Diferenisyel Geometri 2
Yazokulu 2010
Adı Soyadı :
No :

1. $\varphi(u,v) = \left(u+2v, v+2u, u^2 v\right)$ **parametrizasyonu ile verilen $\mathbb{M}$ kümesinin bir regüler yüzey olduğunu gösteriniz. (15 puan)**

2. Minimal bir yüzeyin Gauss eğriliğinin pozitif olamayacağını gösteriniz. (10 **puan)**

3. $\mathbb{V}$, $\mathbb{R}^3$**'ün açık bir altkümesi olmak üzere,** $c \in \mathbb{R}$ **sayısı,** $f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = c$ **kapalı fonksiyonunun regüler bir değeri olsun.** $\nabla f|_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(p)$ **vektörünün,** $f^{-1}(c)$ **yüzeyinin** p **noktasında yüzeye dik olduğunu gösteriniz.**(10 **puan)**

4. $\varphi(u,v) = \left(u, v, u+v^2\right)$ **parametrizasyonu ile verilen $\mathbb{M}$ yüzeyinin $p = \varphi(1,1)$ noktasındaki şekil operatörünü bulunuz. b)** $\mathrm{v}_p = (2,1,4) \in T_p(\mathbb{M})$ **için** $S_p(\mathrm{v}_p)$**'yi hesaplayınız.** (15 **puan)**

5, 6, 7 ve 8'inci sorulardan sadece üçünü çözünüz.

5. $\varphi(u,v)$ **parametrizasyonu ile verilen bir** $\mathbb{M}$ **yüzeyinin koordinat fonksiyonları** x_1, x_2 **olmak üzere,** $\mathbb{M}$ **üzerinde tanımlanan,** $f:\mathbb{M}\to\mathbb{R}$ **fonksiyonu için,** $\varphi_u(q)[f] = \dfrac{df}{dx_1}(p)$ **olduğunu gösteriniz. (10 puan)**

6. $\varphi(u,v) = (u-v, u+v, u^2+v)$ **parametrizasyonu ile verilen regüler** $\mathbb{M}$ **yüzeyinde** $f:\mathbb{M}\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y+xz$ **fonksiyonu veriliyor.** $p=\varphi(1,2)$ **olmak üzere**

$$\mathrm{h}_q = 3\frac{\partial}{\partial u}(q) - 2\frac{\partial}{\partial v}(q) \in T_q(\mathbb{R}^2)$$

tanjant vektörü için, $\varphi_*(\mathrm{h}_q)[f] = ?$ **(15 puan)**

..

7. N, $\mathbb{M}$ **yüzeyinin normal vektör alanı olmak üzere,** $\mathrm{v}_p \in T_p(\mathbb{M})$ **için,** $D_{\mathrm{v}_p}\mathrm{N} \in T_p(\mathbb{M})$ **olduğunu gösteriniz. (15 puan)**

8. a) $(x-5)^2 + z^2 = 4$ **çemberinin** $z-$**ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen tor yüzeyinin denklemini bulunuz.**

b) Bu yüzey üzerinde bir p **noktası belirleyiniz.**

c) Bu p **noktasından geçen parametre eğrilerini bulunuz.**

d) Bu noktadaki Gauss eğriliğini bulunuz.

Diferansiyel Geometri 2
Yazokulu 2010
Adı Soyadı :
No :

1. $\mathbb{M}$ yüzeyinin bir p noktasındaki birim eğrilik vektörleri e_1 ve e_2, asal eğrilikleri de k_1 ve k_2 olsunlar. $\mathbf{v}_p = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ ise $k_n(\mathbf{v}_p) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta$ olduğunu gösteriniz. **(20 puan)**

2. $\mathbf{v}_p$ yüzey üzerindeki birim olmayan bir tanjant vektörü olsun, **I** ve **II** sırasıyla birinci ve ikinci temel formu göstermek üzere, $k_n(\mathbf{v}_p) = \dfrac{\mathbf{II}(\mathbf{v}_p)}{\mathbf{I}(\mathbf{v}_p)}$ olduğunu gösteriniz. (15 **puan)**

3. $\mathbb{R}^3$ de bir $\mathbb{M}$ yüzeyinin birinci, ikinci ve üçüncü temel formları arasında $\mathbf{III} - 2H\mathbf{II} + K\mathbf{I} = 0$ bağıntısının sağlandığını gösteriniz.(15 **puan)**

Yedek : $\mathbb{M}$, φ parametrizasyonu ile verilen bir yüzey ve G Gauss dönüşümü olmak üzere, $\varphi_*(h_q) = \mathbf{w}_p \in T_p(\mathbb{M})$ için, $(G\circ\varphi)_*(h_q) = -(S(\mathbf{w}_p))_{G(p)}$ olduğunu ispatlayınız. **(15 Puan)**

4. $\varphi(u,v) = \left(u, v, u+v^2\right)$ parametrizasyonu ile verilen $\mathbb{M}$ yüzeyinin

a) Birinci temel form katsayılarını bulunuz. (5 **puan**)

b) İkinci temel form katsayılarını bulunuz. (5 **puan**)

c) $p = \varphi(1,1)$ olmak üzere, $\mathbf{w}_p = 3\varphi_u(q) + \varphi_v(q)$ tanjant vektörünün uzunluğunu birinci temel form katsayılarını kullanarak bulunuz. (5 **puan**)

d) $u = t$ ve $v = 1$ alınarak elde edilen yüzey üzerindeki $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ eğrisinin $t = 0$ ve $t = 1$ noktaları arasındaki uzunluğunu birinci temel formu kullanarak hesaplayınız. (5 **puan**)

e) $k_n(\mathbf{w}_p)$ normal eğriliğini bulunuz. (5 **puan**)

5, 6, 7 ve 8'inci sorulardan sadece üçünü çözünüz.

