doğrusu $y = x\sin^2 x$ eğrisinin üstünde olduğundan istenilen alan

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x - x\sin^2 x\right)\mathrm{d}x \Rightarrow x = \frac{u}{2} \Rightarrow dx = \frac{du}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(u - u\sin^2\frac{u}{2}\right)\mathrm{du}$$

bulunur.

---

13. Yarıçapı 5 metre olan çembersel bir dik silindir şeklindeki su deposunun içinde bulunan su dakikada 5000 litre hızla boşaltılırsa, su seviyesi dakikada kaç metre düşer? ($1\ \mathrm{m}^3 = 1000$ litre)

A) $\frac{1}{5\pi}$ **B)** $\frac{1}{10\pi}$ **C)** $\frac{1}{25\pi}$ **D)** $\frac{1}{125\pi}$ **E)** $\frac{1}{20\pi}$

Çözüm : Yarıçap 5 m verilmiş. Su seviyesinin yüksekliği, h (değişken) ve hacmi de V (değişken) olsun. $\dfrac{dV}{dt} = 500$ litre/dakika olarak verilmiş. Bizden istenen, $\dfrac{dh}{dt}$ değişimidir. Buna göre, $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dh} \cdot \dfrac{dh}{dt}$ eşitliğini kullanacağız. $V = \pi \cdot 5^2 \cdot h \cdot 1000 = 25\,000\pi h$ litre olduğundan,

$$5000 = 25000\pi \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{5000}{25000\pi} = \frac{1}{5\pi} \text{ metre/dakika}$$

elde edilir.

---

14. Aşağıda serilerden kaç tanesi ıraksaktır?

I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n^3}$ **II)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$ **III)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n\pi^{-n}$ **IV)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)$ **V)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

A) 1 **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 5**

Çözüm : I ve II de genel terimin limitleri sıfır olmadığından ıraksaktırlar. IV'de ise $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ olduğundan, bu seri de ıraksaktır. III ve V yakınsak serilerdir. Yanıt C.

---

15. $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ **ifadesi x in kuvvetlerine yazılırsa, x^5'in katsayısı kaç olur?**

A) $\dfrac{1}{3}$ **B)** $\dfrac{3}{21}$ **C) 1** **D)** $\dfrac{1}{10}$ **E)** $\dfrac{5}{21}$

Çözüm : $\forall x \in \mathbb{R}$ için $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ olduğundan

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

elde edilir. Buradan, x^5 in katsayısı : $n = 2$ için, $\dfrac{(-1)^2}{2!\,(2\cdot 2+1)} = \dfrac{1}{10}$ olur.

---

16. $\displaystyle f(x) = \int_{\tan x}^{0} \frac{dt}{1+t^2}$ **olduğuna göre, $f'(100)$ değeri kaçtır?**

A) $\tan^2 100$ **B)** $\sec^2 100$ **C) 1** **D)** -1 **E) 0**

Çözüm : $u = \tan x$ dersek $\dfrac{dy}{dx}$ sorulmaktadır. Analizin Temel Teoreminden

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}\left(\int_u^0 \frac{dt}{1+t^2}\right) = \frac{d}{du}\left(-\int_0^u \frac{dt}{1+t^2}\right) = \frac{-1}{1+u^2}$$

dir.. Buna göre, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{-1}{1+\tan^2 x} \cdot (1+\tan^2 x) = -1$ elde edilir.

17. $\boldsymbol{(y''')^5 - (\sin x)\, e^{y'} + 8y - \cos x = 0}$ **diferansiyel denklemi hakkında aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?**

I) 3. mertebeden **II) 5. dereceden** **III) homojen**

A) Yalnız I **B) Yalnız II** **C) I ve III** **D) II ve III** **E) I, II ve III**

Çözüm : Diferansiyel denklemde, en yüksek türev 3 olduğundan mertebe 3, diferansiyel denklem türevlerine göre polinom olarak yazılamadığından ($e^{y'}$ den dolayı) dereceye sahip değildir. Diferansiyel denklemde bağımsız değişkenli terim var ($cos(x)$) olduğundan homojen olmayan. Böylece, Yalnız I doğrudur.

