DİFERENSİYEL GEOMETRİ 1 - ARASINAVI - 21 TEMMUZ 2017 - AAA
ADI SOYADI : .... NUMARA : ....

1. a) Bir eğrinin eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul bu eğrinin bir doğru olmasıdır. Gösteriniz. (10p)
Çözüm : $(\Rightarrow)$: ($\kappa = 0 \Rightarrow$ α bir doğrudur.)

$$\begin{aligned}\kappa = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \alpha'(t) = \mathbf{T} = \mathbf{v} \text{ (sbt)} \\ &\Rightarrow \quad \alpha(t) = \mathbf{v}t + p \\ &\Rightarrow \quad \alpha \text{ bir doğrudur.}\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$: (α bir doğru $\Rightarrow \kappa = 0$)

$$\begin{aligned}\alpha \text{ doğru} \quad &\Rightarrow \quad \alpha(t) = p + t\mathbf{v} \ (p, \mathbf{v} \text{ sabit}) \\ &\Rightarrow \quad \alpha'(t) = \mathbf{T} = \mathbf{v} \\ &\Rightarrow \quad \alpha''(t) = \mathbf{T}' = 0 \\ &\Rightarrow \quad \kappa = \|\mathbf{T}'\| = 0\end{aligned}$$

olur.
b) $\mathbb{R}^3$ uzayında eğriliği sıfır olan bir eğri yazınız. (5p)
Bir doğru denklemi yazmak yeterli,

$$x - 1 = \frac{y-1}{2} = z \text{ veya } \alpha(t) = (t, t+2, 2t-3)$$

2. $\boldsymbol{\alpha(t) = (t, t^2, t^3)}$ olmak üzere, $\boldsymbol{f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}}$, $\boldsymbol{f(x,y,z) = xyz}$ fonksiyonunun, $\boldsymbol{\alpha(2)}$ noktasındaki $\boldsymbol{\alpha'(2)}$ tanjant vektörü yönündeki türevini hesaplayınız. (10p)
Çözüm : $\mathbf{v}_p[f] = \alpha'(2)[f] = (f \circ \alpha)'(2)$ olduğundan,

$$(f \circ \alpha)'(2) = \left(tt^2t^3\right)'(2) = \left(t^6\right)'(2) = \left(6t^5\right)(2) = 6 \cdot 2^5 = 192.$$

3. $\boldsymbol{\alpha(t) = (\cos 2t, \sin 2t, t, 2t)}$ eğrisinin $\boldsymbol{\alpha(0)}$ ve $\boldsymbol{\alpha(\pi)}$ arasındaki uzunluğunu bulunuz. (10p)
Çözüm : $s = \int_0^\pi \|\alpha'(t)\|\, dt$ ve
$\alpha'(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, 1, 2) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{4+1+4} = 3$ olduğundan, $s = \int_0^\pi 3dt = 3\pi$ bulunur.

4. $\boldsymbol{\alpha}$ birim hızlı bir eğri ise α''' türevini $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ cinsinden yazınız. (10p)
Çözüm : α birim hızlı ise,
$\alpha' = \mathbf{T}$
$\alpha'' = \mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}$
$\alpha''' = \kappa'\mathbf{N} + \kappa\mathbf{N}' = \kappa'\mathbf{N} + \kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

5. $F : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ olmak üzere,
a) $F_{*p} : ..T_p\left(\mathbb{E}^2\right) .... \to ...T_{F(p)}\left(\mathbb{E}^3\right) ...$
b) $\boldsymbol{F(x,y) = (x^2, y^2, xy)}$, $\boldsymbol{p = (1,1)}$ ve $\boldsymbol{\mathbf{v}_p = (2,3)}$ ise $\boldsymbol{F_{*p}(\mathbf{v}_p)}$ =? **(10p)**
Çözüm : $\boldsymbol{F_{*p}}(\mathbf{v}_p) = J(F)_p \mathbf{v}_p$ olduğundan,

$$\boldsymbol{F_{*p}}(\mathbf{v}_p) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \\ y & x \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

6. $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ elipsinin $\boldsymbol{\kappa(t)}$ eğrilik fonksiyonu nedir? (10p)
$\alpha(t) = (x, y) = (a\cos t, b\sin t)$ olduğundan,

$$\kappa(t) = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3} = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\sin t \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\right)^3}$$
$$= \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{2/3}}$$