5. $\mathbb{M}$ yüzeyi $\varphi(u,v) = (u, v, u+2v)$ parametrizayonu ile veriliyor

a) Şekil operatörünü bulunuz. (10 **puan**)

b) Yüzeyin $p = \varphi(1,1)$ noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz. (5 **puan**)

c) p noktasındaki asal eğriliklerini bulunuz. (5 **puan**)

d) $\gamma(t) = (t,1)$ olmak üzere, $\alpha(t) = \varphi(\gamma(t))$ eğrisinin teğeti doğrultusundaki normal eğriliği hesaplayınız. (5 **puan**)

DİFERENSİYEL GEOMETRİ 2
YAZ OKULU ARASINAVI
Adı Soyadı :
Numara :

1. a) Umbilik noktada asal eğriliklerin eşit olduğunu gösteriniz. (5 **puan)**

b) k_1, k_2 **asal eğriliklerinin her ikisi de negatif ise yüzeyin karekteri nasıldır?** (5 **puan)**

c) Dik silindirin Gauss dönüşümü ne belirtir? (5 **puan)**

2. Şekil operatörünün öz eşlenik (self adjoint) olduğunu gösteriniz. (15 **puan)**

3. $\varphi(U) = \mathbb{M}$ **yüzeyinin birinci ve ikinci temel formu sırasıyla** $\mathbf{I} = (u^2+v^2)\,du^2+2v\,du\,dv + dv^2$ **ve** $\mathbf{II} = u\,du^2 + v\,du$ **olduğuna göre,**

a) Yüzeyin $\varphi(1,1)$ **noktasındaki şekil operatörünü bulunuz.** (10 **puan)**

b) Gauss ve ortalama eğriliğini hesaplayınız. (5 **puan)**

c) $\varphi(u(t) = t, v(t) = 1)$ **eğrisinin** $t = 0$ **ve** $t = 1$ **arasındaki uzunluğunu bulunuz.** (10 **puan)**

.

4. $\mathbb{M}$, $\mathbb{R}^3$ de **bir yüzey olmak üzere,** $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p} \in T_p(\mathbb{M})$ **lineer bağımsız iki vektör ise** $S(\mathrm{v}_p) \times S(\mathrm{w}_p) = K(p)\,\mathrm{v}_p \times \mathrm{w}_p$ **olduğunu ispatlayınız. (15 puan)**

5. $\mathbb{E}^3$**'de bir** $\mathbb{M}$ **yüzeyinin birinci, ikinci ve üçüncü temel formları arasında** $\mathbf{III} - 2H\mathbf{II} + K\mathbf{I} = 0$ **bağıntısı olduğunu gösteriniz. (15 puan)**

6. $\alpha(u) = (0, 3 + 2\cos u, 2\sin u)$ **çemberinin** z **ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen tor yüzeyinin** $\varphi(u, v)$ **parametrizasyonunu bulunuz. (5 puan)**

b) $\varphi(0, 0)$ **noktasından geçen parametre eğrilerini ve bu eğriler arasındaki açıyı bulunuz. (5 puan)**

c) $p = \varphi(0, 0)$, $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$ **ve** $\mathrm{v}_p = 2\varphi_u(q) - 3\varphi_v(q)$ **ise** $\mathrm{v}_p[f] = ?$ **(10 puan)**

d) $p = \varphi(0, 0)$ **noktasında,** $\mathrm{v}_p = 2\varphi_u(q) - 3\varphi_v(q)$ **için** $S(\mathrm{v}_p) = ?$ **(10 puan)**

Diferensiyel Geometri 2
Yazokulu 2010
Adı Soyadı :
No :

1. $\mathbb{M}$ yüzeyinin bir p noktasındaki birim eğrilik vektörleri e_1 ve e_2, asal eğrilikleri de k_1 ve k_2 olsunlar. $\mathbf{v}_p = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ ise $k_n(\mathbf{v}_p) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta$ olduğunu gösteriniz. **(20 puan)**

2. $\mathbf{v}_p$ ve $\mathbf{w}_p$, $\mathbb{M}$ yüzeyinin p noktasındaki farklı asli eğriliklere karşılık gelen asli vektörleri ise $\mathbf{v}_p \perp \mathbf{w}_p$ olduğunu ispatlayınız. (15 **puan)**

3. $\varphi(u,v) = \mathbb{M}$ yüzeyinin birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$I = du^2 + 2v\,du\,dv + (u^2+v^2)\,dv^2 \quad \text{ve}$$
$$II = u^2du^2 + uv\,dv^2$$

ile veriliyor. Buna göre, yüzey üzerindeki u parametre eğrisinin $\varphi(1,2)$ noktasından geçen normal eğriliğini bulunuz. (15 **puan)**