---

18. $\boldsymbol{y'' - 2y' + 3y = 0}$ **diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir? (c_1 *ve* c_2: keyfi sabit)**

A) $\boldsymbol{y = e^{\sqrt{2}x}[c_1 \sin(\sqrt{2}x) + c_2 \cos(\sqrt{2}x)]}$ **B)** $\boldsymbol{y = e^{-x}[c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)]}$

C) $\boldsymbol{y = e^{\sqrt{2}x}[c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)]}$ **D)** $\boldsymbol{y = e^{x}[c_1 \sin(\sqrt{2}x) + c_2 \cos(\sqrt{2}x)]}$

E) $\boldsymbol{y = e^{x}[c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)]}$

Çözüm : Diferansiyel denklemin karakteristik polinomu olan $L(m) = m^2 - 2m + 3$ polinomunun kökleri $m_1 = 1 + \sqrt{2}i$ ve $m_2 = 1 - \sqrt{2}i$'dir. Karakteristik polinomunun kökleri $m_1 = a + ib$ ve $m_2 = a - ib$ olan 2. mertebeden sabit katsayılı homojen denklemin genel çözümünün $y(x) = e^{ax}[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$ şeklinde olduğunu hatırlayalım. Bu problemde $a = 1, b = \sqrt{2}$ olduğundan genel çözüm

$$y = e^{x}[c_1 \sin(\sqrt{2}x) + c_2 \cos(\sqrt{2}x)]$$

bulunur.**Cevap: D**

---

19. $\boldsymbol{(2x \cos y + 3x^2 y + 2xy)dx + (x^3 - x^2 \sin(y) + x^2)dy = 0}$ **diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdakilerin hangisidir?(c: keyfi sabit)**

A) $\boldsymbol{x^2 \sin y + x^3 y^2 + x y^2 = c}$ **B)** $\boldsymbol{x^2 \cos y + 2x^3 - y^2 = c}$

C) $\boldsymbol{x^2 \cos y + x^3 y + x^2 y = c}$ **D)** $\boldsymbol{-x^2 \sin y + x^3 y + x y^2 = c}$

E) $\boldsymbol{x^2 \cos y - 2x^3 + 2y^2 = c}$

Çözüm : $M(x, y) = 2x \cos y + 3x^2 y + 2xy, N(x, y) = x^3 - x^2 \sin(y) + x^2$ olmak üzere $M_y = -2x \sin y + 3x^2 + 2x = N_x$ olduğundan denklem tam diferansiyel denklemdir. Gruplandırma yöntemi ile çözelim:

$$\left[2x \cos y \ \mathrm{d}x - x^2 \sin y \ \mathrm{d}y\right] + \left[3x^2 y \ \mathrm{d}x + x^3 \ \mathrm{d}y\right] + [2xydx + x^2 \ \mathrm{d}y] = 0.$$

İlk terim $x^2 \cos y$'nin, ikinci terim ise $x^3 y$'nin ve üçüncü terim ise $x^2 y$' nin tam diferansiyelidir, dolayısıyla $\mathrm{d}(x^2 \cos y) + \mathrm{d}(x^3 y) + \mathrm{d}(x^2 y) = 0$ yazılabilir. İntegral alınmasıyla

$$x^2 \cos y + x^3 y + x^2 y = c$$

genel çözümü elde edilir.

20. X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}}$$

olarak veriliyor. Buna göre, X'in beklenen değeri kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm : Beklenen değer, $E(x) = \int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}$ bulunur.