8. $\boldsymbol{\alpha}$ birim hızlı bir eğri ve $\boldsymbol{\lambda, c \in \mathbb{R}}$ olmak üzere, $\boldsymbol{\beta(s) = \lambda\alpha(s) + c}$ eğrisinin eğriliğini $\boldsymbol{\alpha}$ eğrisinin $\boldsymbol{\kappa}$ eğriliği cinsinden hesaplayınız. (15P)
Çözüm : $\kappa_\beta = \dfrac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3}$ eşitliğini kullanacağız.
$\beta' = \lambda\alpha'$ ve α birim hızlı ise $\beta' = \lambda\mathbf{T}$ ve $\|\beta'\| = \lambda$ dır.
$\beta'' = \lambda\mathbf{T}' = \lambda\kappa\mathbf{N}$
olduğundan, $\beta' \times \beta'' = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\kappa & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2\kappa\mathbf{B}$ olur ve

$$\kappa_\beta = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{\lambda^2\kappa}{\lambda^3} = \frac{\kappa}{\lambda}$$

olur.

9. $\boldsymbol{f(x,y) = xy}$ fonksiyonunun $\boldsymbol{P(1,2)}$ noktasında, hangi birim vektör doğrultusundaki türevi maksimum olur. Bu birim vektörü ve yönlü türevin maksimum değerini bulunuz. (10P)
Çözüm : Maksimum yönlü türev, $\nabla f(p) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(p)$ $= (y, x)(p) = (2, 1)$ yönündeki türevdir. Bu yöndeki birim vektör: $\mathbf{v}_p = \dfrac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} = \dfrac{(2,1)}{\sqrt{5}}$ olur. Buna göre,
$\mathbf{v}_p[f] = \langle \nabla f(p), \mathbf{v}_p \rangle = \left\langle (2,1), \dfrac{(2,1)}{\sqrt{5}} \right\rangle = \sqrt{5}$ olur.

10. $\boldsymbol{\alpha(t) = (t, t^2 + 1, t^2 + 2)}$ eğrisinin $\boldsymbol{\alpha(1)}$ noktasındaki Normal düzleminin denklemini bulunuz. (10p)
Çözüm : Normal düzlem $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{B}$ nin oluşturduğu düzlemdir ve bu düzlemin dikmesi $\mathbf{T}$ vektörüdür. $\mathbf{T} = \dfrac{\alpha'(1)}{\|\alpha'(1)\|} = \dfrac{(1,2,2)}{3}$ ve $P = \alpha(1) = (1,2,3)$ olduğundan, istenen düzlemin denklemi : $\dfrac{1}{3}(x-1) + \dfrac{2}{3}(y-2) + \dfrac{2}{3}(z-3) == 0$ veya $x + 2y + 2z = 11$ olur.

11. $\boldsymbol{\alpha}$, birim hızlı eğri olmak üzere, $\boldsymbol{\kappa = \|\mathbf{T}'(t)\|}$ ve $\boldsymbol{\tau = \langle \mathbf{N}'(t), \mathbf{B}(t) \rangle}$ ise $\boldsymbol{\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\ \mathbf{B}}$ olduğunu gösteriniz. (15 P)
Çözüm : $\mathbf{N}' = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}$ olsun. Bu ifadeyi sırasıyla, T, N ve B ile iç çarpalım.
$a = \langle \mathbf{N}', \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{T}' \rangle = -\langle \mathbf{N}, \kappa\mathbf{N} \rangle = -\kappa$, ($\langle \mathbf{N}, \mathbf{T} \rangle = 0$ olduğundan, $\langle \mathbf{N}', \mathbf{T} \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{T}' \rangle = 0$ olduğunu ve $\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}$'yi kullandık.)
$b = \langle \mathbf{N}', \mathbf{N} \rangle = 0$, (Burada, $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 1$ ise $\langle \mathbf{N}', \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{N}' \rangle = 2\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}' \rangle = 0$ olduğunu kullandık.)
$c = \langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle = \tau$ (Yukarıdaki tanımdan)
olduğundan, $\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$ elde edilir.