4. $\mathbf{n}$, $\mathbb{M}$ yüzeyinin normal vektör alanı olmak üzere, $\mathbf{v}_p \in T_p(\mathbb{M})$ için, $\mathrm{D}_{\mathbf{v}_p}\mathbf{n} \in T_p(\mathbb{M})$ olduğunu gösteriniz. (15 **puan)**

5. $\varphi(u,v) = (u, v, u+v^2)$ parametrizasyonu ile verilen $\mathbb{M}$ yüzeyinin
a) Birinci temel form katsayılarını bulunuz.
(5 puan)

b) İkinci temel form katsayılarını bulunuz.
(5 puan)

c) $p = \varphi(1,1)$ noktasındaki şekil operatörünü bulunuz.
(5 puan)

d) $p = \varphi(1,1)$ olmak üzere, $\mathbf{w}_p = 3\varphi_u(q) + \varphi_v(q)$ tanjant vektörü doğrultusundaki $k_n(\mathbf{w}_p)$ normal eğriliğini bulunuz. (5 Puan)

e) Asal eğriliklerini bulunuz. (5 Puan)

f) $\gamma(t) = (t,1)$ olmak üzere, $\alpha(t) = \varphi(\gamma(t))$ eğrisinin teğeti doğrultusundaki normal eğriliği hesaplayınız. **(10 puan)**

6. $\mathbb{M}$, φ parametrizasyonu ile verilen bir yüzey ve G Gauss dönüşümü olmak üzere, $\varphi_*(h_q) = \mathbf{w}_p \in T_p(\mathbb{M})$ için, $(G \circ \varphi)_*(h_q) = -(S(\mathbf{w}_p))_{G(p)}$ olduğunu ispatlayınız. **(15 Puan)**

Diferensiyel Geometri 1 —- Yazokulu 2012
Adı Soyadı : **No :**

1. $\varphi(u,v) = (u^2, v^2, u^2v^2)$ **parametrizasyonu ile verilen $\mathbb{M}$ kümesinin bir regüler yüzey olmadığını gösteriniz. (15 puan)**

2. V, $\mathbb{R}^3$**'ün açık bir altkümesi olmak üzere, $c \in \mathbb{R}$ sayısı, $f : V \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = c$ kapalı fonksiyonunun regüler bir değeri olsun. $\nabla f|_p = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})(p)$ vektörünün, $f^{-1}(c)$ yüzeyinin p noktasında yüzeye dik olduğunu gösteriniz.(15 puan)**

3. **$K(p)$ Gauss eğriliğinin $K(p) = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$ olduğunu ispatlayınız. (15 puan)**

4. **N, $\mathbb{M}$ yüzeyinin normal vektör alanı olmak üzere, $v_p \in T_p(\mathbb{M})$ için, $D_{v_p}N \in T_p(\mathbb{M})$ oldugunu gösteriniz.(15 puan)**

5. $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}^2)$ **parametrizasyonu ile verilen** $\mathbb{M}$ **yüzeyinin**

a) $\mathbf{p} = \varphi(1,1)$ **noktasındaki şekil operatörünü bulunuz. (10 puan)**

b) $\mathbf{p} = \varphi(1,1)$ **noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz. (5 puan)**

c) $\mathbf{p} = \varphi(1,1)$ **noktasındaki asal eğrilikleri bulunuz. (10 puan)**

d) $\mathbf{w}_p = (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{5}) \in \mathbf{T_p}(\mathbb{M})$ **için** $\mathbf{S_p}(\mathbf{w_p})$**'yi hesaplayınız. (5 puan)**

e) $\mathbf{f} : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$**,** $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{x}+\mathbf{yz}$ **ve**
$\mathbf{v_p} = \mathbf{2}\varphi_u(q) + \mathbf{3}\varphi_v(q)$ **olmak üzere,** $\mathbf{v}_p[\mathbf{f}] = ?$ **(10 puan)**

6. a) $(\mathbf{x}-\mathbf{3})^2 + \mathbf{y}^2 = \mathbf{4}$ **çemberinin y−ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen tor yüzeyi için bir** $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v})$ **parametrizasyonu bulunuz.**

b) Bu tor yüzeyinin $\varphi(\mathbf{0},\mathbf{0})$ **noktasındaki parametre eğrilerinin birbirine dik olduğunu gösteriniz. (20 puan)**

..

Diferensiyel Geometri 2 —- Yazokulu 2012 - FİNAL
Adı Soyadı : **No :**

1. **Bir M yüzeyinin bir p noktasındaki asli eğrilikleri, her doğrultu yönündeki normal eğriliklerinin maksimum ve minimum değerleri olduğunu gösteriniz.(20 puan)**

2. a) Biri pozitif, biri negatif ve biri 0 olmak üzere, sabit Gauss eğriliğine sahip üç yüzeyi kabaca çiziniz.
b) M yüzeyinin ikinci temel formu $\mathrm{II} = (\mathrm{u})\,\mathrm{du}^2 + 2\mathrm{dudv} + (\mathrm{v})\mathrm{dv}^2$ olduğuna göre, $\mathrm{q} = (1,1)$, $\mathrm{q} = (1,2)$ ve $\mathrm{q} = (-1,2)$ noktalarının komşuluğunda yüzeyin (Eliptik-Parabolik-Hiperbolik) karakterini belirtiniz.