---

21) Bir hastalıktan kurtulma olasılığının $\frac{1}{3}$ olduğu bilinmektedir. Bu hastalığa yakalanmış 10 kişiden iki veya daha fazlasının kurtulma olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{45 \cdot 2^8}{3^{10}}$ D) $\frac{3^9 - 2^{10}}{3^9}$ E) $\frac{3^9 - 2^{11}}{3^9}$

Çözüm : Bu soruda her hasta için kurtulma ve kurtulamama şeklinde tanımlanmış iki sonuç olup, kurtulma olasılığı sabittir. Ayrıca, hastaların birinin durumu diğerini etkilememekte ve toplam 10 hasta incelemeye konu olmaktadır. X, 10 hasta içinde kurtulan hasta sayısı olarak tanımlandığında binom rastgele değişkeni olur ve bunun olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

şeklindedir. O halde iki veya daha fazlasının kurtulma olasılığı

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X=1) - P(X=0) \\ &= 1 - \binom{10}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^9 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \\ &= 1 - \frac{10.2^9}{3.3^9} - \frac{2^{10}}{3^{10}} = 1 - \frac{2^{11}}{3^9} \\ &= \frac{3^9 - 2^{11}}{3^9} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. **Cevap E.**

---

22) X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}}$$

şeklinde verilmiştir. X 'in 3. mertebeden beklenen değere göre (merkezi) momenti μ_3 nedir?

A) $-\frac{7}{27}$ B) $\frac{7}{27}$ C) $-\frac{49}{3}$ D) $\frac{49}{3}$ E) $\frac{7}{3}$

Çözüm : Öncelikle 0 'a göre m_1, m_2 ve m_3 momentlerini bulalım:

$$\begin{aligned} m_1 &= E(X) = \sum_{x=1}^{3} \frac{x^2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{7}{3} \\ m_2 &= E\left(X^2\right) = \sum_{x=1}^{3} \frac{x^3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{27}{6} = \frac{36}{6} = 6 \\ m_3 &= E\left(X^3\right) = \sum_{x=1}^{3} \frac{x^4}{6} = \frac{1}{6} + \frac{16}{6} + \frac{81}{6} = \frac{98}{6} = \frac{49}{3} \end{aligned}$$

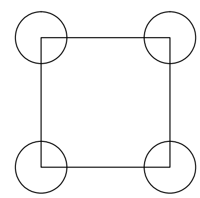
Buradan,

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 = \frac{49}{3} - 3.\frac{7}{3}.6 + 2\left(\frac{7}{3}\right)^3 = -\frac{7}{27}$$

olur.

---

23) Kenar uzunluğu r birim olan karelerden oluşan zemine, yarıçapı $r/5$ birim olan daire şeklinde bir para atılıyor. Herhangi bir karenin bir köşesinin atılan daire parçası tarafından örtülmüş olma olasılığını bulunuz.



A) $\frac{\pi}{5}$ **B)** $\frac{\pi}{10}$ **C)** $\frac{4\pi}{125}$ **D)** $\frac{2\pi}{125}$ **E)** $\frac{\pi}{25}$

Çözüm : Daire şeklindeki paranın merkezini, tamkarenin köşesine yerleştirelim. Bu durumda, (x, y) noktası zemindeki bir noktayı göstermek üzere, (x, y) noktası, köşelerdeki daire parçalarının içinde ise, köşe daire tarafından kapatılacak, aksi halde kapatılamayacaktır. Buna göre, bir karenin bir köşesinin atılan daire parçası tarafından örtülmüş olma olasılığı :

$$\frac{\text{4 çeyrek dairenin alanı}}{\text{Karenin alanı}} = \frac{\pi\frac{r^2}{25}}{r^2} = \frac{\pi}{25}$$

olacaktır.

---

24. Aşağıdaki lineer dönüşümlerden kaç tanesi 1-1'dir?

I. $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{T}(x, y, z) = (x + y, z, x + y + z)$

II. $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{T}(x, y, z) = (2x + y, x, z)$

III. $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{T}(x, y, z) = (2x + y, y - x)$

IV. $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{T}(x, y) = (x, y, x + y)$

V. $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{T}(x, y, z) = (x + y, x + z)$

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 5

Çözüm : T nin 1-1 olması için, Çek$T = \left\{\vec{0}\right\}$ olmalıdır. Ya da, tanım kümesinin boyutu, T'nin rankıyla çekirdeğin boyutunun toplamı olduğundan, T'nin rankı, tanım kümesinin boyutuna eşit olması gerekir. ($T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ için, Boy$(\mathbb{V}) = rankT + Boy\,(\text{Çek}T)$ olduğunu hatırlayınız.)