3. **$\mathbb{M}$ yüzeyinin bir p noktasındaki birim eğrilik vektörleri e_1 ve e_2, asal eğrilikleri de k_1 ve k_2 olsunlar. $\mathbf{v}_p = \cos\boldsymbol{\theta}\mathrm{e}_1 + \sin\boldsymbol{\theta}\mathrm{e}_2$ ise $\mathrm{k}_n(\mathbf{v}_p) = \mathrm{k}_1(p)\cos^2\boldsymbol{\theta} + \mathrm{k}_2(p)\sin^2\boldsymbol{\theta}$ olduğunu gösteriniz. (20 puan)**

4. **$\boldsymbol{\varphi} : (\mathbf{0},\mathbf{1}) \times (\mathbf{2},\mathbf{3}) \to \mathbb{R}^3$, olmak üzere, $\boldsymbol{\varphi}((\mathbf{0},\mathbf{1}) \times (\mathbf{2},\mathbf{3})) = \mathbb{M}$ ile tanımlanan yüzeyin birinci temel formu $\mathrm{I} = \mathrm{udu}^2 + \mathrm{u}^3\mathrm{dv}^2$ olduğuna göre, bu yüzeyin alanını bulunuz. (20 puan)**

5. $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{M}$ **ile verilen** $\mathbb{M}$ **yüzeyinin, birinci ve ikinci temel formu sırasıyla,**
$\mathbf{I} = du^2 + (2v)\,dudv + (u^2+v^2)dv^2$
$\mathbf{II} = (u^3)\,du^2 + (4uv)\,dudv + (uv)dv^2$
şeklinde tanımlanıyor. $p = \varphi(1,0)$ **noktası için, aşağıdaki seçenekleri yanıtlayınız.**

a) p noktasındaki şekil operatörünü bulunuz. (10 puan)

b) p noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz. (5 puan)

c) p noktasındaki asal eğrilikleri bulunuz. (5 puan)

d) $w_p = 2\varphi_u(q) + 3\varphi_v(q)$ **ise,** $S_p(w_p)$**'yi hesaplayınız. (5 puan)**

e) $w_p = 2\varphi_u(q) + 3\varphi_v(q)$ **doğrultusundaki normal eğriliği bulunuz. (5P)**

f) $\alpha(t) = \varphi(t, t^2)$ **eğrisinin hız vektörü yönündeki normal eğriliğini bulunuz. (10P)**

6. $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$ **parametrizasyonu ile verilen** M **yüzeyini göz önüne alalım. Aşağıdaki soruları çözünüz.**

a) Birinci temel form katsayılarını bulunuz. (5P)

b) İkinci temel form katsayılarını bulunuz. (5P)

c) Yüzey üzerindeki $\alpha(t) = \varphi(2, t)$ **eğrisinin,** $\alpha(0)$ **ve** $\alpha(1)$ **noktaları arasındaki uzunluğunu bulunuz. (5P)**

d) Yüzey üzerindeki $\alpha(t) = \varphi(2, t)$ **eğrisinin hız vektörü yönündeki normal eğriliğini bulunuz. (5P)**

..

DİFERENSİYEL GEOMETRİ 2 - ARASINAV
ADI SOYADI : .... NUMARA : ....

1. $x^2 + 2y^2 + z = 4$ **yüzeyinin üstündeki,** $P = (1,1,1)$ **noktasından çizilen teğet düzlemin denklemini bulunuz. (20 puan)**

2. 1. a) $z = x^2y$ **ile verilen yüzey regüler midir? Gösteriniz. (5 puan)**

b) $\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ **yüzeyinin kartezyen denklemini yazınız ve çiziniz. (5 Puan)**

c) Dik silindirin Gauss dönüşümü ne belirtir? (5 puan)

d) Şekil operatörünü tanımlayınız. (5 Puan)

3. $\varphi(u,v)$ **parametrizasyonu ile verilen bir yüzey için,** φ_u **ve** φ_v **vektörleriyle gerilen paralelkenarın alanının** $\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}$ **olduğunu gösteriniz. (20 puan)**

4. $\mathbb{M}$, $\mathbb{R}^3$ **de bir yüzey olmak üzere,** $v_p, w_p \in T_p(\mathbb{M})$ **lineer bağımsız iki vektör ise** $S(\mathbf{v}_p) \times S(\mathbf{w}_p) = K(p)\,\mathbf{v}_p \times \mathbf{w}_p$ **olduğunu ispatlayınız. (20 puan)**

5. $\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, u+v)$ **parametrizasyonu ile verilen $\mathbb{M}$ yüzeyini göz önüne alalım.**

a) $\varphi(\pi/2, \pi/2)$ **noktasındaki şekil operatörünü bulunuz. (10 Puan)**

b) $\varphi(\pi/2, \pi/2)$ **noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz. (5 puan)**

c) $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2xy + z^2$ **fonksiyonu veriliyor. Buna göre,** $q = (\pi/2, \pi/2)$, $\varphi(q) = p$ **ve** $h_q = 2\dfrac{\partial}{\partial u}(q) + 3\dfrac{\partial}{\partial v}(q)$ **olduğuna göre,** $\varphi_*(\mathbf{h}_q)[f] = ?$ **(5 puan)**

6. $\varphi(U) = \mathbb{M}$ **yüzeyinin birinci temel formu** $I = du^2 + 2ududv + (u^2+v^2)\,dv^2$ **olduğuna göre, yüzey üzerindeki,** $\alpha(t) = \varphi(t,t)$ **eğrisinin** $t=0$ **ve** $t=1$ **arasındaki uzunluğunu bulunuz. (20 Puan)**

Başarılar

Doç.Dr. Mustafa Özdemir

DİFERENSİYEL GEOMETRİ 2 - FİNAL

ADI SOYADI : .... NUMARA : ....