Buna göre, $\mathbb{R}^3$'den $\mathbb{R}^2$'ye birebir bir dönüşüm olamaz. Çünkü Rank$T$ en fazla 2 olabilir. Yani, III ve V birebir değildir. I'deki T dönüşümünün rankının 3 olmadığı açıktır.

$$\text{Rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

O halde, I'de birebir değildir. II ve IV lineer dönüşümleri birebirdir.

---

25. Aşağıdaki dönüşümlerden kaçı lineerdir?

I. $\mathbb{R}^2$ de öteleme Dönüşümü

II. $\mathbb{R}^2$ de orjin etrafında dönme dönüşümü

III. $\mathbb{R}^3$ de bir noktanın $x = y = z$ doğrusuna göre simetriğini veren dönüşüm

IV. $\mathbb{R}^3$ de bir noktanın xy düzlemine göre simetriğini veren dönüşüm.

V. $\mathbb{R}^3$ de bir noktanın $x = 2$ düzlemi üzerine izdüşümünü veren dönüşüm.

VI. $\mathbb{R}^2$ de bir noktanın $x = y$ doğrusu üzerine izdüşümünü veren dönüşüm.

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 5

Çözüm : Öteleme dönşümü lineer değildir. Diğer dönüşümlerin lineer olabilmesi için 0 noktasını ya da vektörünü yine 0 noktası ya da vektörüne dönüştürmeleri gerekir. Buna göre, II, III, IV ve VI dönüşümleri sıfırı, sıfıra götüren dönüşümlerdir ve lineerdir. V dönüşümü $(0,0,0)$ noktasın, $(0,0,0)$ noktasına götürmez.

---

26. Aşağıdakilerden hangisi S_3 ün normal altgrup sayısıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm : S_3 grubunun normal altgrupları, kendisi, birim ve A_3 tür

---

27. G bir grup ve H onun bir normal alt grubu olsun. Aşağıdakilerden hangisi G nin bir normal altgrubu olamaz?

A) G B) $\{e\}$ C) $M(G)$ D) xHx^{-1} E) G/H

Çözüm : G/H, yeni bir gruptur, Sol eşkümeler kümesidir. Denklik sınıfları kümesidir. G'nin normal altgrubu değildir.

---

28. Aşağıdaki grupların hangisinin mertebesi diğerlerinden farklıdır?

A) $\mathbb{Z}_6$ B) $\mathbb{Z}^*_{12}$ C) $\mathbb{Z}_4$ D) $\mathbb{Z}^*_8$ E) $\mathbb{Z}^*_5$

Çözüm : A haricindeki seçeneklerin eleman sayısı 4'tür. φ, Euler fonksiyonu olmak üzere, $\varphi(12) = \varphi(8) = \varphi(5) = 4$ olduğunu hatırlayınız.

---

29. $\boldsymbol{P_2}$ **ikinci dereceden polinomların kümesi olmak üzere aşağıdaki vektör kümelerinden hangileri** $\boldsymbol{P_2}$ **için bazdır ?**

A) $\{t^2+t,\ 2t^2+t+3,\ 4t^2+1\}$ **B)** $\{t^2+2t-1,\ 2t^2+t-2\}$

C) $\{t^2+t,\ 2t^2+t+3,\ 4t^2+12\}$ **D)** $\{t^2+t,\ 2t^2+t+3,\ t^2+3\}$

E) $\{t^2+2t-1,\ 4t^2+6t-4\}$

Çözüm : E) ve B) baz olamaz. En az üç polinom gerekli. A, C de dikka edilirse sadece son polinom vektörlerin sabit terimleri farklı. Bu ikisinden biri baz olmak zorunda. Polinomların katsayılarından elde edilen matrisin determinantlarına bakalım.

$$\det\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&3\\4&0&1\end{bmatrix}=11\neq 0o$$

lduğu için A tabandır.

$$\text{C) de }\det\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&3\\4&0&12\end{bmatrix}=0\text{ ve E) de }\det\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&3\\1&0&3\end{bmatrix}=0$$

olduğu görülebilir.