1. $\mathbb{M}$ **yüzeyinin bir** p **noktasındaki birim eğrilik vektörleri** $\mathbf{e}_1$ **ve** $\mathbf{e}_2$**, asal eğrilikleri de** $\mathbf{k}_1$ **ve** $\mathbf{k}_2$ **olsunlar.** $\mathbf{v}_p = \cos\boldsymbol{\theta}\mathbf{e}_1 + \sin\boldsymbol{\theta}\mathbf{e}_2$ **ise** $\mathbf{k}_n(\mathbf{v}_p) = \mathbf{k}_1(p)\cos^2\boldsymbol{\theta} + \mathbf{k}_2(p)\sin^2\boldsymbol{\theta}$ **olduğunu gösteriniz. (20 puan)**

2. $\mathbf{V}$, $\mathbb{R}^3$**'ün açık bir altkümesi olmak üzere,** $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ **sayısı,** $\mathbf{f}: \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{c}$ **kapalı fonksiyonunun regüler bir değeri olsun.** $\nabla\mathbf{f}|_p = (\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}, \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}, \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{z}})(\mathbf{p})$ **vektörünün,** $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{c})$ **yüzeyinin p noktasında yüzeye dik olduğunu gösteriniz.(20 puan)**

3) $\mathbb{E}^3$**'de bir** $\mathbb{M}$ **yüzeyinin birinci, ikinci ve üçüncü temel formları arasında** $\mathbf{III} - 2H\mathbf{II} + K\mathbf{I} = 0$ **bağıntısı olduğunu gösteriniz. (20 puan)**

4. $\boldsymbol{\varphi}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{M}$ **ile verilen** $\mathbb{M}$ **yüzeyinin, birinci ve ikinci temel formu sırasıyla,**
$\mathbf{I} = (\mathbf{u})\,\mathbf{du}^2 + \left(\mathbf{2u}^2\right)\mathbf{dudv} + (\mathbf{u}^3 + \mathbf{uv}^2)\mathbf{dv}^2$ **ve**
$\mathbf{II} = (\mathbf{u} + \mathbf{v})\,\mathbf{du}^2 + (\mathbf{2u})\,\mathbf{dudv} + (\mathbf{v}^2)\mathbf{dv}^2$
şeklinde tanımlanıyor. $\mathbf{p} = \varphi(1,1)$ **noktası için, aşağıdaki seçenekleri yanıtlayınız.**

a) p noktasının komşuluğunda yüzeyin (Eliptik-Parabolik-Hiperbolik) karakterini belirtiniz. (5 puan)

b) p noktasındaki şekil operatörünü bulunuz. (10 puan)

c) p noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz. (10 puan)

d) p noktasındaki asal eğrilikleri bulunuz. (10 puan)

e) $\mathbf{w}_p = \mathbf{1}\boldsymbol{\varphi}_u(q) - 2\boldsymbol{\varphi}_v(q)$ **ise,** $\mathbf{S_p}(\mathbf{w_p})$**'yi hesaplayınız. (5 puan)**

f) Bir M **yüzeyinin** v_p **tanjant vektörü doğrultusundaki normal eğriliği tanımını yapınız.(5P)**

g) $\mathbf{w}_p = \mathbf{1}\boldsymbol{\varphi}_u(q) - \mathbf{2}\boldsymbol{\varphi}_v(q)$ **doğrultusundaki normal eğriliğini bulunuz. (5P)**

h) $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t}, \mathbf{t}^2)$ **eğrisinin** $\alpha(1)$ **noktasındaki hız vektörü yönündeki normal eğriliğini bulunuz. (10P)**

DİFERENSİYEL GEOMETRİ 2 - ARASINAVI - 22 TEMMUZ 2015 - AAA
ADI SOYADI : .... NUMARA : ....

1. $\varphi(u,v) = (u, v, \sin u + \cos v)$ **parametrizasyonu ile verilen** $\mathbb{M}$ **yüzeyi ve** $p = \varphi(\pi/2, \pi/2)$ **noktası için aşağıdaki 10 soruyu yanıtlayınız.**

1. Bu yüzeyin regüler midir? Neden?

2. Bu yüzeyin p **noktasından geçen** u ve v **parametre eğrilerini bulunuz.**

3. Bu yüzeyin p **noktasından geçen** u ve v **parametre eğrileri arasındaki açıyı bulunuz.**

4. Bu yüzeyin p **noktasındaki birinci ve ikinci temel form katsayılarını bulunuz.**

5. Bu yüzeyin p **noktasındaki şekil operatörünü bulunuz.**

6. Bu yüzeyin p **noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz.**

7. Bu yüzeyin p **noktasındaki asal eğriliklerini bulunuz.**

8. p **noktasındaki** $\mathrm{w}_p = \varphi_{*p}(2\frac{\partial}{\partial u} + 3\frac{\partial}{dv})$ **tanjant vektörü için,** $S(\mathrm{w}_p) = ?$