---

30. $\boldsymbol{R^3}$ **vektör uzayında** $\{(2,3,1),(3,b,2)\}$ **kümesinin doğrusal bağımsız olması için** $\boldsymbol{b}$**'nin ait olabileceği en büyük küme aşağıdakilerden hangisidir ?**

A) $(-2,2)$ **B)** $\mathbb{R}$ **C)** $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ **D)** $\left(-\infty,\frac{7}{3}\right)$ **E)** $(-5,\infty)$

Çözüm : Her reel sayısı için bu iki vektör birbirinin katı olamaz. İstenilen küme bütün reel sayılar kümesidir.

---

31. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I) $\mathbb{R}^n$**'de** $\boldsymbol{n}$ **elemanlı doğrusal bağımsız bir kümenin oluşturduğu matrisin determinantı sıfır olabilir.**

II) $\mathbb{R}^n$**'de** $\boldsymbol{n-1}$ **elemanlı bir küme** $\mathbb{R}^n$ **için doğrusal bağımsız olabilir.**

III) $\mathbb{R}^n$**'de** $\boldsymbol{n+1}$ **elemanlı bir küme ile** $\mathbb{R}^n$ **üretilemez (germez).**

IV) Doğrusal bağımsız küme, doğrusal bağımlı bir küme kapsar.

V) Doğrusal bağımlı bir küme, her zaman doğrusal bağımsız bir küme kapsar.

A) $\boldsymbol{I-III}$ **B) II-V** **C) III-V-IV** **D) III-IV** **E) I-II**

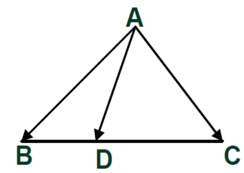
Çözüm : II-R^n'de $n-1$ elemanlı bir küme R^n için doğrusal bağımsız olabilir.

V-Doğrusal bağımlı bir küme, **her zaman** doğrusal bağımsız bir küme kapsar.

ifadeleri doğrudur.

---

32. Düzlemde verilen ABC üçgeninde, $5|BD| = 4\ |DC|$ olacak şekilde bir D noktası alınıyor. Bu düzlemin $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ ile oluşturulan $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ tabanına göre, $9 \cdot \overrightarrow{AD}$ vektörünün koordinatları aşağıdakilerden hangisidir? (Örneğin, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v} = (1, -1)_{\mathcal{B}}$ dir.)



A) $(4,5)$ **B)** $(5,4)$ **C)** $(-4,5)$ **D)** $(4,-5)$ **E)** $(5,-4)$

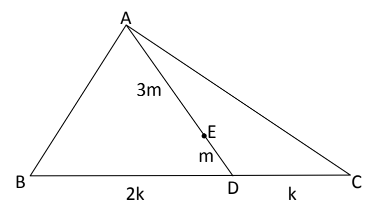
Çözüm : $\overrightarrow{BD} = 4\vec{x}$ ise $\overrightarrow{DC} = 5\vec{x}$ diyelim. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ ve $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ eşitliklerinden,

$$(5)\left(\vec{v} + 4\vec{x} = \overrightarrow{AD}\right)$$
$$(4)\left(\vec{u} - 5\vec{x} = \overrightarrow{AD}\right)$$

olur ki, $9 \cdot \overrightarrow{AD} = 4\vec{u} + 5\vec{v} = (4,5)$ bulunur.