9. p **noktasındaki** $\mathrm{u}_p = (1, 3, -3)$ **tanjant vektörü için** $S(\mathrm{u}_p) = ?$

10. $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + z^2$ **olmak üzere,** $\mathrm{v}_p = 2\varphi_u(q) - \varphi_v(q)$ **için,** $\mathrm{v}_p[f]$ **türevini hesaplayınız.**

11. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ **tek kanatlı hiperboloidinin, $p = (1,1,1)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.(15 P)**

12. Şekil operatörünü tanımlayınız ve self adjoint (öz eşlenik) olduğunu kanıtlayınız. (20 P)

13. $y = e^x$ **fonksiyonunun** x **etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey için bir parametrizasyon bulunuz.** $x = 0$ **ve** $y = 1$ **noktasına karşılık gelen noktasındaki teğet düzlemin denklemini bulunuz.**

14. $\mathbf{V}$, $\mathbb{R}^3$**'ün açık bir altkümesi olmak üzere** $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ **sayısı,** $\mathbf{f} : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{c}$ **kapalı fonksiyonunun regüler bir değeri olsun.** $\nabla \mathbf{f}|_p = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right)(\mathbf{p})$ **vektörünün,** $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{c})$ **yüzeyinin p noktasında yüzeye dik olduğunu gösteriniz.(20 puan)**

DİFERENSİYEL GEOMETRİ 2 - FİNAL

ADI SOYADI : .... NUMARA : ....

1. $\mathbb{M}$ yüzeyinin bir p noktasındaki birim eğrilik vektörleri e_1 ve e_2, asal eğrilikleri de k_1 ve k_2 olsunlar. $v_p = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ ise $k_n(v_p) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta$ olduğunu gösteriniz. (20P)

2. $\mathbb{M}$, $\mathbb{R}^3$ de bir yüzey olmak üzere, $v_p, w_p \in T_p(\mathbb{M})$ lineer bağımsız iki vektör ve K, yüzeyin Gauss eğriliği ise, $S(v_p) \times S(w_p) = K(p)\, v_p \times w_p$ olduğunu kanıtlayınız. (20P)

3. $\varphi(u,v) = (u, v, \ln u)$ parametrizasyonu ile verilen $\mathbb{M}$ yüzeyini göz önüne alalım. Aşağıdaki soruları çözünüz.

a) $P = \varphi(1,1)$ noktasındaki birinci temel form katsayılarını bulunuz. (5P)

b) $P = \varphi(1,1)$ noktasındaki ikinci temel form katsayılarını bulunuz. (5P)

c) Yüzey üzerindeki $\alpha(t) = \varphi(2,t)$ eğrisinin, $\alpha(1)$ ve $\alpha(2)$ noktaları arasındaki uzunluğunu bulunuz. (5P)

d) Yüzey üzerindeki $\alpha(t) = \varphi(2,t)$ eğrisinin hız vektörü yönündeki normal eğriliğini bulunuz. (5P)

4) $\varphi\left(\mathbb{R}^2\right)=\mathbb{M}$ **ile verilen** $\mathbb{M}$ **yüzeyinin, birinci ve ikinci temel formu sırasıyla,**
$\mathbf{I}=\left(\mathbf{u}^2\right)\mathbf{du}^2+(4\mathbf{uv})\,\mathbf{dudv}+(4\mathbf{v}^2+1)\mathbf{dv}^2$ **ve**
$\mathbf{II}=(\mathbf{u}+\mathbf{v})\,\mathbf{du}^2+(2\mathbf{u})\,\mathbf{dudv}+(\mathbf{v})\mathbf{dv}^2$
olduğuna göre, aşağıdaki seçenekleri yanıtlayınız.

a) $\mathbf{p}=\varphi\ (1,0)$ **noktasının komşuluğunda yüzeyin (Eliptik-Parabolik-Hiperbolik) karakterini belirtiniz. (5P)**

b) $\mathbf{p}=\varphi\,(1,0)$ **noktasındaki şekil operatörünü bulunuz. (10P)**

c) $\mathbf{p}=\varphi\ (1,0)$ **noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz. (10P)**

d) $\mathbf{p}=\varphi\,(1,0)$ **noktasındaki asal eğrilikleri bulunuz. (10P)**

e) $\mathbf{w_p}=1\varphi_u\,(\mathbf{q})-2\ \varphi_v\,(\mathbf{q})$ **ise,** $\mathbf{S_p}\,(\mathbf{w_p})$**'yi hesaplayınız. (5P)**

f) $\varphi\left((0,1)\times(0,2)\right),$ **yüzey üzerinde bir bölge tanımlar. Bu bölgenin alanını bulunuz. (5P)**

g) $\alpha\,(t)=\varphi\left(\mathbf{t}^2,\mathbf{t}\right)$ **eğrisinin** $\alpha\,(1)$ **noktasındaki hız vektörü yönündeki normal eğriliğini bulunuz. (10P)**

h) Bu yüzeyin $\mathbf{w_p}=1\varphi_u\,(\mathbf{q})-2\ \varphi_v\,(\mathbf{q})$ **doğrultusundaki normal eğriliğini bulunuz.(5P)**

DİFERENSİYEL GEOMETRİ 2 - ARASINAVI - 22 TEMMUZ 2015 - AAA
ADI SOYADI : .... NUMARA : ....