---

33. Yandaki şekilde, $A(7,5)$, $B(1,1)$ ve $C(4{,}1)$ ise $|EB|$ uzunluğu kaçtır?



A) $\sqrt{7}$ **B)** $\sqrt{11}$ **C)** $3\sqrt{2}$ **D)** $\sqrt{10}$ **E)** $2\sqrt{3}$

Çözüm : *A, B noktalarını birleştiren AB doğrusunu alalım.* $C \in AB$ için, C noktasının koordinatları

C, A ile B **arasında** ve $\dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{m}{n}$ *ise,* $C = \dfrac{nA + mB}{n+m}$

C, A ve B'nin **dışında** ve $\dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{m}{n}$ *ise,* $C = \dfrac{nA - mB}{n-m}$

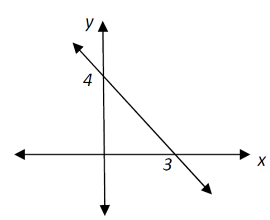
ile bulunur. Buna göre,

$$D = \frac{B + 2C}{3} = \frac{(1,1) + 2(4,1)}{3} = (3,1) \text{ ve } E = \frac{A + 3D}{4} = \frac{(7,5) + 3(3,1)}{4} = (4,2)$$

olduğundan, $|EB| = \sqrt{(4-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$ bulunur.

---

34. Yandaki şekilde verilen doğruya, aşağıdaki vektörlerin hangisi diktir?



A) $(4,3)$ **B)** $(3,4)$ **C)** $(-4,3)$ **D)** $\left(\dfrac{3}{4}, 1\right)$ **E)** $\left(2, \dfrac{4}{3}\right)$

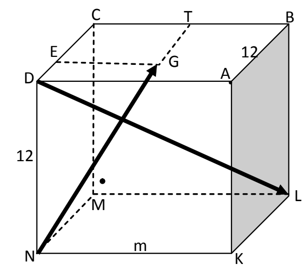
Çözüm : Verilen doğrunun doğrultmanı :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{-4} + 1 \Rightarrow \vec{u} = (3,-4) \text{ veya } \vec{u} = (-3,4)$$

olduğundan ve $\vec{v} = (4,3)$ vektörü için $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ olacağından $\vec{v} = (4,3)$ bu doğruya dik olur.

---

35. Yandaki şekilde verilen kenarları $12, 12, m$ olan dikdörtgenler prizmasında, G noktasının üst kenarlara dik izdüşüm noktaları şekilde E ve T olarak belirtilmiştir. T, $[CB]$'nin orta noktası ve E ise, $|EC| = 2\,|ED|$ koşulunu sağlayan bir noktadır. $\overrightarrow{NG}$ vektörü ile $\overrightarrow{DL}$ vektörü birbirine dik olduğuna göre m kaçtır?



A) $\sqrt{17}$ **B)** $9\sqrt{2}$ **C)** 9 **D)** $2\sqrt{10}$ **E)** $8\sqrt{3}$

Çözüm : M noktasını orjin kabul edip, N, D, L ve G noktalarının koordinatlarını bulalım.

$$N\,(12,0,0)\,;\; D\,(12,0,12)\,;\; L\,(0,m,0) \text{ ve } G\left(8,\frac{m}{2},12\right)$$

olduğundan,

$$\overrightarrow{NG} = \left(-4,\frac{m}{2},12\right) \text{ ve } \overrightarrow{DL} = (-12,m,-12)$$

bulunur. $\overrightarrow{NG} \perp \overrightarrow{DL}$ ise, $\left\langle \overrightarrow{NG}, \overrightarrow{DL} \right\rangle = 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$\left\langle \overrightarrow{NG}, \overrightarrow{DL} \right\rangle = 48 + \frac{m^2}{2} - 144 = 0$$

eşitliğinden, $m = 8\sqrt{3}$ bulunur.

---

36. $\mathbb{R}^2$ de $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ için,

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; f\,(\vec{x},\vec{y}) = x_1\,y_1 - x_2\,y_1 - x_1\,y_2 + 3x_2\,y_2$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpımla birlikte $\mathbb{R}^2$ iç çarpım uzayında verilen $\vec{u} = (1,2)$ vektörünün normu aşağıdakilerden hangisidir? (İç çarpımdan elde edilen standart norm tanımını kullanınız.)