1. $\varphi(u,v) = (u, v, \sin u + \cos v)$ parametrizasyonu ile verilen $\mathbb{M}$ yüzeyi ve $p = \varphi(\pi/2, \pi/2)$ noktası için aşağıdaki 10 soruyu yanıtlayınız.

1. Bu yüzeyin regüler midir? Neden?

Çözüm :

$$\varphi_* = J(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos u & -\sin v \end{bmatrix}$$

Jakobiyen matrisinin rankı, her $p \in \mathbb{R}^2$ için 2 olduğundan, bu yüzey regülerdir.

2. Bu yüzeyin p noktasından geçen u ve v parametre eğrilerini bulunuz.

Çözüm : $\alpha(u) = \varphi(u, \pi/2) = (u, \pi/2, \sin u)$ u-parametre eğrisi ve $\beta(v) = \varphi(\pi/2, v) = (\pi/2, v, 1 + \cos v)$ ise v-parametre eğrisidir.

3. Bu yüzeyin p noktasından geçen u ve v parametre eğrileri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm : $\alpha'(u) = (1, 0, \cos u)$ ve $\beta'(v) = (0, 1, -\sin v)$ olduğundan, p noktasında parametre eğrileri arasındaki açı : $\cos\theta = \dfrac{\langle \alpha'(\pi/2), \beta'(\pi/2) \rangle}{\|\alpha'(\pi/2)\| \|\beta'(\pi/2)\|} = 0$ olduğundan, $\theta = 90^\circ$ dir.

4. Bu yüzeyin p noktasındaki birinci ve ikinci temel form katsayılarını bulunuz.

Çözüm : $p = \varphi(q) = \varphi(\pi/2, \pi/2)$ için,
$\varphi_u = (1, 0, \cos u) \Rightarrow \varphi_u(q) = (1, 0, 0)$
$\varphi_v = (0, 1, -\sin v) \Rightarrow \varphi_v(q) = (0, 1, -1)$
olduğundan, birinci temel form katsayıları
$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$, $F = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 2$ olur.
$n(\varphi(q)) = \dfrac{\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|} = \dfrac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$
$\varphi_{uu} = (0, 0, -\sin u) \Rightarrow \varphi_{uu}(q) = (0, 0, -1)$
$\varphi_{uv} = (0, 0, 0) \Rightarrow \varphi_{uv}(q) = (0, 0, 0)$
$\varphi_{vv} = (0, 0, -\cos u) \Rightarrow \varphi_{vv}(q) = (0, 0, 0)$
olduğundan, ikinci temel form katsayıları
$e = \langle \varphi_{uu}, n \rangle = -1/\sqrt{2}$, $f = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$, $g = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 0$ olur.

5. Bu yüzeyin p noktasındaki şekil operatörünü bulunuz.

Çözüm : S_p şekil operatörü matrisi olmak üzere,

$$S_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

6. Bu yüzeyin p noktasındaki Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz.

Çözüm : Gauss eğriliği $K(p) = \det S_p = 0$ ve ortalama eğrilik $H(p) = -\sqrt{2}/4$ şeklindedir.

7. Bu yüzeyin p noktasındaki asal eğriliklerini bulunuz.

Çözüm :

$$\det(\lambda I - S_p) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \left(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

eşitliğinden, asal eğrilikleri $k_1 = 0$ ve $k_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ olarak bulunur.

8. p noktasındaki $\mathbf{w}_p = \varphi_{*p}(2\frac{\partial}{\partial u} + 3\frac{\partial}{dv})$ tanjant vektörü için, $S(\mathbf{w}_p) = ?$

Çözüm : $\mathbf{w}_p = 2\varphi_u(q) + 3\varphi_v(q)$ ve $S = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan,

$$S_p(\mathbf{w}_p) = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

yani, $S_p(\mathbf{w}_p) = -\sqrt{2}\varphi_u(q) = -\sqrt{2}(1, 0, 0)$ olur.

9. p noktasındaki $\mathbf{u}_p = (1, 3, -3)$ tanjant vektörü için $S(\mathbf{u}_p) = ?$

Çözüm : $\mathbf{u}_p = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -\mathbf{3}) = A\varphi_u(q) + B\varphi_v(q) = A(1, 0, 0) + B(0, 1, -1)$ eşitliğinden, $A = 1$ve $B = 3$ olur. Buna göre,

$$S_p(\mathbf{u}_p) = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yani, $S_p(\mathbf{u}_p) == -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varphi_u(q) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 0)$ olur.

10. $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy + z^2$ olmak üzere, $\mathbf{v}_p = 2\varphi_u(q) - \varphi_v(q)$ için, $\mathbf{v}_p[f]$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $\mathbf{v}_p = 2\varphi_u(q) - \varphi_v(q) = 2(1, 0, 0) - (0, 1, -1) = (2, -1, 1)$ ve $p = \varphi(\pi/2, \pi/2) = (\pi/2, \pi/2, 1)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p[f] &= \sum_{i=1}^{3} v_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p = 2 \cdot y(p) - 1 \cdot x(p) + 1 \cdot 2z(p) \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2 = 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

11. $\boldsymbol{x^2+y^2-z^2=1}$ **tek kanatlı hiperboloidinin, $\boldsymbol{p=(1,1,1)}$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.(15 P)**

Çözüm : $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$ olmak üzere, $\nabla F=(2x,2y,-2z)$ dir. $\mathbf{n}=\nabla F/\|\nabla F\|$ olduğundan, p noktasındaki teğet düzlem $\nabla F(p)=(2,2,-2)$ vektörüne diktir. Buna göre, düzlemin denklemi :
$<\overrightarrow{PX},\nabla F(p)>=0$ eşitliğinden,

$$2(x-1)+2(y-w)-2(z-1)=0\Rightarrow x+y-z=1$$

elde edilir.

12. Şekil operatörünü tanımlayınız ve self adjoint (öz eşlenik) olduğunu kanıtlayınız. (20 P)

Çözüm : $\mathbf{n}$, $\mathbb{M}$ yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere,

$$S_p:T_p(\mathbb{M})\to T_p(\mathbb{M}),\, S(\mathbf{w}_p)=-\mathbf{D}_{\mathbf{w}_p}\mathbf{n}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, **yüzeyin p noktasındaki şekil operatörü** denir.
$\langle\varphi_u,\mathbf{n}\rangle=\langle\varphi_v,\mathbf{n}\rangle=0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\varphi_u[\langle\varphi_v,\mathbf{n}\rangle] &= 0\\ \langle\varphi_{vu},\mathbf{n}\rangle+\langle\varphi_v,\mathrm{D}_{\varphi_u}\mathbf{n}\rangle &= 0\\ \langle\varphi_{vu},\mathbf{n}\rangle+\langle\varphi_v,-S(\varphi_u)\rangle &= 0\end{aligned}$$

eşitliğinden, $\langle S(\varphi_u),\varphi_v\rangle=\langle\varphi_{vu},\mathbf{n}\rangle$ elde edilir. Benzer şekilde,

$$\langle S(\varphi_v),\varphi_u\rangle=\langle\varphi_{uv},\mathbf{n}\rangle$$

bulunabilir ki, $\varphi_{uv}=\varphi_{vu}$ eşitliği de göz önünde bulundurulursa, istenen elde edilir.

13. $\boldsymbol{y=e^x}$ fonksiyonunun $\boldsymbol{x}$ etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey için bir parametrizasyon bulunuz. $\boldsymbol{x=0}$ ve $\boldsymbol{y=1}$ noktasına karşılık gelen noktasındaki teğet düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : Dönel yüzeyin parametrizasyonu
$\varphi(u,v)=(x=u,y=e^u\cos v,z=e^u\sin v)$ şeklindedir. Buna göre, $x=0$, $y=1$ noktasında, $u=0$ ve $v=0$ olacağından, $p=\varphi(q)=\varphi(0,0)=(0,1,0)$ noktasında,
$\varphi_u=(1,e^u\cos v,e^u\sin v)\Rightarrow\varphi_u(q)=(1,1,0)$,
$\varphi_v=(0,-e^u\sin v,e^u\cos v)\Rightarrow\varphi_v(q)=(0,0,1)$
ve $\varphi_u(q)\times\varphi_v(q)=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(1,-1,0)$
olur. Buradan yüzeyin normali

$$\mathbf{n}=\frac{\varphi_u(q)\times\varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q)\times\varphi_v(q)\|}=\frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$$

olur. p noktasında, yüzeyin teğet düzleminin denklemi :

$$1(x-0)-1(y-1)+0(z-0)=0$$

eşitliğinden, $x-y+1=0$ bulunur.

14. $\mathbf{V}$, $\mathbb{R}^3$'ün açık bir altkümesi olmak üzere $\mathbf{c}\in\mathbb{R}$ sayısı, $\mathbf{f}:\mathbf{V}\to\mathbb{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=\mathbf{c}$ kapalı fonksiyonunun regüler bir değeri olsun. $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{f}|_p=(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}},\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}},\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{z}})(\mathbf{p})$ vektörünün, $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{c})$ yüzeyinin p noktasında yüzeye dik olduğunu gösteriniz.(20 puan)

Çözüm : $f^{-1}(c)=\mathbb{M}$ ve $\mathbf{v}_p\in T_p(\mathbb{M})$ olsun. Buna göre, $\mathbb{M}$ yüzeyi üzerinde, $\alpha(0)=p$ ve $\alpha'(0)=\mathbf{v}_p$ olacak şekilde en az bir $\alpha:I\to\mathbb{M}$ eğrisi vardır. α eğrisi yüzey üzerinde olduğundan, her $t\in\mathbb{M}$ için, $f(\alpha(t))=c$ olacaktır.
Burada $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$ olsun. Bu durumda, $f\circ\alpha:I\to\mathbb{R}$ ve $f\circ\alpha=c$ olduğundan, $(f\circ\alpha)'=0$ olur. Buna göre, bileşkenin türevinden

$$\begin{aligned}(f\circ\alpha)'(0) &= f(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))'(0)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(0))\,\alpha_1'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(0))\,\alpha_2'(t)\\ &\quad+\frac{\partial f}{\partial z}(\alpha(0))\,\alpha_3'(t)\\ 0 &= <\nabla f|_p,\mathbf{v}_p>\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\nabla f|_p$ vektörünün, p noktasında yüzeyin teğet düzlemine dik olması demektir.