A) $\sqrt{10}$ **B)** $\sqrt{11}$ **C)** 9 **D)** 3 **E)** $2\sqrt{3}$

Çözüm : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{f\,(\vec{u},\vec{u})}$ şeklinde tanımlandığından,

$$\|\vec{u}\| = \|(1,5)\| = \sqrt{1\cdot 1 - 2\cdot 1 - 1\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 2} = 3$$

bulunur.

---

37. Aşağıdakilerin kaç tanesi $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle$ çarpımına eşittir?

I) $\langle \vec{x}, \vec{z} \times \vec{y} \rangle$ **II)** $\langle \vec{y}, \vec{z} \times \vec{x} \rangle$ **III)** $\langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle$ **IV)** $\langle \vec{z} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle$ **V)** $\langle \vec{z} \times \vec{x}, \vec{y} \rangle$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Çözüm : $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle = \det(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ olduğundan, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ dairesel sırası aynı olanlar birbirine eşit olacaktır. Buna göre, $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle$ çarpımına eşit olanlar sadece II, III ve V'tir.

38. Köşelerinin koordinatları $\boldsymbol{A}\,(1,1,1)$,$\boldsymbol{B}\,(1,2,3)$,$\boldsymbol{C}\,(2,3,4)$,$\boldsymbol{D}\,(1,4,2)$ olan üçgensel piramidin hacmi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{5}{6}$ **D)** $\frac{5}{3}$ **E)** $\frac{4}{3}$

Çözüm : $\overrightarrow{AB}=(0,1,2)\,,\ \overrightarrow{AC}=(1,2,3)\,,\ \overrightarrow{AD}=(0,3,1)$ olduğundan, istenen hacim :

$$V=Hacim\,(ABCD)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}0&1&2\\1&2&3\\0&3&1\end{vmatrix}=\frac{5}{6}$$

bulunur.

---

39. $\mathbb{V}=\{(x,y,z):2x+y+z=0\}$ uzayı ile aşağıdaki uzaylardan kaçı aynı uzayı gösterir?

I) $\mathbb{V}_1=$**Sp**$\{(1,1,-3)\,,(1,1,-2)\}$

II) $\mathbb{V}_2=$**Sp**$\{(1,1,-3)\,,(1,0,-2)\,,(0,0,0)\}$

III) $\mathbb{V}_3=$**Sp**$\{(1,1,-3)\,,(1,0,-2)\,,(0,-1,1)\}$

IV) $\mathbb{V}_4=$**Sp**$\{(1,1,-3)\,,(-1,1,1)\}$

V) $\mathbb{V}_5=$**Sp**$\{(1,1,-3)\,,(-1,1,1)\,,(1,2,1)\}$

A) 1 **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 5**

Çözüm : V) haricindekilerin tamamı, 2 boyutlu bir uzayı gererler. V) üç boyutlu bir uzayı gereceğinden, $\mathbb{V}$ uzayına eşit olamaz. Diğer yandan, $\mathbb{V}_1$ uzayındaki, $(1,1,-2)$ vektörü, $2x+y+z=0$ eşitliğini sağlamadığından, $\mathbb{V}$ uzayını değil, başka bir iki boyutlu uzayı (düzlemi) gerer. Bu nedenl, I ve V haricindekiler $\mathbb{V}$ ile aynı uzayı gösterirler.

---

40. Aşağıdakilerin kaç tanesi doğrudur?

I. $\vec{x}\times\vec{y}$ **bir sayıdır.**

II. $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$ **değeri bir vektör olabilir.**

III. $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos\theta$

IV. $\vec{x}\times\vec{y}=\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\sin\theta$

V. $\langle\vec{x},\vec{y}\times\vec{z}\rangle=\det\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

VI. $\vec{x}\times\vec{y}\perp\vec{x}$ **'tir.**

VII. $\|\vec{x}\times\vec{y}\|$, $\vec{x}$ **ve** $\vec{y}$ **ile oluşturulan paralelkenarın alanını verir.**

A) 5 **B) 1** **C) 2** **D) 3** **E) 4**

Çözüm : I, II ve IV yanlış, diğerleri doğrudur.